

电磁波泵浦的自由电子激光器*

尹元昭

(中国科学院电子学研究所,北京)

摘要 本文研究了电磁波泵浦的自由电子激光器。从跃变磁场结构出来的大半径迴旋环形电子束通过圆柱形波导与圆柱形波导的 TE_{11} 模入射电磁波相作用。利用电子束的弗拉索夫分布函数理论和三维波导模的波动方程求得在康普顿区域中的散射波色散关系。通过数值分析,讨论了轴向引导磁场,电子束能量,电子迴旋比和电子束环的径向位置等与散射波频率和增长率的关系。

关键词 自由电子激光器;电磁泵浦波;圆柱形波导;引导磁场

一、引言

自由电子激光器可产生从毫米波到可见光的相干辐射,作为可调谐的大功率激光器正在迅速发展。大多数自由电子激光器的研究都用静磁摆动器^[1-3]。本文研究行波电磁摆动器,即用与相对论性电子束相对传播的电磁波作为泵浦波,经电子束反向散射产生相干辐射^[4]。与静磁摆动器相比电磁摆动器有如下两个特点:首先,静磁摆动器的波长因技术限制不能做得很短,并当波长缩短时,轴上磁场强度相应降低。为了提高强度就必须减小摆动器的口径。为使电子产生相同的横向速度扰动,静磁摆动器的磁场强度 B_w (kGs) 和电磁泵浦波的功率密度 P_{EM} (MW/cm²) 可用近似公式 $P_{EM} = 60 B_w^2$ 进行换算。当 $B_w = 1$ kGs 时, $P_{EM} = 60$ MW/cm², 即作为电磁摆动器的电磁波功率必须很高。随着迴旋管^[5]和迴旋自动谐振脉泽 (CARM) 或无摆动器的自由电子激光器^[6]的发展,波长短到毫米或亚毫米量级,功率高到数兆或数十兆瓦量级的大口径电磁波源已不难实现。从而突破了静磁摆动器的这种限制,可用低能电子束产生极短波长的相干辐射。其次,为了用同一电子束产生极短波长的相干辐射,二级自由电子激光器的概念^[7]引起人们的重视。它的第二级就是用电磁波泵浦,本文的理论处理完全可用于这种情形。

二、电子在轴向磁场和电磁波中的运动

电子在轴向磁场和电磁波中的相对论性运动方程是

$$d\mathbf{v}/dt = -[e/(\gamma m_0)][\mathbf{E} + \mathbf{v} \times (\mathbf{B} + \mathbf{B}_w)/c - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})\mathbf{v}/c^2] \quad (1)$$

1990年10月4日收到,1991年2月25日修改定稿。

* 国家自然科学基金资助项目

其中, e 和 m_0 分别是电子的电荷数值和静止质量; c 是真空中光速; γ 是电子的能量因子, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$; $\beta = v/c$; $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$, $\mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1$ 和 $\mathbf{E}_2, \mathbf{B}_2$ 分别是泵浦波和散射波的电场和磁场强度. 对圆柱形波导的 TE 模来说, 其分量分别为

$$\left. \begin{aligned} E_{r1} &= A_1[\omega_1 l_1 / (2ck_{c1}^2 r)] J_{l_1}(k_{c1} r) \exp[-i(k_1 z + l_1 \theta + \omega_1 t)] + \text{c.c.} \\ E_{\theta 1} &= -iA_1[\omega_1 / (2ck_{c1})] J'_{l_1}(k_{c1} r) \exp[-i(k_1 z + l_1 \theta + \omega_1 t)] + \text{c.c.} \\ B_{r1} &= -iA_1[k_1 / (2k_{c1}^2)] J'_{l_1}(k_{c1} r) \exp[-i(k_1 z + l_1 \theta + \omega_1 t)] + \text{c.c.} \\ B_{\theta 1} &= -A_1[k_1 l_1 / (2k_{c1}^2 r)] J_{l_1}(k_{c1} r) \exp[-i(k_1 z + l_1 \theta + \omega_1 t)] + \text{c.c.} \\ B_{z1} &= (A_1/2) J_{l_1}(k_{c1} r) \exp[-i(k_1 z + l_1 \theta + \omega_1 t)] + \text{c.c.} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

和

$$\left. \begin{aligned} E_{r2} &= -A_2[\omega_2 l_2 / (2ck_{c2}^2 r)] J_{l_2}(k_{c2} r) \exp[i(k_2 z + l_2 \theta - \omega_2 t)] + \text{c.c.} \\ E_{\theta 2} &= -iA_2[\omega_2 / (2ck_{c2})] J'_{l_2}(k_{c2} r) \exp[i(k_2 z + l_2 \theta - \omega_2 t)] + \text{c.c.} \\ B_{r2} &= iA_2[k_2 / (2k_{c2}^2)] J'_{l_2}(k_{c2} r) \exp[i(k_2 z + l_2 \theta - \omega_2 t)] + \text{c.c.} \\ B_{\theta 2} &= -A_2[k_2 l_2 / (2k_{c2}^2 r)] J_{l_2}(k_{c2} r) \exp[i(k_2 z + l_2 \theta - \omega_2 t)] + \text{c.c.} \\ B_{z2} &= (A_2/2) J_{l_2}(k_{c2} r) \exp[i(k_2 z + l_2 \theta - \omega_2 t)] + \text{c.c.} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中 ω_1, k_1, l_1, A_1 和 ω_2, k_2, l_2, A_2 分别是泵浦波和散射波的频率, 波数, 方位角模数和振幅常数; $J_{l_1}(k_{c1} r)$ 和 $J_{l_2}(k_{c2} r)$ 是第一类贝塞尔函数, $J'_{l_1}(k_{c1} r)$ 和 $J'_{l_2}(k_{c2} r)$ 是它们对 r 的导数; 截止波数 k_{c1} 和 k_{c2} 分别由圆柱形波导的边界条件

$$J'_{l_1}(k_{c1} R_w) = 0 \quad \text{和} \quad J'_{l_2}(k_{c2} R_w) = 0$$

决定, 本文只讨论它们的第一个零点. R_w 是圆柱形波导的半径.

我们将电子在静磁场中的运动看作稳态, 作为零级量; 将电磁波看作微扰, 作为一级小量. 从跃变磁场结构 (cusp)^[8] 出来的电子束环的速度 $\mathbf{v}_0 = v_{\theta 0} \mathbf{e}_\theta + v_{\parallel} \mathbf{e}_z$; $v_{\theta 0} = \Omega_{\parallel} r$; $\Omega_{\parallel} = eB_{\parallel} / \gamma_0 m_0 c$ 是电子在轴向磁场 $\mathbf{B}_{\parallel} = B_{\parallel} \mathbf{e}_z$ 中的回旋频率, $\gamma_0 = (1 - \beta_0^2)^{-1/2}$, $\beta_0 = v_0/c$; r 是电子束环的径向位置. 于是电子在静磁场和电磁波中的速度可表示为 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}^{(1)}(r, t)$; $\mathbf{v}^{(1)}$ 是电磁波引起的速度扰动. 将 \mathbf{v} 代入 (1) 式, 仅保留一级小量, 得到

$$\begin{aligned} d\mathbf{v}^{(1)} / dt &= -[e / (m_0 \gamma_0)] [\mathbf{E} + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B} / c + \mathbf{v}^{(1)} \times \mathbf{B}_{\parallel} / c - (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{E}) \mathbf{v}_0 / c^2] \\ &\quad + [e / (m_0 c^3)] \gamma_0 (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}^{(1)}) \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}_{\parallel} \end{aligned} \quad (4)$$

将 (2) 和 (3) 式代入 (4) 式, 利用傅氏变换和相应的正交关系可解得

$$\left. \begin{aligned} v_{r1}^{(1)}(k, \omega) &= -iA_1 [e / (2m_0 \gamma_0 \Omega_1)] \{ [l_1(\omega_1/c + \beta_{\parallel} k_1) / (k_{c1}^2 r) + \beta_{\theta 0}] J_{l_1}(k_{c1} r) \\ &\quad - [\omega_1 \Omega_{\parallel} / (ck_{c1} \Omega_1)] \beta_{\theta 0}^2 J'_{l_1}(k_{c1} r) \} \Delta(l_1 - l) \delta(k_1 - k) \delta(\omega_1 + \omega) \\ &\quad + iA_2 [e / (2m_0 \gamma_0 \Omega_1)] \{ [l_2(\omega_2/c - \beta_{\parallel} k_2) / (k_{c2}^2 r) - \beta_{\theta 0}] J_{l_2}(k_{c2} r) \\ &\quad - [\omega_2 \Omega_{\parallel} / (ck_{c2} \Omega_1)] \beta_{\theta 0}^2 J'_{l_2}(k_{c2} r) \} \Delta(l_2 - l) \delta(k_2 - k) \delta(\omega_2 - \omega) \\ v_{\theta 1}^{(1)}(k, \omega) &= A_1 [e / (2m_0 \gamma_0 \Omega_1 k_{c1})] [\omega_1 / (c\gamma_{\theta 0}^2) + \beta_{\parallel} k_1] J'_{l_1}(k_{c1} r) \\ &\quad \times \Delta(l_1 - l) \delta(k_1 - k) \delta(\omega_1 + \omega) - A_2 [e / (2m_0 \gamma_0 \Omega_1 k_{c2})] [\omega_2 / (c\gamma_{\theta 0}^2) \\ &\quad - \beta_{\parallel} k_2] J'_{l_2}(k_{c2} r) \Delta(l_2 - l) \delta(k_2 - k) \delta(\omega_2 - \omega) \\ v_{z1}^{(1)}(k, \omega) &= -A_1 [e / (2m_0 \gamma_0 \Omega_1 k_{c1})] \beta_{\theta 0} (\omega_1 \beta_{\parallel} / c + k_1) J_{l_1}(k_{c1} r) \\ &\quad \times \Delta(l_1 - l) \delta(k_1 - k) \delta(\omega_1 + \omega) + A_2 [e / (2m_0 \gamma_0 \Omega_1 k_{c2})] \beta_{\theta 0} \\ &\quad \times (\omega_2 \beta_{\parallel} / c - k_2) J_{l_2}(k_{c2} r) \Delta(l_2 - l) \delta(k_2 - k) \delta(\omega_2 - \omega) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

在推导 (5) 式时仅保留了我们的感兴趣的能满足关系

$$\omega = \omega_2 - \omega_1, \quad k = k_1 + k_2, \quad l = l_1 + l_2 \quad (6)$$

的泵浦波和散射波的相拍项^[9], 又 $\Omega_l = \omega - l\Omega_H - kv_{\parallel}$, $\beta_{00} = v_{00}/c$, $\gamma_{00} = (1 - \beta_{00}^2)^{-1/2}$, $\beta_{\parallel} = v_{\parallel}/c$, 并定义函数 Δ 为

$$\Delta(l_1 - l_2) = \begin{cases} 1, & l_1 = l_2 \\ 0, & l_1 \neq l_2 \end{cases}$$

而 $\delta(x)$ 为 δ -函数。

三、相对论性电子束环的分布函数

在轴向引导磁场, 泵浦波和散射波作用下, 相对论性回旋电子束环的分布函数由下列弗拉索夫方程决定:

$$\begin{aligned} \partial f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) / \partial t + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot \partial f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) / \partial \mathbf{r} - e\{\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \\ + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \times [\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{B}_{\parallel}] / c\} \cdot \partial f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) / \partial \mathbf{p} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

将电子束分布函数和速度展开为

$$\left. \begin{aligned} f &= f^{(0)} + f^{(1)} + f^{(2)} \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}^{(1)} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

根据电子束环的特性可选择如下的平衡分布函数:

$$f^{(0)}(p_{\theta}, p_x, P_{\theta}) = n_0 R_0 \oplus [\Delta^2 - (p_{\theta} - \hat{p})^2] \delta(P_{\theta} - P_0) \delta(p_x - \gamma_0 m_0 v_{\parallel}) \quad (9)$$

其中 n_0 是电子的平衡密度; \hat{p} 是电子的平均角动量; Δ 是电子的角动量分散;

$$P_{\theta} = r(p_{\theta} - eB_{\parallel}r/2c)$$

是电子的正则角动量; \oplus 是亥维赛阶跃函数,

$$\oplus(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

因为电子有动量分散, 所以电子环有一定宽度, 其平均半径为 R_0 , 半宽度为 a 。显然 P_{θ} , p_{θ} 和 p_x 都是运动不变量。我们令 $P_0 = eB_{\parallel}(R_0^2 + a^2)/2c$, 不难证明环的电子密度 $n(r)$ 为

$$n(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} d^3 p f^{(0)}(p_{\theta}, p_x, P_{\theta}) = \begin{cases} n_0 R_0 / r, & -a \leq r - R_0 \leq a \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (10)$$

其中

$$a = \Delta / (\gamma_0 m_0 \Omega_H), \quad R_0 = \hat{p} / (\gamma_0 m_0 \Omega_H) \quad (11)$$

可见电子环的平均半径和半宽度分别由电子的平均角动量 $\hat{p} = \int_{-\infty}^{+\infty} d^3 p p_{\theta} f^{(0)}(p_{\theta}, p_x, P_{\theta})$ 和动量分散 Δ 决定。这些结果表明, 所选择的平衡分布函数 (9) 式对描述我们的理论模型是合适的。

将 (8) 式代入 (7) 式可得一级小量方程

$$\begin{aligned} \partial f^{(1)} / \partial t + \Omega_H \partial f^{(1)} / \partial \theta + v_{\parallel} \partial f^{(1)} / \partial z = eE_{\theta} \partial f^{(0)} / \partial p_{\theta} + e\beta_{\parallel} B_r \partial f^{(0)} / \partial p_{\theta} \\ - e\beta_{00} B_r \partial f^{(0)} / \partial p_x - (e/c) B_{\parallel} v_r^{(1)} \partial f^{(0)} / \partial p_{\theta} \end{aligned} \quad (12)$$

和二级小量方程

$$\begin{aligned} \partial f^{(2)}/\partial z + \Omega_{\parallel} \partial f^{(2)}/\partial \theta + v_{\parallel} \partial f^{(2)}/\partial z = & - (v_{\theta}^{(1)}/r) \partial f^{(1)}/\partial \theta - v_{\theta}^{(1)} \partial f^{(1)}/\partial z \\ & + e E_{\theta} \partial f^{(1)}/\partial p_{\theta} + e \beta_{\parallel} B_r \partial f^{(1)}/\partial p_{\theta} - e \beta_{\theta 0} B_r \partial f^{(1)}/\partial p_z - (e/c) B_{\parallel} v_r^{(1)} \partial f^{(1)}/\partial p_{\theta} \\ & + (e/c) (v_z^{(1)} B_r - v_r^{(1)} B_z) \partial f^{(0)}/\partial p_{\theta} + (e/c) (v_r^{(1)} B_{\theta} - v_{\theta}^{(1)} B_r) \partial f^{(0)}/\partial p_z \end{aligned} \quad (13)$$

因为电磁波仅对在静磁场中的电子束环平衡态起微扰作用,所以在推导(12)和(13)式时我们已假设 $\partial f^{(1)}/\partial p_r = 0$, $\partial f^{(2)}/\partial p_r = 0$.

将(2)和(3)式代入(12)式,利用傅氏变换和正交关系可解得分布函数的一级小量 $f^{(1)}$ 的傅氏变换

$$\begin{aligned} f^{(1)}(k, \omega) = & -A_1 [e/(2\Omega_1)] [U_1 + (\Omega_{\parallel}/\Omega_1) S_1 \partial f^{(0)}/\partial p_{\theta}] \\ & \times \Delta(l_1 - l) \delta(k_1 - k) \delta(\omega_1 + \omega) + A_2 [e/(2\Omega_1)] [U_2 + (\Omega_{\parallel}/\Omega_1) \\ & \times S_2 \partial f^{(0)}/\partial p_{\theta}] \Delta(l_2 - l) \delta(k_2 - k) \delta(\omega_2 - \omega) \end{aligned} \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} U_1 = & [(\omega_1/c) \partial f^{(0)}/\partial p_{\theta} + (\beta_{\parallel} \partial f^{(0)}/\partial p_{\theta} - \beta_{\theta 0} \partial f^{(0)}/\partial p_z) k_1] J'_{11}(k_{c1} r) / k_{c1} \\ & + S_1 \partial f^{(0)}/\partial p_{\theta} \\ U_2 = & [(\omega_2/c) \partial f^{(0)}/\partial p_{\theta} - (\beta_{\parallel} \partial f^{(0)}/\partial p_{\theta} - \beta_{\theta 0} \partial f^{(0)}/\partial p_z) k_2] J'_{12}(k_{c2} r) / k_{c2} \\ & + S_2 \partial f^{(0)}/\partial p_{\theta} \\ S_1 = & \{J_{11}(k_{c1} r) [l_1(\omega_1/c + \beta_{\parallel} k_1) / (k_{c1}^2 r) + \beta_{\theta 0}] \\ & - [\Omega_{\parallel} \omega_1 / (\Omega_1 k_{c1} c)] \beta_{\theta 0}^2 J'_{11}(k_{c1} r)\} \Omega_{\parallel} / \Omega_{11} \\ S_2 = & \{J_{12}(k_{c2} r) [l_2(\omega_2/c - \beta_{\parallel} k_2) / (k_{c2}^2 r) - \beta_{\theta 0}] \\ & - [\Omega_{\parallel} \omega_2 / (\Omega_1 k_{c2} c)] \beta_{\theta 0}^2 J'_{12}(k_{c2} r)\} \Omega_{\parallel} / \Omega_{12} \\ \Omega_{11} = & \omega_1 + l_1 \Omega_{\parallel} + v_{\parallel} k_1 \\ \Omega_{12} = & \omega_2 - l_2 \Omega_{\parallel} - v_{\parallel} k_2 \end{aligned} \quad (15)$$

将(2), (3), (5)和(14)式代入(13)式,同样运算可得分布函数的二级小量 $f^{(2)}$ 的傅氏变换

$$\begin{aligned} f^{(2)}(k, \omega) = & A_1 A_2 [e^2 / (4\gamma_0 m_0)] J'_{11}(k_{c1} r) U_2 T_2 / (\Omega_1 \Omega_{11} \Omega_{12} k_{c1}) \\ & + A_1 A_2 [e^2 / (4\gamma_0 m_0)] J'_{12}(k_{c2} r) U_1 T_1 / (\Omega_1 \Omega_{11} \Omega_{12} k_{c2}) \\ & - A_1 A_2 [e^2 / (4\Omega_1 \Omega_{12})] [(\omega_1/c + \beta_{\parallel} k_1) J'_{11}(k_{c1} r) / k_{c1} + S_1] \partial U_2 / \partial p_{\theta} \\ & - A_1 A_2 [e^2 / (4\Omega_1 \Omega_{11})] [(\omega_2/c - \beta_{\parallel} k_2) J'_{12}(k_{c2} r) / k_{c2} + S_2] \partial U_1 / \partial p_{\theta} \\ & + A_1 A_2 [e^2 / (4\Omega_1 \Omega_{12})] (k_1/k_{c1}) \beta_{\theta 0} J'_{11}(k_{c1} r) \partial U_2 / \partial p_z \\ & - A_1 A_2 [e^2 / (4\Omega_1 \Omega_{11})] (k_2/k_{c2}) \beta_{\theta 0} J'_{12}(k_{c2} r) \partial U_1 / \partial p_z \\ & + A_1 A_2 [e^2 / (4\gamma_0 m_0 c)] [k_2 / (\Omega_1 \Omega_{11} k_{c1} k_{c2})] J'_{11}(k_{c1} r) J'_{12}(k_{c2} r) \\ & \times \{[\omega_1 / (c\gamma_{\theta 0}^2) + \beta_{\parallel} k_1] \partial f^{(0)}/\partial p_z + \beta_{\theta 0} (\beta_{\parallel} \omega_1/c + k_1) \partial f^{(0)}/\partial p_{\theta}\} \\ & - A_1 A_2 [e^2 / (4\gamma_0 m_0 c)] [k_1 / (\Omega_1 \Omega_{12} k_{c1} k_{c2})] J'_{11}(k_{c1} r) J'_{12}(k_{c2} r) \\ & \times \{[\omega_2 / (c\gamma_{\theta 0}^2) - \beta_{\parallel} k_2] \partial f^{(0)}/\partial p_z + \beta_{\theta 0} (\beta_{\parallel} \omega_2/c - k_2) \partial f^{(0)}/\partial p_{\theta}\} \\ & - A_1 A_2 [e^2 / (4\gamma_0 m_0 c)] [1 / (\Omega_1 \Omega_{\parallel})] J'_{12}(k_{c2} r) S_1 \{[k_2 l_2 / (k_{c2} r)] \partial f^{(0)}/\partial p_{\theta} \\ & + \partial f^{(0)}/\partial p_{\theta}\} + A_1 A_2 [e^2 / (4\gamma_0 m_0 c)] [1 / (\Omega_1 \Omega_{\parallel})] J'_{11}(k_{c1} r) S_2 \\ & \times \{[k_1 l_1 / (k_{c1} r)] \partial f^{(0)}/\partial p_z + \partial f^{(0)}/\partial p_{\theta}\} \end{aligned} \quad (16)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= l_1[\omega_2/(c\gamma_{\theta 0}^2) - \beta_{\parallel}k_2]/r - \beta_{\theta 0}k_1(\beta_{\parallel}\omega_2/c - k_2) \\ T_2 &= l_2[\omega_1/(c\gamma_{\theta 0}^2) + \beta_{\parallel}k_1]/r - \beta_{\theta 0}k_2(\beta_{\parallel}\omega_1/c + k_1) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

在求 $f^{(1)}$ 和 $f^{(2)}$ 时我们仅保留了能满足泵浦波和散射波相拍关系 (6) 式的项。

四、波动方程和色散关系

TE 模的纵向波动方程为

$$[\nabla^2 - (1/c^2)\partial^2/\partial t^2]B_{z2} = -(4\pi/c)(\nabla \times \mathbf{j})_z \quad (18)$$

扰动电流密度 \mathbf{j} 可由扰动分布函数求得。因为我们只对满足泵浦波和散射波相拍条件 (6) 式的项感兴趣, 所以仅有 $f^{(2)}$ 起作用, 于是

$$\mathbf{j} = -e \int_{-\infty}^{+\infty} d^3p \mathbf{v}^{(1)} f^{(2)} \quad (19)$$

将 (19) 式代入 (18) 式并利用 (3), (5) 和 (16) 式, 解得

$$(\omega_2^2 - c^2k_2^2 - c^2k_{z2}^2)J_{l_2}(k_{z2}r) = [2\pi e^2/(\gamma_{\theta 0}m_0r)] \int_{-\infty}^{+\infty} d^3p f^{(2)}(Q_1/\Omega_{l_1} + l_2S_1/\Omega_{l_2}) \quad (20)$$

其中

$$Q_1 = [\omega_1/(\gamma_{\theta 0}^2c) + \beta_{\parallel}k_1]J'_{l_1}(k_{z1}r)/k_{z1} \quad (21)$$

将平衡分布函数 (9) 式代入 (20) 式, 完成对动量的积分, 再在 (20) 式两边乘以 $rJ_{l_2}(k_{z2}r)$, 从 0 到 R_w 对 r 积分, 经过冗长的运算, 最后得到色散关系

$$\begin{aligned} &[\omega_2^2 - c^2k_2^2 - c^2k_{z2}^2](\omega - v_{\parallel}k - l\Omega_{l_2})^2 = \tilde{A}_1^2 c^5 \omega_p^2 F \\ &\times J_{l_2}(k_{z2}R_0)S_3S_4/(8\gamma_{\theta 0}^2R_0^3D_{l_2}\Omega_{l_1}\Omega_{l_2}) \end{aligned} \quad (22)$$

其中, $\omega_p = [4\pi e^2n_0/(\gamma_{\theta 0}m_0)]^{1/2}$ 是等离子体频率, $F = 4aR_0/R_w$ 是充填因子, \tilde{A}_1 是与泵浦波功率有关的无量纲因子

$$\tilde{A}_1 = eA_1R_w/(m_0c^2) = [2ek_{z1}/(m_0c^2)][2P_w/(D_{l_1}k_{z1}\omega_1)]^{1/2} \quad (23)$$

P_w 是泵浦波通过圆柱形波导的总功率,

$$\left. \begin{aligned} D_{l_1} &= [1 - l_1^2/(k_{z1}^2R_w^2)]J_{l_1}^2(k_{z1}R_w) \\ D_{l_2} &= [1 - l_2^2/(k_{z2}^2R_w^2)]J_{l_2}^2(k_{z2}R_w) \\ S_3 &= \{J_{l_1}(k_{z1}R_0)[l_1(\omega_1/c + \beta_{\parallel}k_1)/(k_{z1}^2r) + \beta_{\theta 0}] \\ &\quad - [\Omega_{l_1}\omega_1/(\Omega_{l_1}ck_{z1})]\beta_{\theta 0}^2J'_{l_1}(k_{z1}R_0)\}l_2 + Q_1 \\ S_4 &= l^2S_5S_6 + [(k_2/k_{z2})J'_{l_2}(k_{z2}R_0)S_5 - (k_1/k_{z1})J_{l_1}(k_{z1}R_0)S_6]l\beta_{\theta 0}R_0k \\ &\quad - [k_1k_2/(k_{z1}k_{z2})]\beta_{\theta 0}^2R_0^2k^2J'_{l_1}(k_{z1}R_0)J'_{l_2}(k_{z2}R_0) \\ S_5 &= J_{l_1}(k_{z1}r)(\omega_1/c + \beta_{\parallel}k_1)/k_{z1} + S_1 \\ S_6 &= J_{l_2}(k_{z2}r)(\omega_2/c - \beta_{\parallel}k_2)/k_{z2} + S_2 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

注意在色散关系中 S_1, S_2, S_3 和 S_4 里的 r 都用 R_0 代替。

五、数值分析和讨论

从色散关系 (22) 式可见, 散射波的频率和波数由波导的色散关系

$$\omega_i^2 - c^2 k_i^2 - c^2 k_{z2}^2 = 0 \tag{25}$$

和泵浦波与散射波相拍产生的电子束波的色散关系

$$\omega - v_{\parallel} k - l\Omega_{\parallel} = 0 \tag{26}$$

决定,利用(6)式联解(25)和(26)式得到

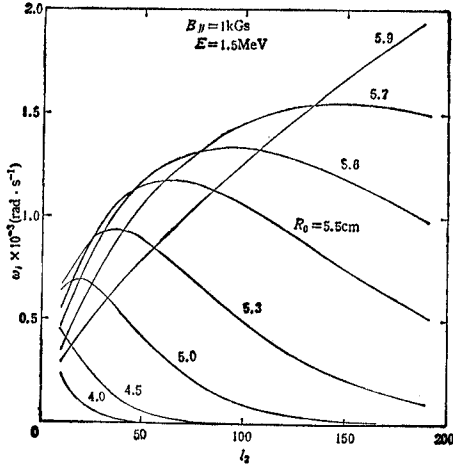


图1 增长率与方位角模数的关系
(以电子束环的径向位置为参量)

$\omega_i = 6 \times 10^{10} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $k_{\perp} = 0.396 \text{ cm}^{-1}$,
 $l_1 = 10$, $P_{\text{in}} = 50 \text{ MW}$, $a = 0.1 \text{ cm}$, 电子
束环总电流 5 kA , $R_{\text{in}} = 6 \text{ cm}$

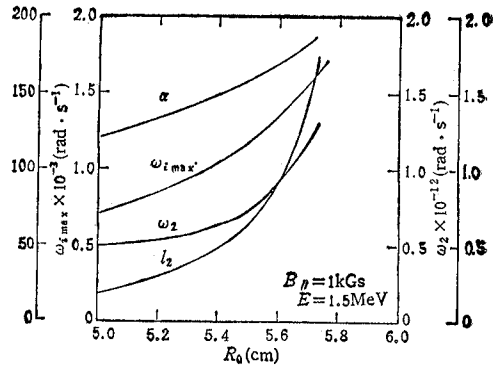


图2 图1曲线最大值处的增长率、频率、方位角模数和回旋比与电子束径向位置的关系(其它参数与图1同)

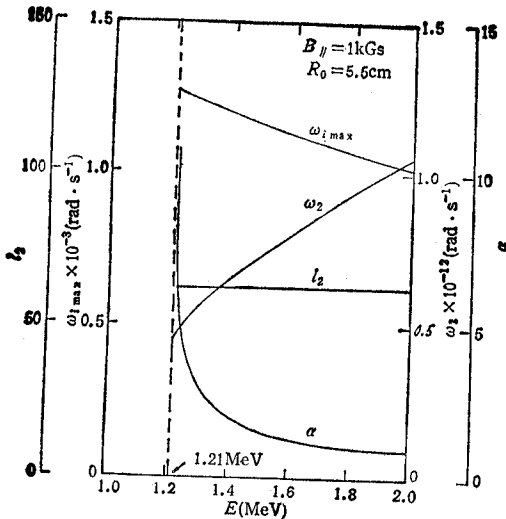


图3 增长率最大值、频率、方位角模数和回旋比与电子束能量的关系

$B_{\parallel} = 1 \text{ kGs}$, 其它参数与图1同

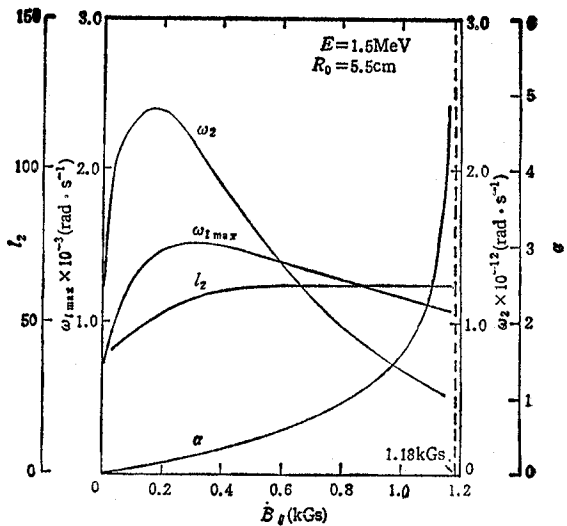


图4 增长率最大值、频率、方位角模数和回旋比与轴向磁场的关系

$E = 1.5 \text{ MeV}$, 其它参数与图1同

$$\left. \begin{aligned} \omega_2 &= \gamma_{\parallel}^2 \beta_{\parallel} [\Omega_c / \beta_{\parallel} \pm (\Omega_c^2 - c^2 k_z^2 / \gamma_{\parallel}^2)^{1/2}] \\ k_z &= (\gamma_{\parallel}^2 / c) [\beta_{\parallel} \Omega_c \pm (\Omega_c^2 - c^2 k_z^2 / \gamma_{\parallel}^2)^{1/2}] \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

其中 $\gamma_{\parallel} = (1 - \beta_{\parallel}^2)^{-1/2}$, $\Omega_c = \omega_1 + (l_1 + l_2)\Omega_{\parallel} + v_{\parallel} k_z$

为了求散射波的增长率, 令 $\omega_2 = \omega_r + i\omega_i$, $\omega_r > \omega_i$, 这里的 ω_r 就是 (27) 式中的 ω_2 , 我们仅讨论取十号的高频情形. 代入色散关系 (22) 式得到

$$\omega_i = [\sqrt{3} c / (4 R_0)] \{ [\omega_p c \tilde{A}_1 / (\gamma_0 R_0)]^2 S_3 S_4 / (2 D_{l_2} \omega_2 \Omega_{l_1} \Omega_{l_2}) \}^{1/3} \quad (28)$$

图 1 表示当电子束能量 $E = 1.5 \text{ MeV}$, 轴向磁场 $B_{\parallel} = 1 \text{ kGs}$ 时, 以电子束环的径向位置 R_0 为参数, 增长率 ω_i 与方位角模数 l_2 的关系. l_2 是正整数, 但为了便于观察, 在图中都联成连续曲线. 图 2 表示在图 1 曲线的最大值处的增长率最大值 $\omega_{i\max}$, 相应的频率 ω_2 , 方位角模数 l_2 和电子回旋比 α 与 R_0 的关系. 这里定义 $\alpha = \beta_{\theta 0} / \beta_{\parallel}$ 为平衡态时电子束环的电子角向速度和轴向速度之比. 从图 1 和图 2 可见, 随着 R_0 的增大, α 增大; 增长率最大值 $\omega_{i\max}$ 增大, 并向 l_2 大的方向移动; 同时与 $\omega_{i\max}$ 相应的频率 ω_2 增大. 这是一个十分令人感兴趣的结果, 指出在实用上应使电子束环尽可能靠近波导壁. 这里要说明一点, 在计算中电子束环的半宽度 a 保持不变, 所以当 R_0 增大时, 充填因子 F 增加, 但是 F 的这种增加对增益的增大作用与场分布的影响相比是很小的.

图 3 表示当轴向磁场 B_{\parallel} 不变时, 增长率最大值 $\omega_{i\max}$, 相应的频率 ω_2 , 方位角模数 l_2 和电子回旋比 α 随电子束能量 E 的变化. 现在 $B_{\parallel} = 1 \text{ kGs}$, 当 $E \rightarrow 1.21 \text{ MeV}$ 时, $\alpha \rightarrow \infty$, 即电子束环仅有回旋运动而无轴向漂移, $v_{\theta 0} = v_0$, $v_{\parallel} = 0$. 从图 3 可见, 当 E 从 1.21 MeV 增加时, α 迅速下降, $\omega_{i\max}$ 缓慢下降, ω_2 上升, l_2 保持不变.

图 4 画出了当电子束能量 E 不变时, 增长率最大值 $\omega_{i\max}$, 相应的频率 ω_2 , 方位角模数 l_2 和电子回旋比 α 与轴向磁场 B_{\parallel} 的关系. 现在 $E = 1.5 \text{ MeV}$, 当 B_{\parallel} 从零增大趋向 1.18 kGs 时, α 逐渐增大并迅速趋向无穷大, l_2 逐渐增大到保持不变 $\omega_{i\max}$ 和 ω_2 出现峰值. 从图 3 和图 4 可见, 当轴向磁场不变时, 使电子回旋比增大, 增长率增大, 频率下降; 当电子束能量不变时, 在某一轴向磁场下, 增长率和频率达到最大; 而当电子束能量和轴向磁场都不变时, 电子束环靠近圆柱形波导壁时, 增长率和频率都增大.

本文计算所得的增长率比用静磁摆动器^[10,11]低. 因为本文的电流密度不够大,

$$\omega_p = 5.4 \times 10^9 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

比文献[10,11]中给出的约小 4 个数量级和泵浦功率不够大, 功率密度比文献[10,11]中给出的约小 2 个数量级. 如将这些因素考虑进去, 本文的增长率将增大 4 个数量级, 与文献[10,11]的接近.

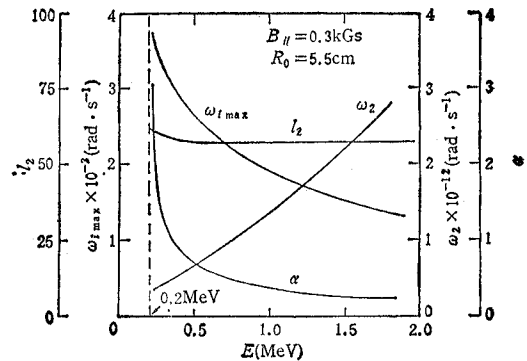


图 5 增长率最大值、频率、方位角模数和回旋比与电子束能量的关系
 $B_{\parallel} = 0.3 \text{ kGs}$, 其它参数与图 1 同

为了表明低能电子束环的工作特性, 作为一个例子画出如图 5。比较图 3 和图 5 可见增长率低能时比高能时略高, 但频率略低, 二者的差别并不很大。然而低能电子束环在实用上有很大的便利。

六、结 论

从跃变磁场出来的迴旋电子束环在电磁波泵浦情形有下列特点: 第一, 适当选择参量, 使电子迴旋比增大可使增长率增大。可见这里轴向磁场不仅对电子束起约束作用防止电子束发散, 而且使电子束大半径迴旋, 增加电子与波相互作用的有效距离, 使增长率增大, 从而可缩短激光器的长度。这与静磁摆动器的情形^[10,11]相似。第二, 当电子束环接近圆柱形波导壁时, 增长率和辐射频率都增大。第三, 适当选择参量, 可用低能电子束环产生与高能电子束环相接近的频率辐射, 因此利用本文的结构可能制成低电压小尺寸短波长的自由电子激光器。

参 考 文 献

- [1] S. H. Gold, et al., *Phys. Fluids*, 27(1984), 746.
- [2] T. J. Orzechowski, et al., *IEEE J. of QE*, QE-21(1985), 831.
- [3] W. W. Destler, et al., *Phys. Fluids*, 28(1985), 1962.
- [4] R. Alan Kens, et al., *IEEE Trans. on PS*, PS-18(1990), 437.
- [5] K. E. Kreischer, et al., *IEEE Trans. on PS*, PS-13(1985), 364.
- [6] S. H. Gold, et al., *IEEE Trans. on PS*, PS 13(1985), 374.
- [7] Y. Carmel, et al., *Phys. Rev. Lett.*, 51(1983), 566.
- [8] M. J. Rhee, W. W. Destler, *Phys. Fluids*, 17(1974), 1574.
- [9] N. M. Kroll, W. A. McMullin, *Phys. Rev.*, A17(1978), 300.
- [10] Y. Z. Yin, G. Beketi, *Phys. Fluids*, 28(1985), 1186.
- [11] Y. Z. Yin, R. J. Ying, G. Beketi, *IEEE J. of QE*, QE-23(1987), 1610.

A FREE ELECTRON LASER WITH ELECTROMAGNETIC PUMPING WAVE

Yin Yuanzhao

(Institute of Electronics, Academia Sinica, Beijing)

Abstract A free electron laser with electromagnetic pumping wave is studied. A drifting and rotating electron ring with large radius comes from a magnetic cusp, goes through a cylindrical waveguide and interacts with TE_n modes of the waveguide. By making use of the Vlasov distribution theory and the three dimensional wave equation of waveguide modes, the dispersion relation of scattered waves in Compton region is deduced. According to the numerical analysis, the growth rate and frequency of scattered wave as a function of guide magnetic field, electron beam energy, electron cyclotron ratio and radial position of electron ring have been discussed.

Key words Free electron laser; Electromagnetic pumping wave; Cylindrical waveguide; Guide magnetic field