

# 一个带时延神经网络的分岔现象研究<sup>1</sup>

王 炎 廖晓峰\* 吴中福\* 虞厥邦

(电子科技大学光电子技术系 成都 610054)

\*(重庆大学计算机学院 重庆 400044)

**摘 要** 本文借助中心流形定理详细讨论了一个带时延神经网络的 Hopf 分岔和周期解的渐近稳定性, 给出了确定周期解的渐近稳定性、分岔方向、周期和解的渐近形式的一个算法, 并进行了计算机仿真实验, 仿真实验表明了所讨论的结果的有效性与正确性。

**关键词** 带时延神经网络, Hopf 分岔, 周期解的渐近稳定性, 中心流形

**中图分类号** TN-052

## 1 引 言

神经网络是一个高度复杂的非线性动力学系统, 其动力学行为有稳定性、不稳定性、周期解、分岔与混沌等。目前对神经网络的讨论, 主要集中于稳定性与不稳定性<sup>[1-10]</sup>。近年来, 由于在神经网络中引入了轴突信号传输延迟, 得到了带时延的神经网络动力学系统, 于是许多作者研究了时延对神经网络稳定性的影响。由于引入了时延, 原来稳定的网络有可能变成了不稳定的网络。文献 [5-7] 详细讨论了带时延 BAM 网络平衡点存在性、轨道有界性和全局稳定性, 并得到了一些充分条件。文献 [8, 9] 则讨论了时延和变时延的 Hopfield 神经网络的稳定性、周期解等问题; 在文献 [10] 中, 讨论了带时延的神经网络的收敛性, 得到了全局渐近稳定平衡点存在的一个充分必要条件。

相对来说, 神经网络分岔现象的研究还比较少, 在文献 [11] 中讨论了细胞神经网络 (CNN) 的一个类似 Hopf 分岔性质, 这是因为 CNN 网络的输出函数是分段线性的, 对于线性动力学系统是不可能产生 Hopf 分岔现象的, 但是由于输出函数的分段线性性, 讨论了原点是焦点时所伴随着的类 Hopf 分岔现象。本文我们采用了文献 [10] 中的一个带时延神经网络模型, 详细讨论了带时延神经网络的 Hopf 分岔和周期解的渐近稳定性, 给出了确定渐近稳定性、分岔方向、周期和解的渐近形式的一个算法, 并进行了计算机模拟, 模拟结果表明了我们所得结论的正确性。

## 2 神经网络模型与 Hopf 分岔的存在性

在本节我们讨论如下带时延神经网络模型<sup>[10]</sup>:

$$dx(t)/dt = -x(t) + atanh[x(t)] - abtanh[x(t - \tau)], \quad (1)$$

这里  $a, b, \tau$  是非负数。文献 [10] 指出 (1) 式有  $x^* = 0$  为平衡点的充分必要条件是

$$a > 0, \quad b \geq 0, \quad a(1 - b) < 1. \quad (2)$$

<sup>1</sup> 1998-04-24 收到, 1999-06-25 定稿  
中国博士后基金资助课题

这个平衡点全局稳定的充分必要条件是

$$a > 0, \quad b \geq 0, \quad a(1-b) < 1 \text{ 和 } a(1+b) < 1. \quad (3)$$

在下面为了讨论方便, 我们取  $a = 1, b = \pi/2 + \mu, \tau = 1$ , 这时 (1) 式变为

$$dx(t)/dt = -x(t) + \tanh[x(t)] - (\pi/2 + \mu)\tanh[x(t-1)]. \quad (4)$$

取  $\mu$  作为分岔参数, 如果  $\mu > -\pi/2$  则 (2) 式满足, 但不满足稳定性条件的 (3) 式, 故  $x = 0$  是不稳定平衡点. 在  $x = 0$  附近将双曲正切函数用 Taylor 级数展开, 则 (4) 式变为

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -(\pi/2 + \mu)x(t-1) - (1/3)[x^3(t) - (\pi/2 + \mu)x^3(t-1)] + O(x^5(t), x^5(t-1)) \\ &= L_\mu x_t(-1) + f(x_t(-1), \mu), \quad t > 0, \quad \mu \in R, \end{aligned} \quad (5)$$

这里  $x_t(\theta) = x(t+\theta), x: [-1, 0] \rightarrow R, \theta \in [-1, 0]$ ;  $L_\mu$  是连续有界的单参线性算子族,  $L_\mu: C[-1, 0] \rightarrow R$ ; 函数  $f(\bullet, \mu): C[-1, 0] \rightarrow R$ , 包含非线性项, 它至少以二次项开始, 且  $f(0, \mu) = 0, D_x f(0, \mu) = 0$ . 考虑线性问题  $\dot{x} = L_\mu x_t$ , 由 Riesz 表示定理, 则存在一函数  $\eta(\cdot, \mu): [-1, 0] \rightarrow R$ , 使得  $\eta$  有有界变差, 且对所有  $\phi \in C[-1, 0]$ ,

$$L_\mu \phi = \int_{-1}^0 d\eta(\theta, \mu)\phi(\theta). \quad (6)$$

特别有

$$L_\mu x_t = \int_{-1}^0 d\eta(\theta, \mu)x(t+\theta), \quad (7)$$

这里  $d\eta(\theta, \mu) = -(\pi/2 + \mu)\delta(\theta+1)d\theta$ .  $L_\mu$  的谱为

$$\sigma(\mu) = \{\lambda | \det(\lambda I - L_\mu e^{\lambda\theta}) = 0\}, \quad (8)$$

其特征方程为

$$\lambda + (\pi/2 + \mu)e^{-\lambda} = 0. \quad (9)$$

所以当  $\mu = 0$  时,  $\pm i\pi/2$  是特征值, 即  $\lambda(0) = \pm i\pi/2$ , 显然对于  $\mu = 0$ , 所有其它特征值除  $\lambda$  和  $\bar{\lambda}$  外有负实部, 因而  $\lambda$  关于  $\mu$  是解析的, 且

$$\left. \frac{d\lambda}{d\mu} \right|_{\mu=0} = \left. \frac{-e^{-\lambda}}{1 - (\pi/2 + \mu)e^{-\lambda}} \right|_{\mu=0} = \gamma \left( i + \frac{\pi}{2} \right), \quad (10)$$

这里  $\gamma^{-1} = 1 + \pi^2/4$ . 设  $L_\mu$  存在一对共轭复特征值  $\lambda(\mu)$  和  $\bar{\lambda}(\mu): \lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\omega(\mu)$ , 显然  $\alpha = 0, \omega(0) = \pi/2$ . 且  $\alpha'(0) = \pi\gamma/2 \neq 0$ , 因此横截性条件满足, 且  $\omega(0) = \gamma$ , 因此我们有下面的结果:

**定理 1** 当  $\mu$  靠近 0 时, 系统 (4) 式的一族周期解从  $x = 0$  处分岔.

## 3 分岔周期解的稳定性

在这节, 我们研究分岔周期解的稳定性. 首先, 我们将 (5) 式转化为算子方程

$$\dot{x}_t = A(\mu)x_t + Rx_t, \quad (11)$$

这里

$$A(\mu)\phi(\theta) = \begin{cases} \frac{d\phi}{d\theta}, & -1 \leq \theta < 0; \\ \int_{-1}^0 d\eta(s, \mu)\phi(s) = -\frac{\pi}{2}\phi(-1), & \theta = 0; \end{cases} \quad (12)$$

并且

$$R\phi(\theta) = \begin{cases} 0, & -1 \leq \theta < 0, \\ f(\phi, \mu), & \theta = 0. \end{cases} \quad (13)$$

因此, 由于  $\frac{dx_t}{d\theta} \equiv \frac{dx_t}{dt}$ , (11) 式变为

$$\frac{dx_t}{dt} = \begin{cases} \frac{dx_t}{d\theta}, & -1 \leq \theta < 0; \\ L_\mu x_t + f(x_t, \mu), & \theta = 0. \end{cases} \quad (14)$$

设  $q(\theta)$  是  $A(0)$  相应于  $\lambda(0)$  的特征向量, 即  $A(0)q(\theta) = i(\pi/2)q(\theta)$ .

定义  $A(0)$  的伴随算子  $A^*(0)$  为

$$A^*(0)\alpha(s) = \begin{cases} -\frac{d\alpha}{ds}, & 0 < s \leq 1; \\ \int_{-1}^0 d\eta^T(s, 0)\alpha(-s) = -\frac{\pi}{2}\alpha(1), & s = 0. \end{cases} \quad (15)$$

因为  $\lambda(0)$  是  $A$  的特征值, 则  $\bar{\lambda}$  是  $A^*$  的特征值, 对某些非零  $q^*$ , 有  $A^*q^* = -i(\pi/2)q^*$ .

定义一个内积<sup>[12]</sup>

$$\langle \varphi, \phi \rangle = \bar{\varphi}(0)\phi(0) - \int_{\theta=-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{\varphi}^T(\xi - \theta)d\eta(\theta)\phi(\xi)d\xi. \quad (16)$$

要决定算子  $A$  的 Poincaré 规范形式, 需要计算  $A$  属于特征值  $i\pi/2$  的特征向量  $q$  和  $A^*$  属于特征值  $-i\pi/2$  的特征向量  $q^*$ , 我们不难得到  $q(\theta) = \exp(i(\pi/2)\theta)$  和  $q^*(s) = D \exp(i(\pi/2)s)$ , 这里  $D = \gamma(1 + i\pi/2)$ . 因此, 我们有  $\langle q^*, q \rangle = 1$  和  $\langle q^*, \bar{q} \rangle = 0$ .

同样

$$R\phi(\theta) = \begin{cases} 0, \\ -\frac{1}{3}\phi^3(0) + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} + \mu\right)\phi^3(-1) + \text{高阶项}. \end{cases}$$

利用文献 [12] 的相同记号, 我们首先构造在  $\mu = 0$  处中心流形  $\psi_0$  的坐标:

$$Z(t) = \langle q^*, x_t \rangle, \quad (17)$$

$$W(t, \theta) = x_t - 2\text{Re}\{Z(t)q(\theta)\}. \quad (18)$$

在中心流形  $\psi_0$ ,  $W(t, \theta) = W(Z(t), \bar{Z}(t), \theta)$ , 这里

$$W(Z, \bar{Z}, \theta) = W_{20}(\theta) \frac{Z^2}{2} + W_{11}(\theta) Z \bar{Z} + W_{02}(\theta) \frac{\bar{Z}^2}{2} + W_{30} \frac{Z^3}{6} + \dots \quad (19)$$

$Z$  和  $\bar{Z}$  是在方向  $q^*$  和  $\bar{q}^*$  上中心流形的局部坐标, 注意如果  $x_t$  是实的, 则  $W$  是实的, 因此

$$\begin{aligned} \dot{Z}(t) = & \frac{i\pi}{2} Z(t) + \bar{D} \left\{ -\frac{1}{3} [W(Z, \bar{Z}, 0) + 2\text{Re}\{Z(t)q(0)\}]^3 \right. \\ & \left. + \frac{1}{3} \left( \frac{\pi}{2} + \mu \right) [W(Z, \bar{Z}, -1) + 2\text{Re}\{Z(t)q(-1)\}]^3 \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

将 (20) 式再写为

$$\dot{Z}(t) = i \frac{\pi}{2} Z + g(Z, \bar{Z}), \quad (21)$$

这里

$$g(Z, \bar{Z}) = g_{20} \frac{Z^2}{2} + g_{11} Z \bar{Z} + g_{02} \frac{\bar{Z}^2}{2} + \frac{g_{21}}{2} Z^2 \bar{Z} + \dots \quad (22)$$

我们利用文献 [12] 的公式来计算  $\mu_2, \beta_2, \tau_2$ , 它们定义为

$$C_1(0) = \frac{i}{2\omega_0} \left( g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{|g_{02}|^2}{3} \right) + \frac{g_{21}}{2}, \quad (23)$$

$$\mu_2 = -\frac{\text{Re}C_1(0)}{\alpha'(0)}, \quad \beta_2 = 2\text{Re}C_1(0), \quad (24)$$

$$\tau_2 = -\frac{1}{\omega_0} [\text{Im}C_1(0) + \mu_2\omega'(0)]. \quad (25)$$

$\mu_2$  的符号决定了分岔方向,  $\beta_2$  的符号决定了分岔周期解的稳定性, 如果  $\beta_2 < 0$ , 则它们是渐近稳定的; 如果  $\beta_2 > 0$ , 它们是不稳定的, 我们不难得出

$$C_1(0) = -\gamma \left( 1 + \frac{\pi^2}{4} \right), \quad \mu_2 = \frac{2}{\pi} \left( 1 + \frac{\pi^2}{4} \right) > 0, \quad \beta_2 = -2\gamma \left( 1 + \frac{\pi^2}{4} \right) < 0.$$

$\tau_2$  决定了在周期中  $O(\varepsilon^2)$  项:

$$P = \frac{2\pi}{\omega_0} [1 + \tau_2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)] = 4 \left[ 1 - \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{\pi^2}{4} \right) \varepsilon^2 + O(\varepsilon^4) \right].$$

因此分岔周期解的渐近形式

$$\begin{aligned} x[t, \mu(\varepsilon)] = & 2\varepsilon \text{Re}[q(0)e^{i\omega_0 t}] + 2\varepsilon^2 \text{Re} \left[ q(0) \left( \frac{g_{20}}{2i\omega_0} e^{2i\omega_0 t} - \frac{g_{11}}{i\omega_0} - \frac{g_{02}}{6i\omega_0} e^{-2i\omega_0 t} \right) \right] \\ & + \varepsilon^2 \text{Re}[\omega_{20}(0)e^{2i\omega_0 t} + W_{11}(0)] + O(\varepsilon^3) \\ = & 2\varepsilon \cos \left( \frac{\pi}{2} (t) \right) + O(\varepsilon^3), \quad 0 \leq t \leq P(\varepsilon) = \frac{2\pi}{\omega_0} [1 + \tau_2\varepsilon^2 + \dots], \end{aligned}$$

这里  $\varepsilon = (\mu/\mu_2)^{1/2}$ , 由此我们有

**定理 2** 系统 (4) 式当  $\mu = 0$  有分岔, 且分岔周期解是渐近稳定的.

#### 4 计算机仿真实验结果

在这节, 我们用四阶 Runge-Kutta 方法对系统 (4) 式的不同  $\mu$  值和不同初值进行了仿真实验, 取  $\mu = -0.01$ , 图 1 为最终收敛到稳定平衡点  $x^* = 0$  的运动轨迹, 图 2 为其相平面图; 取  $\mu = 0.01$ , 图 3 为周期解的运动轨迹, 图 4 为其相平面图. 实验表明了我们所得结果的正确性.

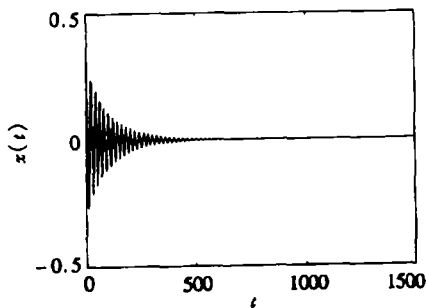


图 1 稳定解时  $x$  的运动轨迹

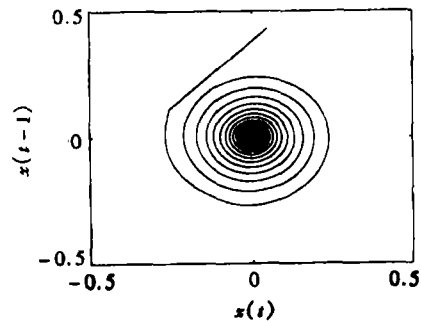


图 2 稳定解时系统的相平面图

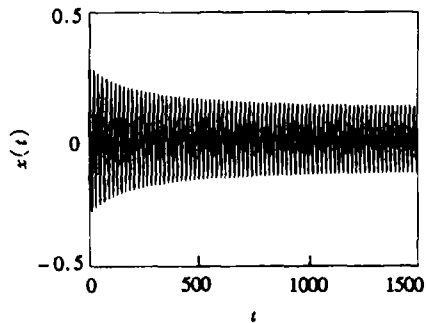


图 3 周期解时  $x$  的运动轨迹

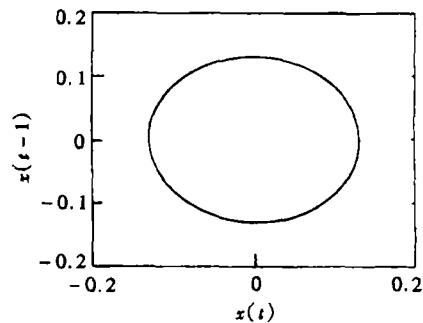


图 4 周期解时系统的相平面图

#### 5 结束语

本文我们利用中心流形定理与文献 [12] 中的方法讨论了一个带时延神经网络的 Hopf 分岔以及分岔周期解的稳定性. 尽管我们的神经网络模型有些特殊, 但它为神经网络分岔现象的研究进行了一次有益的尝试与探讨, 对于更一般的模型的讨论, 由于计算公式的复杂性, 有时在实际计算中用我们讨论的方法就显得力不从心, 这方面的工作将深入进行.

#### 参 考 文 献

- [1] Hopfield J J. Neurons with graded response have collective computational properties like those of two state neurons. Proceeding of Natural Academy Science of USA, 1984, 81(10): 3088-3092.

- [2] Chua L O, Roska T. The CNN paradigm. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, 1993, CAS-40(3): 147-156.
- [3] Baldi P, Atiya A F. How delays affect neural dynamics and learning. *IEEE Trans. on Neural Networks*, 1994, NN-5(4): 612-621.
- [4] Civalleri P P, Gilli M, Pandolfi L. On stability of cellular neural networks with delay. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, 1993, CAS-40(3): 157-165.
- [5] Liao X F, Yu J B. Qualitative analysis of bi-directional associative memory with time delay. *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 1998, 26(2): 219-229.
- [6] Liao X, Liu G Y, Yu J B. Stability analysis of BAM with time delay. *Journal of Electronics(China)*, 1997, 14(4): 345-351.
- [7] Liao X F, Yu J B. Stability analysis of Bi-directional associative memory with axonal signal transmission delays. *ICSP'96, Beijing, China: 1996*, 1457-1460.
- [8] Zhang Y. Global exponential stability and periodic solutions of delay Hopfield neural networks. *International Journal of Systems Science*, 1996, 27(2): 227-231.
- [9] Zhang Y, Zhong S M, Li Z L. Periodic solutions and stability of Hopfield neural networks with variable delays. *International Journal of Systems Science*, 1996, 27(9): 895-901.
- [10] Gopalsamy K, Leung I K C. Convergence under dynamical thresholds with delays. *IEEE Trans. on Neural Networks.*, 1997, NN-8(2): 341-348.
- [11] Zou F, Nossek J A. Bifurcation and chaos in cellular neural networks. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, 1993, CAS-40(3): 166-173.
- [12] Hassard B D, Kazarinoff N D, Wan Y H. *Theory and Applications of Hopf Bifurcation*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1981.

## STUDY OF BIFURCATION PHENOMENON FOR A NEURAL NETWORK WITH TIME DELAY

Wang Yan    Liao Xiaofeng\*    Wu Zhongfu\*    Yu Juebang

(Dept. of Opto-Electron. Tech., Univ. of Electron. Sci. & Tech. of China, Chengdu 610054)

\*(Institute of Computer, Univ. of Chongqing, Chongqing 400044)

**Abstract** In this paper, Hopf bifurcation of a neural network with time delay is discussed in detail. The stability of periodic solutions is also studied by utilizing center manifold theorem. Algorithms for determining the asymptotic stability, direction of bifurcation, period, and asymptotic form of these solutions are presented. All of the theoretical analyses are testified by computer simulations.

**Key words** Neural network with time delay, Hopf bifurcation, Asymptotic stability of periodic solutions, Center manifold

王 炎: 男, 1972 年生, 博士生, 主要研究方向是人工神经网络、CDMA 通信系统等.

廖晓峰: 男, 1964 年生, 博士后, 教授, 主要研究方向是神经网络稳定性理论和应用研究.

吴中福: 男, 1938 年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向是神经网络和协同计算等.

虞厥邦: 男, 1932 年生, 教授, 博士生导师, 主要研究领域是非线性网络理论、人工神经网络等.