第15卷 第4期　　电子科学学刊　　Vol.15, No.4
1993年7月　　JOURNAL OF ELECTRONICS　　July, 1993

求符号 k 阶余因式的变形双图法

黄汝激
(北京科技大学自动化系,北京 100083)

摘要　引入了 k 阶变形双图 G^{ij} 和 k 阶变形矩阵 Y^{ij} 的概念. 应用它们导出了图行列式 $C(Y)$ 和 k 阶余因式 $Y_{(ij)}$ 的两个新表达式,从而提出了求符号 k 阶余因式 $Y_{(ij)}$ 的变形双图法. 应用它可直接且高效地求得 $Y_{(ij)}$ 的一个多层展开式(没有专门的符号计算问题),而且不产生对消项,所以它优于以前的方法.

关键词　图论;变形双图;图行列式;符号 k 阶余因式

一、引　言

求符号网络函数的关键是求符号 k 阶余因式. 以前求符号 k 阶余因式的图论方法有三类: (1)有向 k 树法[1]和流图法[2,3],它们计算符号比较简单,但产生许多对消项; (2)完全 k 树法(双图法)[4],它不产生对消项,但要专门计算每项的符号,很麻烦; (3)完全有向 k 树法[5]和主子图法[6],它们不产生对消项,符号的计算也较简单,但产生完全有向 k 树和主子图比较麻烦. 本文目的是克服上述缺点,提出一个可直接且高效地产生 $Y_{(ij)}$ 的多层展开式的变形双图法.

二、基本原理

考虑一个有源电网络 N, 它的不定导纳矩阵为 Y. 欲求 Y 的 k 阶余因式[1] $Y_{(ij)}=Y_{(i_1j_1,\cdots,i_kj_k)}$ 的符号展开式. 若在 N 的每两对端点 i_hi_k 和 j_hj_k 之间外接一个互导为 $g_h=g(i_hi_k,j_hj_k)$ 的压控流源, $I(i_hi_k)=g_hV(j_hj_k), h=1,\cdots,k-1$, 所得网络称为 N 的**增广网络**[5] N^*,它的不定导纳矩阵记为 Y^*. 设 N 的电流图[5]为 G_i,电压图[5]为 G_v,二者合称为 N 和 Y 的**双图** $G=(G_i,G_v)$. N^* 和 Y^* 的双图记为 $G^*=(G_i^*,G_v^*)$. 一阶余因式 $C(Y)=Y_{(i_k,j_k)}$ 称为 G 的**图行列式**. G_i 的顶点称为**行点**(因它对应于 Y 的行), 边称为**电流边**(因它对应于 N^* 的支路电流). 同理, G_v 的顶点称为**列点**,边称为**电压边**. G 中标号相同的一对行点和列点称为**双点**,权相同的一对电流边和电压边称为**双边**.

定义 1　双图 $G=(G_i,G_v)$ 关于 k 点对 $ij=i_1j_1,\cdots,i_kj_k$ 的 k **阶变形短路双图**

1992.01.06收到,1992.06.03定稿

黄汝激　男,1930年生,教授,主要从事电路与系统、网络图论、有向超图理论和神经网络理论与应用方面的教学和研究工作.

（简称 **k 阶变形双图**）$G^{ij}=(G_i^{ij},G_v^{ij})$ 定义为从 G 按下列规则变形得到的双图：(1)对于 $h=1,\cdots,k-1$，若 $i_h\neq j_h$，将 G_v 的列点标号 i_h 与 j_h 对换(或将 G_i 的行点标号 i_h 与 j_h 对换)；(2)将 G_i 的行点 i_h 融进行点 i_k，G_v 的列点 i_h 融进列点 j_k（或将 G_i 的行点 j_h 融进行点 i_k，G_v 的列点 j_h 融进列点 j_k)，即将 G 的双边 g_h 短路并删去 g_h，$h=1,\cdots,k-1$；其他双边中只要有一个边被短路，该双边也删去(因用它不可能构成完全树)．$i_hj_h(h=1,\cdots,k-1)$ 称为**被变换点对**．

定义 2　G^{ij} 的对应不定导纳矩阵称为 Y 关于 k 行列对 $ij=i_1j_1,\cdots,i_kj_k$ 的 **k 阶变形矩阵** Y^{ij}，它可直接从 Y 按下列规则变形得到：(1)对于 $h=1,\cdots,k-1$，若 $i_h\neq j_h$，将列 i_h 与列 j_h 对换(或将行 i_h 与行 j_h 对换)；(2)将行 i_h 加到行 i_k，删去行 i_h，将列 i_h 加到列 j_k，删去列 i_h（或将行 j_h 加到行 i_k，删去行 j_h，将列 j_h 加到列 j_k，删去列 j_h)，$h=1,\cdots,k-1$.

定义 3　双图 G 关于双边 g 的**开路双图** $G_{g=0}$ 定义为将 G 中双边 g 开路(即令 $g=0$)所得双图．

定理 1　设双图 $G=(G_i,G_v)$ 含有双边 $g(i_1i_2,j_1j_2)$，电流边为 i_1i_2，电压边为 j_1j_2，$ij=i_1j_1,i_2j_2$，其中 i_1j_1 为被变换点对，则 G 的图行列式 $C(Y)$ 可通过 G 的开路双图 $G_{g=0}$ 和变形短路双图 G^{ij} 分解成两项如下：

$$C(Y)=C(Y_{g=0})+gsC(Y^{ij})\tag{1}$$

$$\Sigma C(Y)\text{中含 } g \text{ 的项}=gsC(Y^{ij})\tag{2}$$

式中

$$s=s_1s_2$$

$$s_1=\begin{cases}1, & \text{若 } i_1=j_1\\ -1, & \text{若 } i_1\neq j_1\end{cases}$$

$$s_2=\begin{cases}1, & \text{若双边 } g \text{ 同向，即 } i_1 \text{ 和 } j_1 \text{ 都是始点或都是终点；}\\ -1, & \text{若双边 } g \text{ 反向，即 } i_1 \text{ 和 } j_1 \text{ 中一个为始点，另一个为终点．}\end{cases}$$

这里 s_1 称为**对换符号因子**，s_2 称为**方向符号因子**，$s=s_1s_2$ 称为 G^{ij} 和 $C(Y^{ij})$ 的**伴随符号因子**．

证明　先证(2)式．若 $i_1=j_1,i_2=j_2$，则 g 为二端元件，可在 G 中短路双边 g 并抽取出参数 g，这时无对换，故 $s_1=1$；若双边 g 同向，则 g 为正导纳，故 $s_2=1$；若反向，则 g 为负导纳，故 $s_2=-1$．若 $i_1=j_1,i_2\neq j_2$，则 g 为三端元件，这时可设想把 G 中列点号 i_2 与 j_2 对换，使 g 变成二端元件，就可在 G 中短路双边 g 并抽取出参数 g，然后再把列点号 i_2 与 j_2 对换回来，就得到 G^{ij}，因两次对换，故 $s_1=(-1)^2=1$．若 $i_1\neq j_1$，则 g 为三端(若 $i_2=j_2$）或四端(若 $i_2\neq j_2$)元件，这时把列点号 i_1 与 j_1 对换后，g 变成二端(若 $i_2=j_2$)或三端(若 $i_2\neq j_2$)元件，可按上述两种情况处理，因有一次对换，故 $s_1=-1$．综上所述，从 G 中抽出双边 g 时引入了符号因子 $s=s_1s_2$，剩下了变形短路双图 G^{ij}，显然 $gsC(Y^{ij})$ 是 $C(Y)$ 中所有含 g 的项之和，即(2)式成立．又因 $C(Y_{g=0})=\Sigma C(Y)$ 中不含 g 的项，故(1)式成立．

定理 2　不定导纳矩阵 Y 的 k 阶余因式 $Y_{(ij)}$ 可通过 Y 的对应双图 G 的 k 阶变形双图 G^{ij} 的图行列式 $C(Y^{ij})$ 表示如下：

$$Y_{(ij)}=(-1)^r C(Y^{ij}) \tag{3}$$

式中 r 是 $h=1,\cdots,k-1$ 中使 $i_h\neq j_h$ 的 h 的个数.

证明 根据文献[5]中(15)式有

$$Y_{(ij)}=Y^*_{(ij)}=\left(\prod_{h=1}^{k-1} g_h\right)^{-1}\Sigma C(Y^*)\text{中含}\prod_{h=1}^{k-1} g_h\text{的项}, \tag{4}$$

应用定理 1 从 G^* 中逐次抽取出参数 $g_h, h=1,\cdots,k-1$. 若使 $i_h\neq j_h$ 的 h 的个数为 r，则从 G 变形成 G^{ij} 的过程中共进行了 r 次对换，故 $s_1=(-1)^r$. 又因双边 g_h 同向，$h=1,\cdots,k-1$，故 $s_2=1$，$s=s_1s_2=(-1)^r$，从(4)式和(2)式就可导出(3)式.

三、变形双图法

根据定理 1 和定理 2 可得**求符号 k 阶余因式的变形双图法**的步骤如下:

(1) 按照文献[4,5]作出已知网络 N 的双图 $G=(G_i,G_v)$(N 中节点号、元件参数号和电压、电流参考方向要先标明).

(2) 根据所要求 $Y_{(ij)}$ 的下标 ij 按照定义 1 作出 G 的 k 阶变形双图 G^{ij}，并应用定理 2 中(3)式把 $Y_{(ij)}$ 分解成 G^{ij} 的图行列式 $C(Y^{ij})$ 及其伴随符号因子 $(-1)^r$.

(3) 应用定理 1 中(1)式于 $C(Y^{ij})$，即从 G^{ij} 中逐步抽取出各参数 g 并产生对应的开路双图和变形短路双图，若产生的双图中有一个双点之一点的度数为 0，则删去该双图(因从它不可能产生完全树)，这样逐步分解 $C(Y^{ij})$，并逐步处理所产生的双图，一直到全部双图处理完毕(变形短路双图为双点)、全部参数都抽出了为止. 整个分解过程形成了 $C(Y^{ij})$ (从而 $Y_{(ij)}$) 的一个多层展开式，它是一个多层多项式.

注意 (1) 上述分解过程产生一个状态空间树 T，其算法类似于文献 [7] 中算法 SSTMSD. 为了简化符号计算，可在生成 T 的过程中，把父图的伴随符号因子逐层转移到子图的伴随符号因子中去，这样 T 的叶图(即双点)的伴随符号因子就是其对应完全树组的符号因子.(2) 如果要求把 $C(Y^{ij})$ 中含与不含某参数 g 的项分开，可首先处理 G^{ij} 中的双边 g.(3) 一般情况，应优先处理二端和三端元件，并取同标号点对为被变换点对，以减少对换次数，从而减少双图的变形和计算量.(4) 几个并联的双边(电流边和电压边都分别并联的双边)可合成一个双边(其导纳等于各并联双边导纳之和)进行处理.

四、应用举例

例 有一有源网络 N 如图 1(a)，欲求 N 的不定导纳矩阵 Y 的三阶余因式 $Y_{(ij)}=Y_{(12,56,47)}$.

解 应用变形双图法，首先作出 N 的双图 $G=(G_i,G_v)$ 如图 1(b)，根据 $Y_{(ij)}$ 的下标 $ij=12,56,47$ 按照定义 1 作出 G 的变形双图 G^{ij} 如图 1(c)(G_i^{ij} 中 y_8+y_{10} 表示电流边 y_8 与 y_{10} 并联，依此类推，这是为了简化图形). 因 $1\neq 2, 5\neq 6$，故 $r=2$，$s=(-1)^2=1$，$Y_{(ij)}=C(Y^{ij})$. 应用(1)式逐步展开 $C(Y^{ij})$ 可得 $Y_{(ij)}$ 的状态空间树 T 如图 2. T 中顶点表示变形短路双图，左边 ± 1 表示该双图的伴随符号因子(父图的伴随

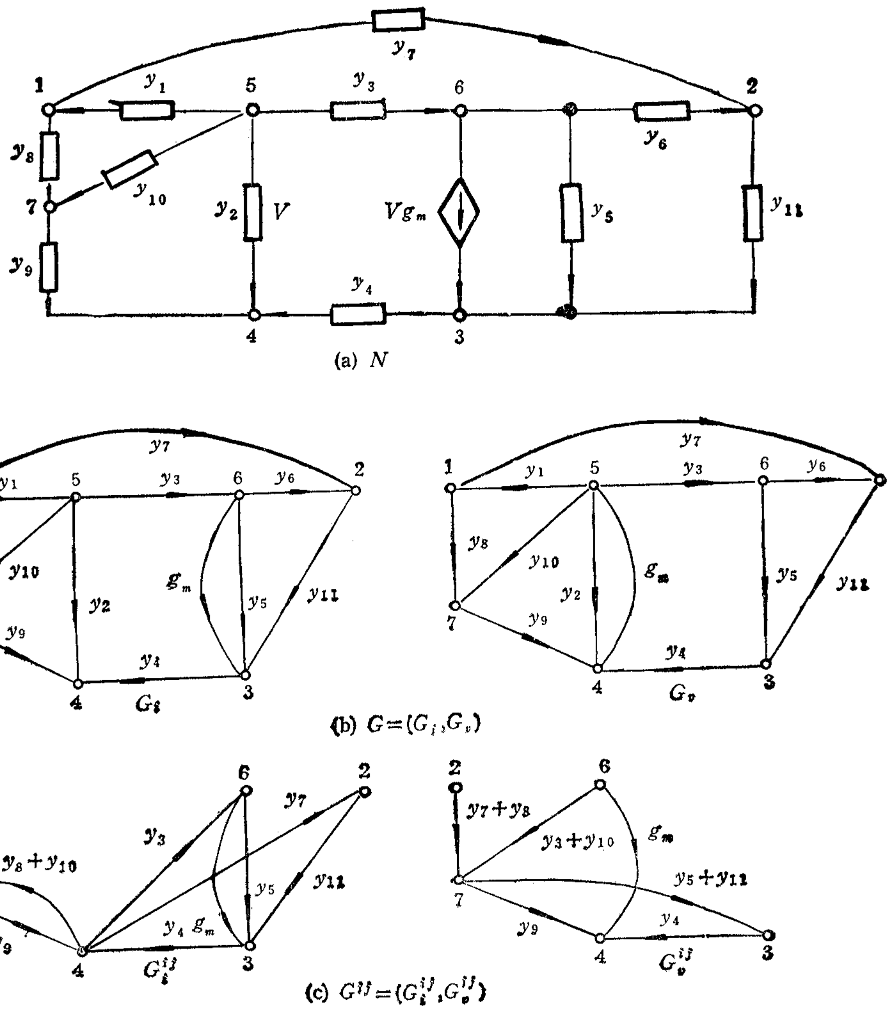

图 1　有源网络 N 及其双图 G 和变形双图 G^{ij}

符号因子逐层转移到子图的伴随符号因子中去)，上边参数表示该双图是从变形短路该参数双边得到的．顶点 0 表示 G^{ij}，1 表示 $G^{ij}(h_m = \infty)$，8 表示 $G^{ij}(g_m = 0, y_3 = \infty)$，15 表示 $G^{ij}(g_m = y_3 = 0, y_7 = \infty)$，顶点 1,8 和 15 是顶点 0 的子点(子图)，依此类推．叶点 4,7,11,14 和 18 所表示的双图都是一个双点．根据 T 可写出 $Y_{(ij)} = Y_{(12,56,47)}$ 的多层展开式如下：

$$Y_{(12,56,47)} = g_m[(y_9 + y_{10})y_7(-y_4 - y_{11}) + y_{11}(y_3 + y_4)y_8] + y_3[y_7y_9(y_4 + y_5 + y_{11}) - y_8y_4y_{11}] - y_7y_5y_{10}y_4$$

所得结果与文献[1]的应用举例中人工消去对消项后的简化结果相同，这验证了本方法的正确性．

从本例可以看出，如果双图 G 的双点数为 n，双边数为 e，G_i 和 G_v 分别用关联矩阵 A_i 和 A_v 表示，则处理每个双图时，搜索所抽取双边 g 的端点号需时 $O(n)$，短路 g 时要分别将 A_i 和 A_v 的两行相加，这需时 $O(e)$．通常 $n < e$，故处理状态空间树 T 中每个节点

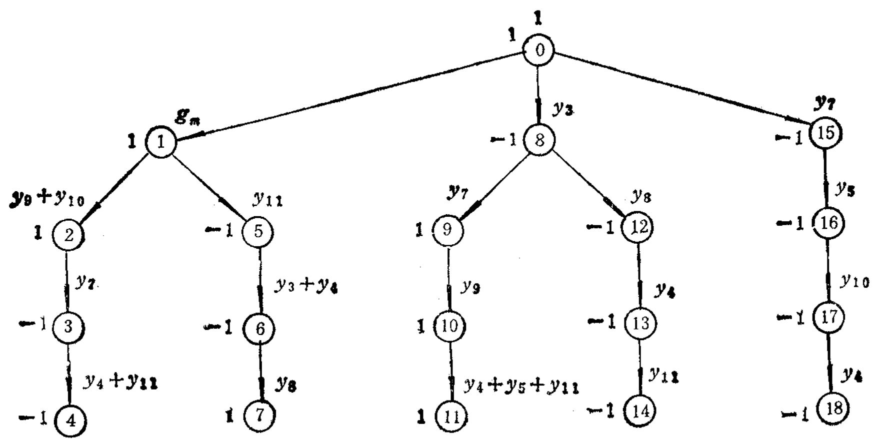

图2 $Y_{(ij)}$ 的状态空间树T

(双图)需时 $O(e)$. 如果T的节点数为 n_T,则变形双图法的计算时间复杂度为 $O(en_T)$.

五、结 论

本文提出的变形双图法的基本思想是通过双图中列点(或行点)标号的对换把四端双边变换成三端或二端双边，再分别短路和开路该双边，可以非常简单地确定所产生的变形短路双图的伴随符号因子,从而在分解 G^{ij} 和 Y^{ij} 的同时逐步解决了其符号计算问题(不必像文献[2—6]那样需要另外专门计算展开式各项的符号)，而且产生的展开式是多层多项式,形式比较紧凑,又不含对消项. 所以本法优于以前的各种求 $Y_{(ij)}$ 的图论方法. 进一步要研究的问题是如何把本法与超图理论结合起来，以扩大所能拓扑分析的网络规模. 这将在另一篇论文中介绍.

参 考 文 献

[1] 黄汝激,电子科学学刊, **7**(1985)2,81—91.
[2] S. J. Mason, *Proc. IRE*, **41** (1953), 1144—1156.
[3] C. L. Coates, *IRE Trans. on CT*, **CT-6**(1959), 170—187.
[4] W. Mayeda, Graph Theory, John Wiley and Sons, Inc.,(1972).
[5] 黄汝激,电子科学学刊, **7**(1985)4,254—266.
[6] 黄汝激,电子科学学刊, **8**(1986)5,335—342.
[7] 黄汝激,北京科技大学学报, **12**(1990)4,356—362.

THE MODIFIED DOUBLE-GRAPH METHOD FOR FINDING SYMBOLIC k-ORDER COFACTORS

Huang Ruji

(Beijing University of Science and Technology, Beijing 100083)

Abstract The concepts of k-order modified double-graphs and k-order modified matrices are introduced. By using them two new expressions of graph determinant C(Y) and k-order cofactor $Y_{(ij)}$ are deduced. Then the modified double-graph method is presented for finding symbolic k-order cofactors. By applying it a multi-layer expansion of $Y_{(ij)}$ can be found directly and efficiently (having no special sign evaluation poblem), and it produces no cancellation terms. Hence it is superior to the previous methods.

Key words Graph theory; Modified double-graph; Graph determinant; Symbolic k-order cofactor