第9卷 第2期　　电子科学学刊　　Vol. 9, No. 2
1987年3月　　JOURNAL OF ELECTRONICS　　Mar., 1987

卷积核谱零点的剔除

孔 凡 年
(中国科学院电子学研究所)

提　　要

本文进一步讨论了作者(1986)提出的双Δ函数逆问题,并提出了剔除卷积核谱零点的具体做法.

一、引　　言

考虑卷积方程:

$$f * h = g + n,$$

式中,f 为卷积核,$g + n$ 为带误差的输出测量值,均为已知;h 为待求. f、h、g和 n 为离散时域有限信号,符号“$*$”表示线性卷积.

文献[1—3]中已证明:当 f 的 DFT 谱有零点时,上述方程仍然有解. 在文献[2]中,特别定义了方程(1)的双Δ函数逆. 本文进一步讨论双Δ函数逆的问题,并提出剔除卷积核谱零点的具体做法.

二、零点全位于 Z 平面单位圆上的信号的双Δ函数逆

信号的多项式表示可定义如下:设某信号 f 的各元值为 $a_0, a_1, a_2 \cdots a_{l-1}$,则其多项式表示为

$$f(g) = \sum_{n=0}^{l-1} a_n z^n.$$

显而易见,f 的以 k 为周期的 DFT 谱有零点的情况,对应于 $f(z)$ 在Z平面单位圆上 $e^{-jm2\pi/k}$ 处有零点的情况.

引理　$f(z) = 1 - z^M$ 的零点遍布于单位圆上 $e^{-jm2\pi/M}$ 处 $(m = 0, 1, \cdots, M-1)$

引理的证明是显而易见的,现仅讨论 $f(z)$ 所对应的时域信号.

(1) 对于非周期信号的情况,则根据逆Z变换,$f(z) = 1 - z^M$ 对应幅度为1和-1其间有 $M-1$ 个零元的一对Δ函数;

(2) 对于周期信号的情况,即令 $e^{-j\frac{n2\pi}{N}}$ 代替 z 的情况,此时若 $N = M$,则 $f(z) = 1 - z^M = 0$,对应的时域信号为恒零元;

(3) 若 $N = 2M$，则 $f(z) = 1 - e^{-jm\pi}$，根据逆 DFT，对应的时域信号是周期为 N 且每周期内含幅度为 1 和 -1、其间有 $M-1$ 个零元的一对Δ函数.

在以下讨论中，我们设信号 f、h、g 的时域长度均小于 M；并设 $N = 2M$ 为执行 DFT 或循环卷积时的周期.

根据上述引理以及双Δ函数逆的定义[2]，我们可得出下述结论.

若 $f(z)$ 的零点全位于单位圆上 $e^{-jm2\pi/M}$ 处，则 $f(z)$ 的以 $N = 2M$ 为周期的双Δ函数逆 $f^{-1}(z)$ 满足

$$f^{-1}(z)f(z) = 1 - z^M,$$

即 $f(z)$ 和 $f^{-1}(z)$ 的零点之和遍布 $e^{-jm2\pi/M}$，$(m = 0, 1, \cdots, M-1)$.

由于任意实系数多项式的零点成共轭对分布，因此从上述结论可推演得下述定理.

定理　设某时域有限函数 f 的 DFT 谱仅有一对共轭零点位于实频率轴上 $\pm m_1 2\pi/M$ 处，并设 $\theta = m_1 2\pi/M$ 以及 $m_1 \neq 0$，则其双Δ函数逆 f^{-1} 的各元值为 $\sin n\theta/\sin\theta$，$(n = 1, \cdots, M-1)$.

证明　按等比级数求和法则，

$$\sum_{m=0}^{M-1} (ze^{j\theta})^m = \frac{1-(ze^{j\theta})^M}{1-ze^{j\theta}} = \frac{1-z^M}{1-ze^{j\theta}}.$$

同理可得：

$$\sum_{m=0}^{M-1} (ze^{-j\theta})^m = \frac{1-z^M}{1-ze^{-j\theta}}. \tag{1}$$

因此，

$$\sum_{m=0}^{M-1} (ze^{j\theta})^m - \sum_{m=0}^{M-1} (ze^{-j\theta})^m = \frac{(1-z^M)(ze^{j\theta}-ze^{-j\theta})}{(1-ze^{-j\theta})(1-ze^{j\theta})}. \tag{2}$$

由此可得：

$$[(1-ze^{-j\theta})(1-ze^{j\theta})]\left[\frac{\sum_{m=0}^{M-1} z^m \sin m\theta}{z\sin\theta}\right] = 1 - z^M. \tag{3}$$

注意上式左边第一个中括号内的部分即为信号 f 的多项式表示，因此其双Δ函数逆为

$$\frac{\left(\sum_{m=0}^{M-1} z^m \sin m\theta\right)}{(z\sin\theta)},$$

对应的时域信号即为 $\sin n\theta/\sin\theta$，
$(n = 1, 2, \cdots M-1)$，因而证得定理.

例　设

$$M = 8,\ N = 16,\ \theta = \frac{2\pi}{M} = \pi/4$$

由于

$$(1-ze^{j\pi/4})(1-ze^{-j\pi/4}) = 1 - \sqrt{2}\,z + z^2$$

因此时域信号 f：$1, -\sqrt{2}, 1$ 的 DFT 谱在 $\pm\pi/4$ 处有一对零点. 由上述定理得到

$$f^{-1} = \frac{\sin n\theta}{\sin\theta},$$

即: $1, \sqrt{2}, 1, 0, -1, -\sqrt{2}, -1$. 容易验证: $f*f^{-1}$ (按 $N=16$ 循环)为双△函数 $1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0; -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0$.

三、卷积核谱零点的剔除

考虑卷积方程 (1), 并把 f 表示成两部分:

$$f = f_1 * f_0 \text{ 或 } f(z) = f_1(z) f_0(z), \tag{4}$$

式中, $f_0(z)$ 为 $f(z)$ 的零点位于单位圆上 $e^{-jm2\pi/M}$ 的部分, f_1 表示 f 的其它零点的部分. 令 f_0 的双△函数逆 f_0^{-1} 卷积 (1) 式的两边,得:

$$(f_0^{-1} * f_0) * f_1 * h = (g + n) * f_0^{-1}$$

很明显,上式右边以及上式左边的前M个元和后M个元的内容相同但极性相反. 因此, h 可以由下述方程得到.

$$f_1 * h = (g + n) * f_0^{-1}|_M,$$

式中记号 $|_M$ 表示取 $2M$ 个元中的前M个元. 由于 f_1 不含 $e^{-j2\pi m/M}$ 的零点,所以上式可按常规的 DFT 相除的方法求解.

f_1 可由下述方法获得: 对 f 作 DFT 以确定零点的位置;按上节叙述的定理获得

$$f_0^{-1} = \sin n\theta_1 * \cdots * \sin n\theta_k (\theta_1, \cdots, \theta_k \text{ 为零点的位置})$$

对 (4) 式两边卷积 f_0^{-1} 得:

$$(f_0^{-1} * f_0) * f_1 = f_0^{-1} * f.$$

因此,

$$f_1 = f_0^{-1} * f|_M.$$

例 设 $M=8$, $N=16$; 选上节例中的信号为 f_0. $f_0 = 1, -\sqrt{2}, 1$, 并选 $f_1 = 1, 2$, 则

$$f = f_0 * f_1 = 1, (2-\sqrt{2}), (1-2\sqrt{2}), 2.$$

令 $f_0^{-1} = 1, \sqrt{2}, 1, 0, -1, -\sqrt{2}, -1$. 卷积 f, 则得:

$$f_0^{-1} * f|_M = 1, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0.$$

因此得到了剔除谱零点以后的卷积核 f_1.

上述方法的不方便之处在于: 必须先对 f 作一次 DFT, 以确定谱零点的位置. 同时由于从 f 的 DFT 谱难于判断零点的阶数,因此对于多重零点的情况必须逐次剔除,即对剔除所有一次零点后获得的 f_1 再作 DFT 以判断是否还有零点存在.

上述缺点,在满足一定条件的情况下[2], 可以由直接时域法加以克服. 具体的做法是根据已知 f, 利用时域反卷法直接求解下述卷积方程:

$$f * f^{-1} = 1. \tag{5}$$

根据文献 [1] 中提出的时域反卷积步骤,得到

$$(f^* * f_1^* * \cdots * f_{s-1} * f) * f^{-1} = f^* * f_1^* * \cdots * f_{s-1}^* \tag{6}$$

文献 [2] 中定理 7 指出：当 $f(z)$ 有零点位于 $e^{-j2\pi m/M}$，但没有零点位于 $e^{-j2\pi l/N}$ ($N = 2M$，l 取奇数)时，(6) 式左边的括号部分当 $s = \log_2 M$ 时必为一对其间有 $M-1$ 个恒零元的极性相反(但不为零)的Δ函数. 因此上式右边与相应的Δ函数幅度归一化后得到两组相同的解 f^{-1}。

直接时域法求双Δ函数逆的优点在于不须预先判断零点的位置和阶数，其计算过程也不因零点的个数增多而变得复杂. 其缺点是当 $f(z)$ 同时具有 $e^{-jm2\pi/N}$ (m 取偶数)处和 $e^{-jm2\pi/N}$ (m 取奇数)处的零点时，(6) 式左边的一对Δ函数幅度均为零而失解.

四、结　　论

上述两种方法各自克服了对方的缺点；应用于实际问题时，总可以选用其中的一种以克服卷积核谱存在零点时带来的困难. 而对于实际问题中最经常出现的卷积核谱仅有单对共轭零点的情况，则两种方法的任何一种均可以用来有效地实现反演卷积.

参　考　文　献

[1] 孔凡年，电子学报，1985 年，第 4 期，第 8 页.
[2] 孔凡年，中国科学A辑，**29**(1986)，1065.
[3] W. K. Yeung and F. N. Kong, *IEEE Trans. on ASSP*, **ASSP-34** (1986), 912.

METHODS OF SOLVING DECONVOLUTION DIFFICULTIES WHEN THE KERNEL SPECTRUM CONTAINS ZEROES

Kong Fannian

(Institute of Electronics, Academia Sinica)

The problem of two Δ-function inverse are further discussed. Methods of solving deconvolution difficulties when the Kernel spectrum contains zeroes are presented.