

## 一种多谱线增强器<sup>1</sup>

邹红星 周小波 李衍达

(清华大学自动化系 智能技术与系统国家重点实验室 北京 100084)

**摘 要** 用奇异值分解界定信号和噪声子空间的困难之处, 在于有效秩的确定。过去常用的办法是采用固定的阈值确定有效秩, 尽管其物理意义明显, 但由于缺乏自适应性, 影响了子空间法在谱线增强中的应用。本文针对这一缺陷, 提出一种根据含噪谐波信号的时频分布, 用聚类方法确定有效秩的算法。仿真实验的结果表明了这种算法对一类多谱线增强问题非常有效。

**关键词** 奇异值分解, 子空间, 有效秩, 谱线增强, 短时 Fourier 变换

**中图分类号** TN911.7

### 1 引 言

谱线增强的目的是将谐波同宽带噪声分离开来。目前, 主要采用自适应滤波算法实现谱线增强。自适应谱线增强器最早是由 Widrow 等在研究自适应噪声抵销时提出来的。现在, 自适应谱线增强器和有关的自适应预测滤波器已广泛应用于瞬时频率估计、谱分析、窄带检测、语音编码等领域中<sup>[1]</sup>。

由于自适应滤波算法存在渐近收敛特性, 当量测数据较短时, 用自适应滤波增强后的谐波信号波形的起始部分误差非常显著。本文针对这一缺陷, 提出一种多谱线增强器, 其算法的核心思想是: 对含噪谐波的短时 Fourier 变换 (STFT) 进行奇异值分解 (SVD), 根据 STFT 所显示的谐波个数确定有效秩, 据此分离开信号和噪声子空间, 再用信号子空间重构出谐波信号。文中给出了用这种算法所得到的谱线增强结果。

### 2 信号子空间的低秩逼近

考虑具有如下形式的叠加波形

$$x(t) = s(t) + n(t), \quad (1)$$

其中  $n(t)$  是均匀分布的加性白噪声,  $s(t)$  是实值谐波

$$s(t) = \sum_{i=1}^p g_{\mu_i, \lambda_i}(t) \cos(\omega_i t + \phi_i), \quad (2)$$

上式中  $g_{\mu_i, \lambda_i}(t)$  是高斯包络,  $\phi_i$  是独立同分布的随机变量, 并在区间  $[-\pi, \pi]$  上均匀分布。定义  $x(t)$  的 STFT 为<sup>[1]</sup>

$$\text{STFT}_x(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) h^*(t-u) e^{-j2\pi f u} du, \quad (3)$$

<sup>1</sup> 1998-04-09 收到, 1999-06-21 定稿  
国家自然科学基金和国防重点实验室基金资助课题

其中  $h$  为归一化窗函数, 满足  $\|h\|^2 = 1$ . 由于 STFT 是一种线性变换, 显然有

$$\text{STFT}_x(t, f) = \text{STFT}_s(t, f) + \text{STFT}_n(t, f) \quad (4)$$

成立.

令  $\mathbf{A}_x = \text{STFT}_x(t, f)$ ,  $\mathbf{A}_s = \text{STFT}_s(t, f)$ ,  $\mathbf{A}_n = \text{STFT}_n(t, f)$ , 则有  $\mathbf{A}_x = \mathbf{A}_s + \mathbf{A}_n$ .  $\mathbf{A}_x$  的奇异值分解表示为<sup>[1]</sup>

$$\mathbf{U}^H \mathbf{A}_x \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_x & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

这里  $\mathbf{H}$  表示共轭转置,  $\boldsymbol{\Sigma}_x = \text{diag}(\sigma_{x_1}, \sigma_{x_2}, \dots, \sigma_{x_r})$ , 相应的奇异值满足  $\sigma_{x_1} \geq \sigma_{x_2} \geq \dots \geq \sigma_{x_r} \geq 0$ ,  $r = \text{rank}(\mathbf{A}_x)$ . 信号 / 噪声子空间分解, 就是用  $\mathbf{A}_x$  的低秩矩阵  $\mathbf{A}_{x_k}$  去逼近  $\mathbf{A}_s$ ,

$$\mathbf{A}_{x_k} = \mathbf{U} \boldsymbol{\Sigma}_{x_k} \mathbf{V}^H, \quad (6)$$

其中  $\boldsymbol{\Sigma}_{x_k}$  是通过在  $\boldsymbol{\Sigma}_x$  内令除去  $k$  个最大的奇异值以外的所有其它奇异值都等于零后得到的对角阵. 设  $\boldsymbol{\Sigma}_s = \text{diag}(\sigma_{s_1}, \sigma_{s_2}, \dots, \sigma_{s_r})$  为信号子空间的奇异值,  $\boldsymbol{\Sigma}_n = \text{diag}(\sigma_{n_1}, \sigma_{n_2}, \dots, \sigma_{n_r})$  为噪声子空间的奇异值, 并且有  $\sigma_{x_i} = \sigma_{s_i} + \sigma_{n_i}$ ,  $1 \leq i \leq r$ . 若噪声是独立同分布的, 则  $\sigma_{n_1} = \sigma_{n_2} = \dots = \sigma_{n_r}$ . 为有效地恢复信号的时频分布, 需要从  $\sigma_{x_i}$  中去除  $\sigma_{n_i}$ , 因此如何估计  $\sigma_{n_i}$ , 或等效地, 如何估计  $\boldsymbol{\Sigma}_x$  的有效秩, 即成为问题的关键. 不妨设估计出的有效秩为  $k$ , 则  $\sigma_{x_k}$  为一阈值, 前面的  $k$  个奇异值对应于信号子空间, 后面的  $r - k$  个奇异值对应于噪声子空间, 因此整个问题归结为如何有效地估计阈值  $\sigma_{x_k}$ , 以保证重构信号的精度.

为要解决此问题, 我们需要两个定理. 为简化计, 假定需研究的模型为

$$\omega_i = \theta_i + \delta z_i, \quad (7)$$

其中  $\delta > 0$  为噪声方差,  $z_i$  服从标准正态分布, 即  $z_i \sim N(0, 1)$ .

定义软阈值变换与硬阈值变换, 其中阈值  $\tau > 0$ .

**定义 1** 软阈值变换定义为

$$\eta_S(\omega, \tau) = \begin{cases} 0, & |\omega| \leq \tau, \\ \text{sgn}(\omega)(|\omega| - \tau), & |\omega| > \tau. \end{cases} \quad (8)$$

**定义 2** 硬阈值变换定义为

$$\eta_H(\omega, \tau) = \begin{cases} 0, & |\omega| \leq \tau, \\ \omega, & |\omega| > \tau. \end{cases} \quad (9)$$

前文述及的低有效秩重构信号的出发点显然是硬阈值变换, 因此本文仅讨论在硬阈值变换下的信号重构问题. 有关软阈值变换的理论分析, 本文不拟介绍.

**定义 3** 估计量的测度或称损失函数为

$$R(\hat{x}, x) = M^{-1} E \|\hat{x} - x\|_{2, M}^2, \quad (10)$$

其中  $M$  为采样点数,  $\|\cdot\|_{2, M}^2$  为  $L_2$  范数.

根据 Bickel<sup>[2]</sup> 和 Donoho<sup>[3]</sup> 的工作, 可知如下定理成立.

**定理 1** 设  $l_M$  为一逼近到  $\sqrt{2\log M}$  的阈值序列, 则硬阈值估计为  $\hat{\theta}_i = \omega_i \chi_{|\omega_i| > l_M} \delta$ , 其中  $\chi$  为特征函数,  $l_M \sim 2\log M$ , 并且

$$R(\hat{\theta}, \theta) \leq l_M \left\{ \delta^2 + \sum_{i=1}^M \min(\theta_i^2, \delta^2) \right\}, \quad (11)$$

这里  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_M)$ ,  $\hat{\theta}$  为  $\theta$  的估计.

设  $\hat{x}(t)$  为  $x(t)$  的估计. 计算  $x(t)$  的短时 Fourier 变换  $\text{STFT}_x(t, f)$ , 对所得到的时频分布作硬阈值变换, 然后通过短时 Fourier 逆变换得重构信号  $\hat{s}(t)$ , 因之有如下定理.

**定理 2**

$$R(\hat{x}, x) \leq (2\log M + 1) \left\{ \frac{\delta^2}{M} + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \min(\theta_i^2, \delta^2) \right\}. \quad (12)$$

**证明** 设  $\hat{\theta}$  为对  $\text{STFT}_x(t, f)$  所作的硬阈值变换结果, 则

$$\hat{x} = \text{ISTFT} \circ \hat{\theta} \circ \text{STFT}_x(t, f), \quad (13)$$

其中“ $\circ$ ”为映射或操作算子,  $\text{ISTFT}$  为短时 Fourier 逆变换.

根据 Parseval 等式, 有

$$E\|\hat{x} - x\|_{2,M}^2 = E\|\hat{\theta} - \theta\|_{2,M}^2, \quad (14)$$

再根据定理 1 即得 (12) 式成立.

证毕

定理 2 表明, 对  $\text{STFT}_x(t, f)$  作硬阈值变换 (当然这种硬阈值变换是通过正交分解进行的), 然后通过短时 Fourier 逆变换重构出的信号的均方差与  $O(\log M/M)$  同阶, 从而保证了重构信号的精度.

以上定理成立的基础是阈值  $\sqrt{2\log M}\delta$ , 而这个阈值是由极小极大准则<sup>[2]</sup>得到的. 诚然, 实际应用中的阈值的取法有多种; 在不同的准则下会得到不同的阈值. 后文介绍的秩 1 逼近, 就是一种硬阈值变换.

### 3 确定低秩逼近的聚类方法

信号 / 噪声子空间分解对于滤波等一类最小二乘问题应当是很有效的. 然而作者在数值计算时发现, 用一固定的阈值来确定有效秩  $k$ , 并不具有普适性. 对于滤波问题来说, 当有效秩过小时, 会损失信号的细节成份, 而当有效秩过大时, 又会发现重构的信号中包含有显著的高频噪声, 尤其是当信噪比 (SNR) 过低时, 这一现象就变得非常明显. 再者, 阈值的选取在很大程度上会受到主观因素的影响, 具有较大的不确定性. 由于均匀分布的白噪声的能量在时频面上趋于均匀分布, 而谐波在时频面上只集中于局部区域, 因而即使在信噪比很低的情况下, 也能容易地从噪声背景中辨认出谐波的分布<sup>[4]</sup>. 本文采用 STFT 作时频分析, 主要因为 STFT 是一种线性分布, 它不存在任何交叉项干扰. 尽管 Wigner-Ville 分布 (WVD) 较之 Wigner 分布减少了负频率引起的交叉项, 但不同信号成分间的交叉项干扰依然存在, 且其幅度为信号自项成分的两倍, 交叉项干扰变成了时频面上的占优分布, 这会严重影响对信号成分的解释. 从这个意义上来说, STFT 要比 WVD 优越. 另外, 在 STFT 时频面上辨认含噪信号中的谐波个数, 显然比在作为时频分布的边缘分布的功率谱上辨认谐

波个数, 其准确性要高得多. 虽然 STFT 的时频分辨率不及 WVD, STFT 不能分辨两个频率靠得很近的谐波成分, 然而在这种情况下, 这两个谐波成分的相关性很大, 能量比较集中, 对 STFT 作奇异值分解后, 则大的奇异值就反映了这种相关性很大且能量较集中的信号. 基于这一事实, 作者提出确定有效秩的聚类算法如下.

步骤 1 用 (3) 式计算  $x(t)$  的短时 Fourier 变换  $\text{STFT}_x(t, f)$ , 并令  $\mathbf{A}_x = \text{STFT}_x(t, f)$ ;

步骤 2 观察  $x(t)$  的时频分布, 确定其有几个主要频率分量, 并将主要频率分量数目记为  $N$ ;

步骤 3 计算  $\mathbf{A}_x$  的 SVD, 即  $\mathbf{U}^H \mathbf{A}_x \mathbf{V} = \text{diag}(\sigma_{x_1}, \sigma_{x_2}, \dots, \sigma_{x_M})$ ;

步骤 4 计算归一化奇异值

$$\bar{\sigma}_{x_i} = \sigma_{x_i} / \sigma_{x_1}, \quad (1 \leq i \leq M);$$

步骤 5 令  $\varepsilon$  为一小正数 (譬如  $\varepsilon = 0.005$ , 由计算机精度和 SVD 算法精度确定). 从  $\bar{\sigma}_{x_1}$  开始, 累计有多少个相邻奇异值的差值大于或等于  $\varepsilon$ , 即计算前一奇异值与后一奇异值的差  $|\bar{\sigma}_{x_i} - \bar{\sigma}_{x_{i+1}}|$ , 若该差值大于或等于  $\varepsilon$ , 则计数加 1, 否则计数加 0, 这一计数过程可表示为

$$C_\varepsilon(l) = \sum_{i=1}^l H(|\bar{\sigma}_{x_i} - \bar{\sigma}_{x_{i+1}}| - \varepsilon), \quad (l \leq M - 1),$$

其中  $H(\mu)$  为 Heaviside 函数, 即

$$H(\mu) = \begin{cases} 1, & \mu \geq 0; \\ 0, & \mu < 0. \end{cases}$$

步骤 6 若  $C_\varepsilon(l) = N$ , 则有效秩就定为  $k = l$ , 即  $k = \min_l \{C_\varepsilon(l) \geq N\}$ , 并终止计数过程.

事实上, 在步骤 3 中既可用全部 STFT 数据计算 SVD, 也可只用对应于正频率 (或负频率) 的 STFT 数据计算 SVD. 作者发现并证明了它们的差别仅在于, 用全部 STFT 数据 (实部) 计算得到的奇异值, 比仅用一半数据 (实部) 计算得到的奇异值大  $\sqrt{2}$  倍, 但不影响步骤 4 中归一化的结果; 然而在确定参数  $\varepsilon$  的值时, 需要考虑这一差别. 不过, 当用复值 STFT 数据时, 奇异值的这种数量关系并不成立; 但用全部复值 STFT 数据计算, 所得到的奇异值会成对出现, 每一对奇异值之间相差很小 (这是由 STFT 的特殊结构引起的). 显然, 每一对奇异值反映了信号中的一个频率分量, 因此作者将这种奇异值成对出现的现象称为“聚类”现象. 有关更一般的矩阵延拓对奇异值和奇异向量的影响的定性和定量分析, 作者将另有文章报道.

确定出有效秩  $k$  后, 用 (6) 式计算逼近矩阵  $\mathbf{A}_{x_k}$ , 并令  $\text{STFT}'_x(t, f) = \mathbf{A}_{x_k}$ . 剩下的问题是如何由  $\text{STFT}'_x(t, f)$  重构出信号  $s(t)$  的估计  $\hat{s}(t)$ . 如果  $\text{STFT}'_x(t, f)$  确实是某一物理信号的 STFT, 则可用滤波器组求和或重叠相加法<sup>[5,6]</sup>精确地重构出信号  $\hat{s}(t)$ , 否则这两种方法的应用就会受到限制. 利用最小均方误差准则, 得<sup>[5,6]</sup>

$$\hat{s}(t) = \frac{1}{\|h\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{STFT}'_x(u, f) h(u-t) e^{j2\pi ft} du df. \quad (15)$$

与基于 Cohen 类双线性时频分布的信号重构方法相比, (15) 式所示的信号重构方法省去了相位优化过程, 这是因为 STFT 保留了原信号的相位信息, 而 Cohen 类的双线性时频分布则舍弃了相位信息。

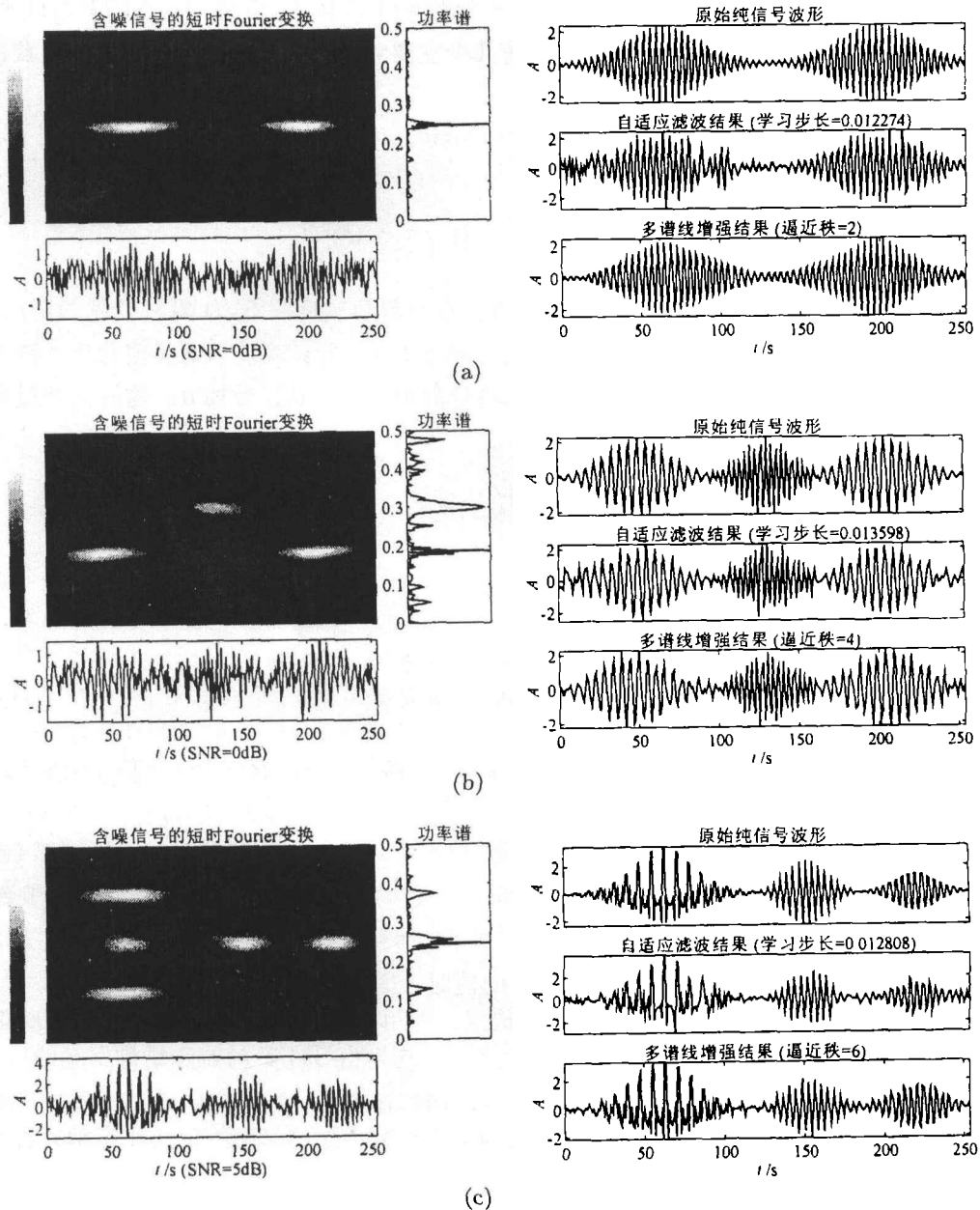


图 1 实验信号的时频分布及基于 SVD 低秩逼近的谱线增强

#### 4 仿真实例

实验信号由 (1) 式和 (2) 式产生。在一般的基于子空间法的滤波文献中, 均明确地或隐含地假定含噪信号具有较高的信噪比。为了评价上一节中所提出的算法的性能, 作者有意识

地使用了较低的信噪比。图 1 给出了三种含噪信号的时域波形、STFT、功率谱密度, 以及用本文提出的算法所得到的谱线增强结果。图的左半部分显示出叠加了均匀分布的白噪声的谐波信号波形, 相应的 STFT 和功率谱密度估计。右半部分显示了未叠加噪声的谐波信号波形、自适应谱线增强结果和用本文提出的算法所得到的谱线增强结果。为不失一般性, 信号的采样频率均归一化成 1Hz。对于自适应谱线增强来说, 学习步长对其影响很大, 要获得满意的谱线增强效果, 需采用较小的学习步长, 但学习时间明显增加。从图中不难看出, 用本文提出的算法所得到的谱线增强结果, 具有很好的幅度保持特性。其中, 图 1(a) 中含噪谐波的 SNR=0 dB, 参数  $N=1$ , 有效秩  $k=2$ , 谱线增强后的谐波的 SNR 比含噪谐波提高了 14.21 dB; 图 1(b) 中含噪谐波的 SNR=0 dB, 参数  $N=2$ , 有效秩  $k=4$ , 谱线增强后的谐波的 SNR 比含噪谐波提高了 11.11dB; 图 1(c) 中含噪谐波的 SNR=5 dB, 参数  $N=3$ , 有效秩  $k=6$ , 谱线增强后的谐波的 SNR 比含噪谐波提高了 9.17 dB。作为对比, 作者还分别设计了 4 阶最小均方误差自适应 FIR 谱线增强器 (其中学习步长定为相关噪声自相关矩阵的最大特征值的倒数的 0.1 倍, 遗忘因子置为 0.0), 相应的谱线增强结果也在图 1 中给出, 自适应谱线增强后的谐波的 SNR 分别提高了 7.77 dB、9.74 dB 和 5.21 dB。注意到图中自适应谱线增强结果的起始部分的误差均很大。

## 5 结束语

奇异值分解是基于子空间滤波技术中的一种常用方法, 但采用固定的阈值确定有效秩缺乏足够的适应性, 也没有充分利用信号的时频信息。对含噪信号的 STFT 进行奇异值分解, 然后根据 STFT 所提供的时频信息, 对奇异值进行聚类, 每一类中的奇异值对应于一个频率分量; 亦如根据直方图确定阈值一样, 聚类数目反映的是时频分布集中的区域数目。这种方法利用了信号的时频信息, 对不同的谐波信号具有一定的适应性。需要指出的是, 本文的目的是要指出本文所提出的谱线增强方法的可行性, 而无意于表明该方法比其它方法优越。事实上, 作为滤波问题的一种特例, 本文提出的方法只对增强淹没于噪声中的谐波问题有效。当信号成份变得复杂时, 譬如线性调频信号, 由于无法确定有多少个主要频率分量, 因此本文提出的方法就不再适用。然而作者所进行的数值实验结果表明, 当信噪比较低, 并且淹没于噪声中的信号为一类具有较大调频率的线性调频信号时, 无论有效秩取何值, 都不能将信号和噪声子空间分开。如何处理这类问题, 可参阅文献 [7]。

## 参 考 文 献

- [1] 张贤达. 现代信号处理. 北京: 清华大学出版社, 1995, 197-202.
- [2] Bickel P J. Minimax Estimation of a Normal Mean Subject to Doing Well at a Point. In: Rizvi M H, Rustagi J S, Siegmund, eds. Recent Advances in Statistics. NY: Academic Press, 1983, 511-528.
- [3] Donoho D L, Johnstone I M. Ideal spatial adaption by wavelet shrinkage. *Biometrika*, 1994, 81(3): 425-455.
- [4] Qian S, Chen D. Joint Time-Frequency Analysis. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc., 1996, 6-7.
- [5] Griffin D W, Lim J S. Signal estimation from modified short-time Fourier transform. *IEEE Trans. on Acoust., Speech, Sig., Proc.*, 1984, ASSP-32(4): 236-243.
- [6] Nawab S H, Quatieri T F. Short-Time Fourier Transform. In: Lim J S, Oppenheim A V, eds. Advanced Topics in Signal Processing. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1988, 289-337.

- [7] 邹红星, 李衍达. 基于时频面旋转的线性调频信号增强. 清华大学学报(自然科学版), 1999, 39(7): 103-106.

## A MULTIPLE LINE ENHANCER

Zou Hongxing    Zhou Xiaobo    Li Yanda

(*Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084*)

**Abstract** A general difficulty of using singular value decomposition(SVD) to split signal and noise subspaces is in the right choice of effective rank. The commonly used method toward this end is to use a fixed threshold. Yet despite its apparent physical significance, the lack of adaptability has strongly limited the popularity of subspace approach in line enhancement. In order to surmount this drawback, a cluster method based algorithm for determining the effective rank is proposed in accordance with the *a priori* information obtained from the time-frequency distribution of the noisy sinusoids. Simulation results show that the methodology advocated is effective for solving a class of multiple line enhancement problems.

**Key words** Singular value decomposition, Subspace, Effective rank, Line enhancement, Short-time Fourier transform

邹红星: 男, 1966年生, 博士生, 主要从事信号处理与模式识别研究.

周小波: 男, 1967年生, 博士后, 主要从事通信、信号处理与模式识别研究.

李衍达: 男, 1936年生, 中科院院士, 教授, 清华大学信息科学与技术学院院长, 清华大学生物信息学研究所所长, 校学术委员会主任, 主要从事信号处理理论、地震勘探数据处理与生物信息学研究.