

## 混沌系统的动态神经网络自适应控制

谭文\*\*\* 王耀南\*\*

\*(湖南科技大学信息系 湘潭 411201)

\*\* (湖南大学电气与信息工程学院 长沙 410082)

**摘要:** 针对混沌系统模型误差, 该文提出一种非线性鲁棒自适应辨识和控制新方法, 目标是通过下面两个步骤将混沌系统镇定到不动点: 首先利用动态神经网络对系统进行辨识, 然后在辨识估计基础上设计控制器将混沌状态引导至期望目标位置; 并且对系统的稳定性能进行了严格数学分析; Duffing 方程的数值仿真实验证明了所提出方法的有效性。

**关键词:** 混沌系统, 神经网络, 辨识, 自适应控制, 鲁棒性

**中图分类号:** TP273.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-5896(2005)01-0143-03

## Adaptive Control of Unknown Chaotic System via Dynamic Neural Networks

Tan Wen\*\*\* Wang Yao-Nan\*\*

\*(Dept of Info, Hunan Univ. of Sci. and Tech., Xiangtan 411201, China)

\*\* (College of Electrical and Info. Eng., Hunan University, Changsha 410082, China)

**Abstract** A new robust adaptive identification-based control of chaotic system with uncertain parameters in view of modeling error is proposed in this paper. The objective is to adjust the unknown chaos to a fixed point. It is fulfilled by taking following two steps: a dynamical neural network is used as system identifier, then a controller based on identification estimates is established to direct the chaos states towards desired target. Also, rigorous mathematical proof is given to analyze the stability properties of the system. Finally, the effectiveness of the proposed method is demonstrated by the Duffing equation.

**Key words** Chaotic system, Neural networks, Identification, Adaptive control, Robustness

### 1 引言

混沌系统的辨识、同步和控制是当今工程、物理、数学和生物医学等众多领域研究的热点课题之一<sup>[1]</sup>。目前采用一些基于精确模型方法和技术成功实现混沌控制已有报道<sup>[2-4]</sup>。然而当混沌系统只是部分信息已知, 例如, 其微分方程已知但其中某些参数不确定时, 上述方法就没有效了。最近采用自适应策略对混沌系统进行控制可以解决模型不确定性问题<sup>[5]</sup>。

一般地, 不确定混沌系统是属于某类非线性特性的黑匣子, 因此基于非模型方法适合此类问题。利用神经控制器处理不确定混沌系统不失为一种良策, 本文研究了利用动态神经网络控制不确定混沌系统问题。首先用动态神经网络作辨识器, 再在此基础上设计控制器将不确定混沌系统调整到不动点。同时考虑了由于模型误差不可避免存在破坏系统特性问题, 分析研究表明整个系统的稳定性可以得到保证。Duffing 方程数值仿真实验证明了所提出方法是有效的。

### 2 问题描述和神经网络模型

一般连续混沌系统可用下式描述:

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (1)$$

其中  $x \in R^n$  为系统可量测状态,  $u \in R^n$  是已知控制作用, 而  $f(\cdot): R^{n+n+1} \rightarrow R^n$  是描述系统动态特性不确定光滑函数。自适应状态调整问题可归结为通过状态反馈控制将系统从给定初态引导至零点。然而, 由于  $f$  是完全未知的, 所以为了解决这个问题, 首先必须给不确定对象建立较为精确的数学模型。为达到此目的, 本文采用动态神经网络为系统建立辨识模型。动态神经网络是指具有非约束连接, 处理单元由动态元件组成的网络, 该网络可由微分方程描述<sup>[6]</sup>:

$$\dot{x}_N = Ax_N + w\sigma(x_N) + w_{n+1}\phi(x_N)u \quad (2)$$

$x_N \in R^n, A \in R^{n \times n}$  是 Hurwitz 矩阵, 为简单起见, 可取为对角阵,  $u \in R^n$  是控制作用,  $w \in R^{n \times n}$  是可调权值矩阵,  $w_{n+1}$  为  $n \times n$  可调对角型权值矩阵  $w_{n+1} = \text{diag}[w_{1,n+1}, w_{2,n+1}, \dots, w_{n,n+1}]$  而  $\sigma(\cdot)$  和  $\phi(\cdot)$  是表征非线性状态反馈特性的 S 型函数  $\sigma(x_{Ni}) = k/(1 + e^{-\alpha x_{Ni}}), \phi(x_{Ni}) = k/(1 + e^{-\alpha x_{Ni}}) + \beta, i = 1, 2, 3, \dots, n$ 。其

中  $k, \alpha$  分别是幅值和斜率参数, 且  $\beta$  为大于零的常数, 可保证对  $i=1, 2, 3, \dots, n$ , 均有  $\phi(x_{Ni}) > 0$ 。不失一般性, 假设不确定系统式(1)可由动态神经网络模型式(2)及模型误差  $\Delta(x, u)$  表示, 即存在权值  $w^*, w_{n+1}^*$  (分别为  $w, w_{n+1}$  的优化值), 使系统式(1)表示为

$$\dot{x} = Ax + w^* \sigma(x) + w_{n+1}^* \phi(x)u + \Delta(x, u) \quad (3)$$

对于模型误差项, 我们作如下假设:

**假设 1**  $|\Delta(x, u)| \leq k_1 + k_2(|x| + |u|)$ ,  $k_1, k_2$  是已知正的常数。

这样状态调整问题便可用系统式(3)代替式(1)进行分析, 由于  $w^*, w_{n+1}^*$  未知, 我们设计控制律  $u(w, w_{n+1}, x)$  以及权值学习律  $w, w_{n+1}$  保证状态  $x$  有界并且在一定条件下收敛到零。

### 3 鲁棒性分析

取时间连续函数  $\varphi(x)$ , 其导数为  $\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} [Ax + w^* \sigma(x) + w_{n+1}^* \phi(x)u + \Delta(x, u)]$ 。

**定义**

$$\Omega = \frac{\partial \varphi}{\partial x} Ax + \frac{\partial \varphi}{\partial x} w \sigma(x) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} w_{n+1} \phi(x)u - \dot{\varphi} \quad (4)$$

其中  $w, w_{n+1}$  分别是  $w^*, w_{n+1}^*$  估计值, 可通过后面设计的学习律获取。由于  $\dot{\varphi}$  未知, 上面信号不能测量出来, 因此我们采用误差滤波理论:

$$\dot{e} + re = -\dot{\varphi} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} [Ax + w \sigma(x) + w_{n+1} \phi(x)u] \quad (5)$$

$r$  是严格正的常数, 为了利用式(5), 令

$$e = \xi - \varphi \quad (6)$$

根据式(6), 式(5)可重写为

$$\dot{\xi} + r\xi = r\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x} [Ax + w \sigma(x) + w_{n+1} \phi(x)u] \quad (7)$$

其中状态  $\xi \in R$ 。进一步, 如果取  $\varphi(x) = \frac{1}{2}|x|^2$ , 则式(7)变为

$$\dot{\xi} = -r\xi + r\varphi + x^T Ax + x^T w \sigma(x) + x^T w_{n+1} \phi(x)u \quad (8)$$

现在考虑 Lyapunov 函数:

$$v = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}\text{tr}\{\tilde{w}^T \tilde{w}\} + \frac{1}{2}\text{tr}\{\tilde{w}_{n+1}^T \tilde{w}_{n+1}\} \quad (9)$$

其中  $\tilde{w} = w - w^*, \tilde{w}_{n+1} = w_{n+1} - w_{n+1}^*$ , 对  $v$  求导数, 得

$$\dot{v} = e\dot{e} + \text{tr}\{\dot{\tilde{w}}^T \tilde{w}\} + \text{tr}\{\dot{\tilde{w}}_{n+1}^T \tilde{w}_{n+1}\} \quad (10)$$

利用式(4), 式(10)最后可变成

$$\begin{aligned} \dot{v} = & -re^2 + ex^T \tilde{w} \sigma(x) + ex^T \tilde{w}_{n+1} \phi(x)u \\ & - ex^T \Delta(x, u) + \text{tr}\{\dot{\tilde{w}}^T \tilde{w}\} + \text{tr}\{\dot{\tilde{w}}_{n+1}^T \tilde{w}_{n+1}\} \end{aligned} \quad (11)$$

令

$$\text{tr}\{\dot{\tilde{w}}^T \tilde{w}\} = -ex^T \tilde{w} \sigma(x) \quad (12)$$

$$\text{tr}\{\dot{\tilde{w}}_{n+1}^T \tilde{w}_{n+1}\} = -ex^T \tilde{w}_{n+1} \phi(x)u \quad (13)$$

则有

$$\begin{aligned} \dot{v} = & -re^2 - ex^T \Delta(x, u) \leq -r|e|^2 + |e||x||\Delta(x, u)| \\ \leq & -r|e|^2 + k_1|e||x| + k_2|e||x|^2 \end{aligned} \quad (14)$$

容易证明式(12)、式(13)写成元素形式为

$$\dot{w}_{ij} = -ex_i \sigma(x_j) \quad (15)$$

$$\dot{w}_{i,n+1} = -ex_i \phi(x_j) u_i \quad (16)$$

从后面分析可知, 不等式(14)成立是显而易见的。为作进一步研究, 引入下面引理:

**引理 1 控制律**

$$u = -[w_{n+1} \phi(x)]^{-1} [w \sigma(x) + \theta] \quad (17)$$

$$\theta = \frac{1}{2}rx + Ax \quad (18)$$

在  $\xi(0) < 0$  条件下可保证  $\xi(t) \leq 0, \forall t \geq 0; \lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = 0$ 。其中权值  $w, w_{n+1}$  的估计值可分别按式(15)和式(16)调整。

**证明** 利用控制律式(17)和式(18), 式(8)变为

$$\dot{\xi} = -r\xi, \quad \forall t \geq 0$$

这是一个齐次微分方程, 其解为  $\xi(t) = \xi(0)e^{-rt}$ , 因此若取  $\xi(t)$  的初值  $\xi(0)$  小于零, 便有  $\xi(t) \leq 0, \forall t \geq 0$  而且  $\xi(t)$  以指数形式快速收敛至零。证毕

为了利用控制律式(17), 式(18), 必须保证  $[w_{n+1} \phi(x)]^{-1}$  存在, 由于  $\phi(x_i) > 0, \forall i=1, 2, \dots, n$ , 我们只需确保  $w_{i,n+1} \neq 0, \forall t \geq 0, \forall i=1, 2, \dots, n$  所以采用投影算法<sup>[7, 8]</sup>将  $w_{i,n+1}(t)$  限制到集合  $w' = \{w_{i,n+1} : 0 < \varepsilon_1 \leq w_{i,n+1} \leq \varepsilon_2\}$ , 其中  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  为选取的合适正数, 特别地, 可将式(16)定义的学习律修改为

$$\dot{w}_{i,n+1} = \begin{cases} -ex_i \phi(x_j) u_i, & w_{i,n+1} \in w' \text{ 或 } w_{i,n+1} \text{sgn}(w_{i,n+1}^*) = \varepsilon_1, \\ & ex_i \phi(x_j) u_i \text{sgn}(w_{i,n+1}^*) \leq 0 \\ 0, & w_{i,n+1} \text{sgn}(w_{i,n+1}^*) = \varepsilon_1, \\ & ex_i \phi(x_j) u_i \text{sgn}(w_{i,n+1}^*) > 0 \\ -ex_i \phi(x_j) u_i, & w_{i,n+1} \in w' \text{ 或 } w_{i,n+1} \text{sgn}(w_{i,n+1}^*) = \varepsilon_2, \\ & ex_i \phi(x_j) u_i \text{sgn}(w_{i,n+1}^*) \geq 0 \\ 0, & w_{i,n+1} \text{sgn}(w_{i,n+1}^*) = \varepsilon_2, \\ & ex_i \phi(x_j) u_i \text{sgn}(w_{i,n+1}^*) < 0 \end{cases} \quad (19)$$

$i, j = 1, 2, \dots, n$ 。

下面引理详细阐述投影算法特性

**引理 2** 学习律式(16)及利用投影方法修改之后的学习律式(19)可使  $\dot{v}$  更负, 而且如果  $w_{i,n+1}(0) \in w'$  且  $w_{i,n+1}^* \in w'$  可保证  $w_{i,n+1} \in \varepsilon_2$ , 其中  $i=1, 2, \dots, n$ 。

理论上, 只要  $w_{i,n+1}$  在集合  $w'$  内或在  $\delta(w')$  边界上, 按投影算法式(16)的修改式  $\dot{w}_{i,n+1}$  并不会改变其特性。利用引理 1, 有  $|\xi(t)| \leq |e(t)|, \forall t \geq 0$ , 又  $\varphi = \xi - e$  且  $\varphi(x) = \frac{1}{2}|x|^2$ , 因此  $|x|^2 \leq 2|e|$  或者  $|x| \leq 2\sqrt{|e|}$  所以

$$\dot{v} \leq -(r - 4k_2)|e|^2 + 2k_1|e|\sqrt{|e|} \leq -[(r - 4k_2)\sqrt{|e|} + 2k_1]|e|\sqrt{|e|} \quad (20)$$

**定理 1** 如果  $r > 4k_2$ , 闭环系统:

$$\begin{aligned} \dot{x} = & Ax + w^* \sigma(x) + w_{n+1}^* \phi(x)u + \Delta(x, u), \quad \dot{\xi} = -r\xi, \\ u = & -[w_{n+1} \phi(x)]^{-1} [w \sigma(x) + \theta], \quad \theta = \frac{1}{2}rx + Ax, \quad e = \xi - \varphi, \\ \varphi(x) = & \frac{1}{2}|x|^2 \text{ 及权值学习律 } \dot{w}_{ij} = -ex_i \sigma(x_j), \end{aligned}$$

$$\dot{w}_{i,n+1} = \begin{cases} -ex_i\phi(x_i)u_i, & w_{i,n+1} \in W' \text{ 或 } w_{i,n+1} \operatorname{sgn}(w_{i,n+1}^*) = \varepsilon_1, \\ & ex_i\phi(x_i)u_i \operatorname{sgn}(w_{i,n+1}^*) \leq 0 \\ 0, & w_{i,n+1} \operatorname{sgn}(w_{i,n+1}^*) = \varepsilon_1, \\ & ex_i\phi(x_i)u_i \operatorname{sgn}(w_{i,n+1}^*) > 0 \\ -ex_i\phi(x_i)u_i, & w_{i,n+1} \in W' \text{ 或 } w_{i,n+1} \operatorname{sgn}(w_{i,n+1}^*) = \varepsilon_2, \\ & ex_i\phi(x_i)u_i \operatorname{sgn}(w_{i,n+1}^*) \geq 0 \\ 0, & w_{i,n+1} \operatorname{sgn}(w_{i,n+1}^*) = \varepsilon_2, \\ & ex_i\phi(x_i)u_i \operatorname{sgn}(w_{i,n+1}^*) < 0 \end{cases}$$

$i, j = 1, 2, \dots, n$ , 可保证  $|e| < \frac{4k_1^2}{(r-4k_2)^2}$ ,  $|x| < \frac{4k_1}{r-4k_2}$ 。其中  $\Delta(x, u)$  满足假设 1。

证明 注意当  $\sqrt{|e|} > \frac{2k_1}{r-4k_2}$  或者  $|e| > \frac{4k_1^2}{(r-4k_2)^2}$  其中  $r > 4k_2$  时, 从式 (20) 得  $\dot{v} \leq 0$ 。上述分析及  $|x| \leq 2\sqrt{|e|}$  的事实表明, 只要  $E = \left\{ e(t) : |e(t)| \leq \frac{4k_1^2}{(r-4k_2)^2} \right\}$  且

$X = \left\{ x(t) : |x(t)| \leq \frac{4k_1}{r-4k_2} \right\}$  则  $e(t)$  和  $x(t)$  一致有界而且  $x(t)$  和  $e(t)$  的轨迹将最终收敛到上面区域并稳定下来。证毕

定理 1 并没有涉及到  $w$  的有界性, 为避免学习过程中  $w$  不稳定, 可利用投影算法将权值  $w$  的估计值限制在集合  $W = \{w : \|w\| \leq \varepsilon_2\}$  内, 特别地, 标准学习律式(15) 可以修改为

$$\dot{w} = \begin{cases} -ex\sigma^T(x), & w \in W \text{ 或 } \|w\| = \varepsilon_2, \\ & \operatorname{tr}\{ex\sigma^T(x)w\} \geq 0 \\ -ex\sigma^T(x) + P, & \|w\| = \varepsilon_2, \operatorname{tr}\{ex\sigma^T(x)w\} < 0 \end{cases} \quad (21)$$

式中  $P = \operatorname{tr}\{ex\sigma^T(x)w\} \left( \frac{1 + \|w\|}{\varepsilon_2} \right)^2 w$ 。所以, 只要选取初始值  $\|w(0)\| \leq \varepsilon_2$ , 则  $\frac{d}{dt}(\|w\|^2) \leq 0$ , 这可使权值  $w$  集中在球  $\{w : \|w\| \leq \varepsilon_2\}$  内。

#### 4 仿真结果

为了证明神经辨识器及基于辨识估计值的控制器的有效性, 本节利用 Duffing 振子进行数值仿真试验。Duffing 方程用来描述非线性电路以及许多机械问题中的硬性弹簧作用效果<sup>[3]</sup>, 其方程形式为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_1 \\ \dot{x}_2 = -p_1x_1 - p_2x_1^3 - p_3x_2 + q \cos(\omega t) + u_2 \end{cases} \quad (22)$$

$p_1, p_2, p_3, q$  和  $\omega$  为常数,  $u = [u_1, u_2]^T$  是控制作用。系统式(22) 在未受控制时可以表现出周期和混沌行为。当  $p_1 = 1.1, p_2 = 1, p_3 = 0.4, q = 2.1, \omega = 1.8$  时出现混沌状态, 为了辨识这个二维动力系统, 利用动态神经网络式(2)给系统建模。仿真过程  $A = \operatorname{diag}(-15, -15)$ ,  $w, w_{n+1}$  取  $2 \times 2$  矩阵, 即  $w_{11} = w_{12} = w_{21} = w_{22} = 0.1, w_{1,n+1} = w_{2,n+1} = 1.0$ 。函数  $\sigma(\cdot), \phi(\cdot)$

中参数选取  $k = 2, \alpha = 1, \beta = 0.05$ , 初始值  $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}$ 。对应辨识仿真结果如图 1 所示, 图 2 是给系统加入控制作用后状

态响应曲线, 从试验结果可以发现  $x_1, x_2$  正如所期望的一样快速收敛到零。

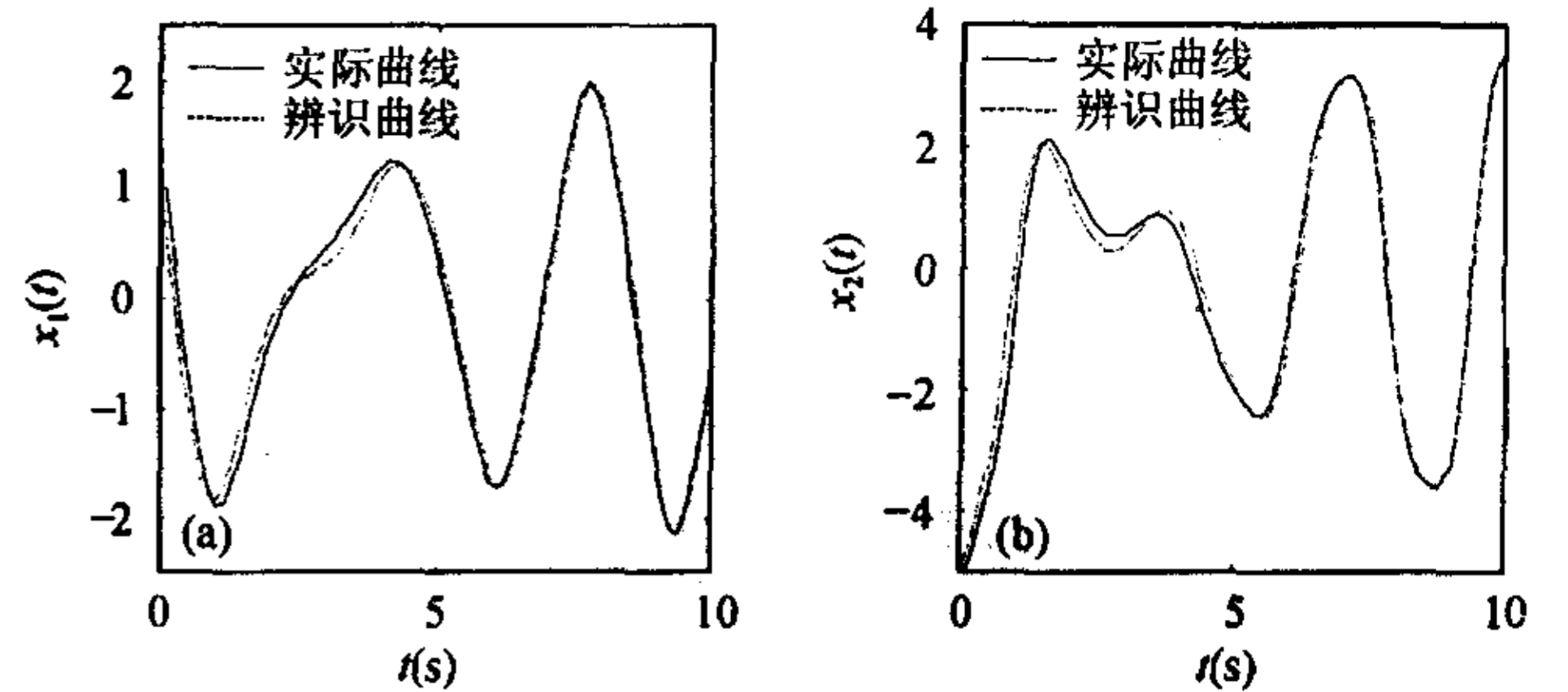


图 1 系统状态  $x_1$  和  $x_2$  辨识结果

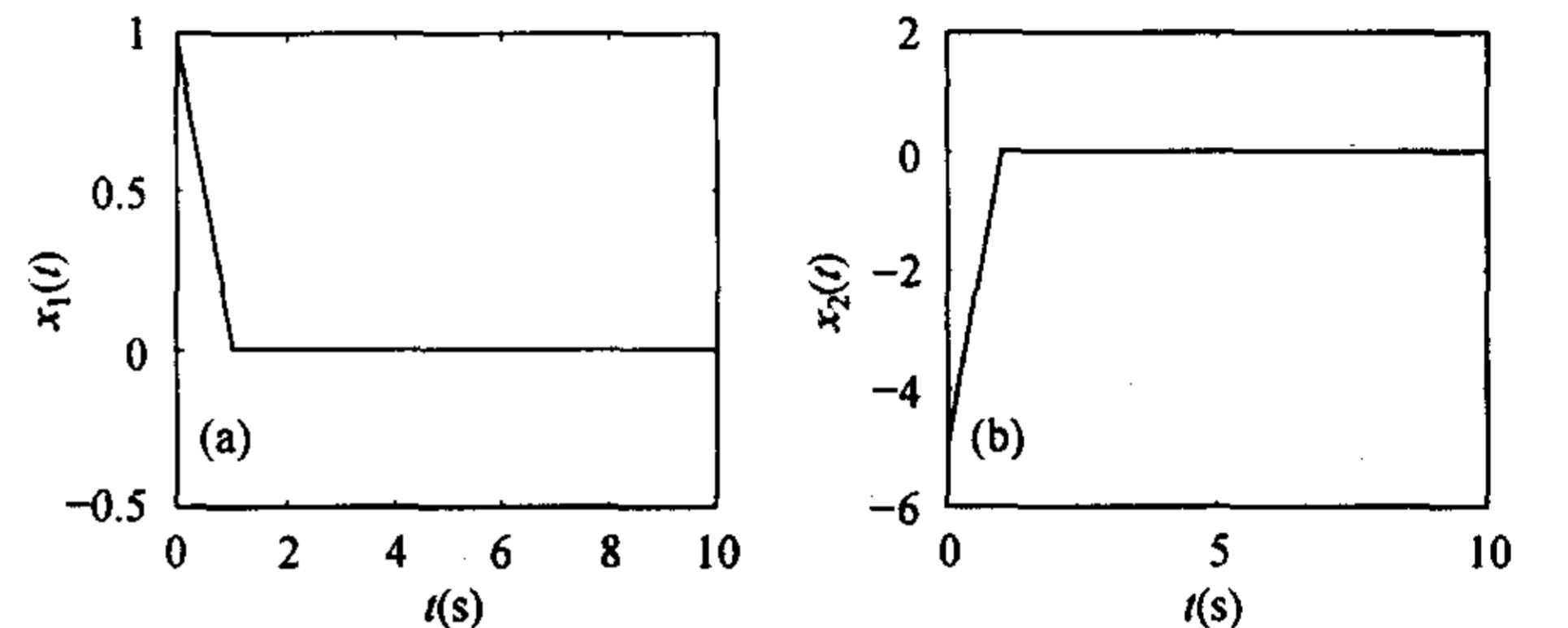


图 2 加入控制作用后系统响应曲线

#### 5 结论

本文研究了利用动态神经网络给不确定混沌系统建立辨识模型, 然后实施控制的新方法。同时从实际应用出发, 对自适应控制器的鲁棒特性进行了分析, 考虑系统存在模型误差, 对权值学习律作适当修改可保证闭环系统所有信号的有界性。仿真结果表明所设计的基于神经辨识器的控制效果十分理想。

#### 参 考 文 献

- [1] Chen G. Controlling Chaos and Bifurcations in Engineering System. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 1999: 1 - 68.
- [2] Chen G, Dong X. Identification and control of chaotic systems: an artificial neural network approach. In: Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Syst., Seattle, 1995: 1177 - 1182.
- [3] Nijmeijer.H, Berghuis H. On Lyapunov control of the Duffing equation. *IEEE Trans. on Circuits and Syst.*, 1995, 42 (8): 473 - 477.
- [4] Gallegos J A. Nonlinear regulation of a Lorenz system by feedback linearization techniques. *Dynamic Contr.*, 1994, 4(3): 277 - 298.
- [5] Loria A, Panteley E, Nijmeijer H. Control of the chaotic Duffing equation with uncertainty in all parameters. *IEEE Trans. on Circuits and Sys.*, 1998, 45(12): 1252 - 1255.
- [6] Rovithakiss G A, Christodoulou M A. A robust direct adaptive regulation architecture using dynamic neural network models. *IEEE World Congress on Computational Intelligence*, San Diego, CA, 1994: 1110 - 1115.
- [7] Narendra K S, Annaswamy A M. Stable Adaptive Systems. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1989: 238 - 289.
- [8] Ioannou P A, Datta A. Robust adaptive control: design, analysis and robustness bounds, in *Foundations of Adaptive Control*, Kokotovic.P.V ed., Berlin, Springer-Verlag, 1991: 71 - 152.

谭 文: 男, 1968 年生, 博士生, 副教授, 研究方向为混沌控制、智能控制理论与应用。  
王耀南: 男, 1957 年生, 博士后, 教授, 博士生导师, 主要从事机器人控制、智能控制、图像处理。