

# 一类非自治系统混沌细胞模型研究<sup>1</sup>

卢元元 丘水生\* 周小安\*

(深圳大学信息工程学院 深圳 518060)

\*(华南理工大学电子与信息学院 广州 510640)

**摘要** 该文研究非自治系统混沌吸引子,通过对 Genesio 系统深入的数学分析和数字仿真,得出一类非自治系统的混沌细胞模型。

**关键词** 非自治混沌系统,鞍焦平衡点,半稳定极限环,混沌模型

**中图分类号** TN711.4

## 1 引言

混沌的产生机理和混沌判据的研究一直是混沌领域科学家们所关心的问题。Shil'nikov 定理<sup>[1]</sup>指出自治系统中若存在满足一定条件的鞍焦平衡点及其同宿轨道,则存在混沌。该方法原理清楚,但同宿轨道不易用数值方法得到,更无法用解析法获得。文献[2,3]则指出在三阶自治系统混沌吸引子中存在着由一个鞍焦平衡点和一个半稳定极限环构成的混合吸引子,并依此提出了混沌细胞模型和混沌存在判据。这一混合吸引子理论赋予混沌吸引子更为清晰具体的形象,给科学家们提供了更易于使用的混沌存在判据,为研究混沌的同步、控制和应用开辟了新的途径。文献[3]提出的混沌存在判据如定理1所述。

**定理 1** 三阶自治系统中,若满足条件:

(1) 存在一个鞍焦平衡点  $x_e$ , 其特征值为  $\gamma, \sigma \pm j\omega$ , 且满足

$$\gamma < 0, \quad \sigma > 0, \quad |\gamma| > |\sigma| \quad (1)$$

(2) 存在一个对内吸引、对外排斥的半稳定极限环 LC, 其对外排斥的不稳定流形  $w^u$  为单向运动流形, (3) 其余平衡点和极限环是不稳定的, 则该系统存在一个混沌吸引子。

Shil'nikov 定理及混合吸引子理论所研究的都是自治系统,为研究非自治系统的混沌吸引子,本文对 Genesio 非自治系统进行了深入的数学分析和数字仿真,得出了与自治系统混沌细胞模型和混合吸引子理论相类似的结果。

## 2 数学分析和数字仿真

Genesio 系统方程

$$\ddot{x} + k\ddot{x} + 1.1\dot{x} + x - x^2 = A \sin t, \quad k = 0.55 \quad (2)$$

令  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}$ ,  $x_3 = \ddot{x}$  则有状态方程

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -0.55x_3 - 1.1x_2 - x_1 + x_1^2 + A \sin t \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

<sup>1</sup> 2000-02-03 收到, 2000-10-09 定稿  
国家自然科学基金资助

## 2.1 自治系统

为更透彻地了解非自治 Genesisio 系统, 首先研究其对应的自治系统. 取 (2) 式中的  $A$  为零, 则 (2) 式为自治系统. 可求得平衡点及其等效线性方程的特征值列于表 1. 可见, 该自治系统有两个鞍焦平衡点.

表 1 Genesisio 自治系统的平衡点

平衡点	$(x_1, x_2, x_3)$ 坐标	特征值	性质
$Q_1$	(0,0,0)	$\lambda_1 = -0.781$ $\lambda_{2,3} = 0.1155 \pm j1.1256$	鞍焦平衡点
$Q_2$	(1,0,0)	$\lambda_1 = 0.5734$ $\lambda_{2,3} = -0.5617 \pm j1.1952$	鞍焦平衡点

用等效小参量法<sup>[4]</sup>可求得自治 Genesisio 系统的唯一周期解, 记为  $LC'$ , 其表达式为

$$x = 0.2059 + 0.5721 \cos 1.0391t - 0.00562 \cos 2.0782t - 0.02142 \sin 2.0782t \quad (4)$$

其主振分量为

$$x_0 = A_0 + A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t = 0.2059 + 0.5721 \cos 1.0391t \quad (5)$$

设有直流扰动  $\Delta A_0$ , 同频扰动  $\Delta A_1$  及  $\Delta B_1$ , 用文献 [5] 中介绍的判断周期解稳定性的方法, 可得方程

$$\begin{bmatrix} (1.1s + 0.5882) & -0.5721 & 0 \\ -1.1442 & (-2.1393s - 0.0057) & (1.1430s + 0.0211) \\ 0 & (1.1430s + 0.0211) & (2.1393s + 0.0057) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta A_0 \\ \Delta A_1 \\ \Delta B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

求得 (6) 式的特征根为

$$\lambda_1 = -0.002798, \quad \lambda_{2,3} = -0.2721 \pm j0.3840 \quad (7)$$

特征根均有负实部, 可见, 该周期解是稳定的.

为验证数学分析的正确性, 采用四阶龙格库塔法对 (2) 式进行了数字仿真, 得  $x$  的稳态波形与 (4) 式一致, 说明数学分析的结果是正确的 (因篇幅所限, 波形图未在文中给出). 图 1 给出系统的平衡点和极限环在  $x_1 - x_2$  平面的投影.

## 2.2 非自治系统

当 (2) 式中  $A$  不为零时, 则为非自治系统. 若  $A$  较大, 数字仿真解会发散, 为观察到“稳定”的混沌波形, 取  $A = 0.05$ .

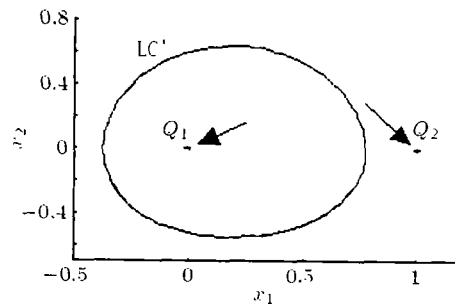


图 1 Genesisio 自治系统的平衡点和极限环相图

数字仿真得到的  $x_1$  波形图示于图 2，其功率谱密度示于图 3。系统的三维相图及其在两个二维平面上的投影示于图 4。用文献 [6] 介绍的方法可找到该系统的 1 周期、2 周期、4 周期、5 周期、6 周期轨道，图 5 中给出了 1 周期轨道的相图。

由以上数字仿真结果可见，该非自治系统处于混沌状态。为进一步研究混沌吸引子，对该系统进行数学分析。用等效小参量法求得两个周期解  $LC_1$  和  $LC_2$  及其稳定性分析结果列于表 2。

$LC_1$  和  $LC_2$  是两个小极限环，由图 4 可见，系统还应该有一个大的极限环未能由解析法求出。前面由数值方法求出的 1 周期轨道满足系统方程，是系统的一个周期解，用  $LC_3$  表示。采用频谱分析及最小二乘法进行数值拟合求出  $LC_3$  的解析表达式列于表 2。图 6 是根据  $LC_3$  表达式画出的相图，与图 5 比较，两者完全一致，说明拟合是成功的。

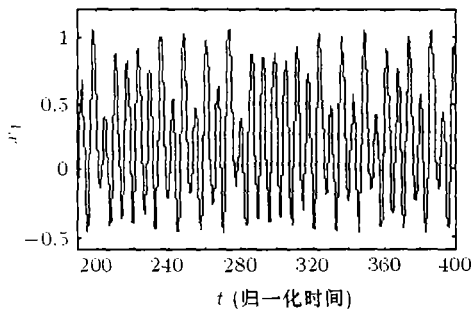


图 2 非自治 Genesio 系统  $x_1$  波形图

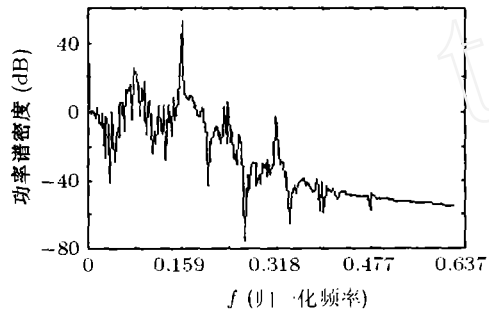


图 3 非自治 Genesio 系统  $x_1$  低频段功率谱

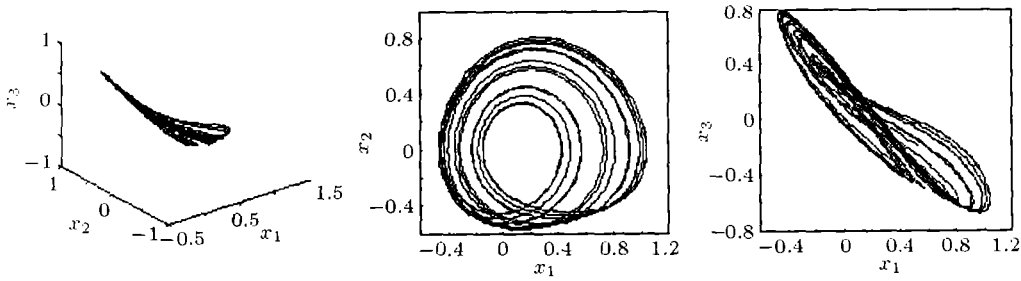


图 4 非自治 Genesio 系统相图

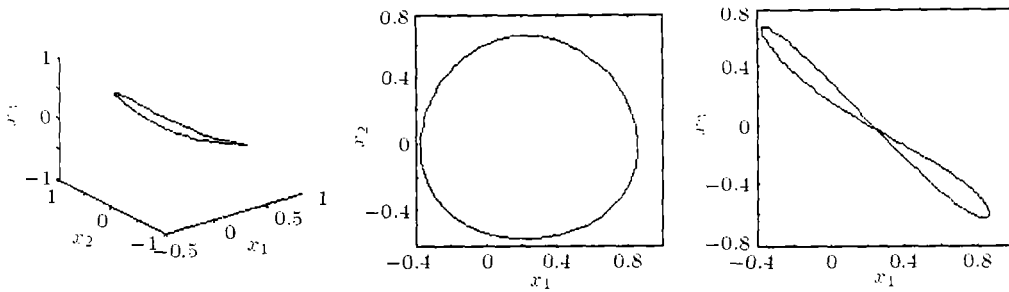


图 5 非自治 Genesio 系统 1 周期轨道

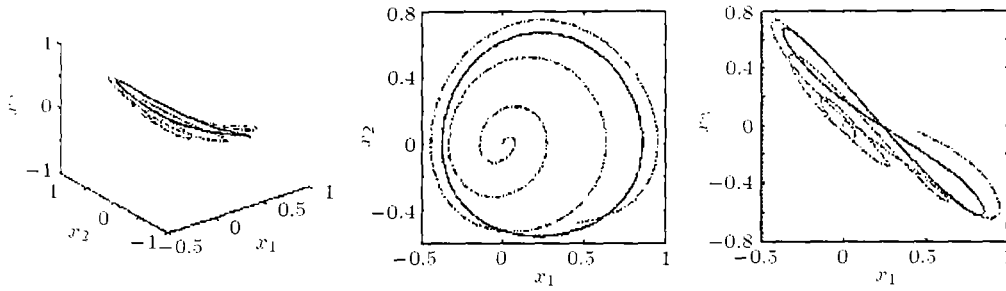


图6 非自治 Genesio 系统 LC<sub>3</sub> 的相图及其吸引域分析

表2 非自治 Genesio 系统的周期解

周期解	表达式	稳定性分析		性质
		扰动	特征根	
LC <sub>1</sub>	$x = 0.006245 - 0.02457 \cos t + 0.1086 \sin t - 0.00027 \cos 2t + 0.001015 \sin 2t$	$\Delta A_0, \Delta A_1, \Delta B_1$	$\lambda_1 = -0.8893$ $\lambda_{2,3} = 0.1911 \pm j0.0581$	不稳定极限环
LC <sub>2</sub>	$x = 0.995 - 0.00208 \cos t - 0.03215 \sin t + 0.000046 \cos 2t + 0.0000641 \sin 2t$	$\Delta A_0, \Delta A_1, \Delta B_1$	$\lambda_1 = 0.9076$ $\lambda_{2,3} = -0.5875 \pm j0.03929$	不稳定极限环
LC <sub>3</sub>	$x = 0.2503 - 0.5418 \cos t - 0.2876 \sin t + 0.0195 \cos 2t - 0.0233 \sin 2t + 0.0007 \cos 3t + 0.0006 \sin 3t$	$\Delta A_0$ $\Delta A_1, \Delta B_1$ $\Delta A_0, \Delta A_1, \Delta B_1$	$\lambda_1 = -0.4701$ $\lambda_{2,3} = -0.0400 \pm j1.0300$ $\lambda_{1,2} = 0.0029 \pm j0.0510$ $\lambda_1 = -0.3267$ $\lambda_{2,3} = -0.3114 \pm j0.5050$ $\lambda_{4,5} = 0.0557 \pm j0.8927$	直流扰动稳定, 同频交流扰动不稳, 直流扰动和交流扰动共同作用时不稳定.

用前述稳定性判断法<sup>[5]</sup>对 LC<sub>3</sub> 进行稳定性分析的结果在表 2 中给出。可见, LC<sub>3</sub> 对直流扰动稳定, 对交流扰动不稳定, 是半稳定极限环。为进一步确定其吸引域和排斥域, 在极限环 LC<sub>3</sub> 内取初值  $X = [0, 0, 0]$  对 (2) 式进行一段时间的仿真计算, 所得相图为图 6 中点划线所示。由该图可清楚地看到极限环 LC<sub>3</sub> 吸引其内部相点, 排斥其外部相点, 且  $w^u$  为直线运动流形。图 7 是相点与极限环 LC<sub>3</sub> 的距离曲线, 可见, 相点最初与 LC<sub>3</sub> 距离较大, 由于受 LC<sub>3</sub> 的吸引, 距离逐渐变小, 大约  $t = 18$  时距离最小; 之后相点又受到 LC<sub>3</sub> 的排斥, 向远离 LC<sub>3</sub> 的方向运动, 距离逐渐变大。

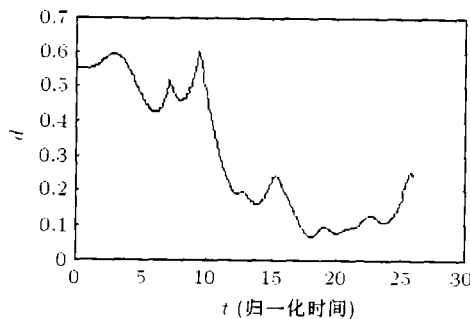


图7 非自治 Genesio 系统相点与极限环 LC<sub>3</sub> 的距离曲线

### 3 结果分析

由图 1 可见, Genesio 自治系统的极限环  $LC'$  内含有一个平衡点  $Q_1$ 。由表 1 可知,  $Q_1$  是满足定理 1 中条件 1 的鞍焦平衡点, 但 (7) 式却表明  $LC'$  是稳定的极限环, 它不满足定理 1 的条件 2, 因此  $LC'$  和  $Q_1$  未构成混沌混合吸引子, 该自治系统运行于周期振荡状态。可以想象, 若由于参数变化等原因使  $LC'$  变为对内吸引对外排斥的半稳定极限环, 则系统满足定理 1 的条件,  $Q_1$  和  $LC'$  会构成一对混合吸引子, 系统会产生混沌。事实上, 文献 [6] 已实验证实, 将自治 Genesio 系统中参数  $k$  由 0.55 改为 0.45 时, 系统发生混沌。

原自治系统的平衡点是非自治系统的静态平衡点(外信号为零时的平衡点)。在静态平衡点  $Q_1$  和  $Q_2$  处各产生了一个振幅很小、与外信号频率相同的极限环  $LC_1$  和  $LC_2$ , 它们都是不稳定的, 在讨论混沌吸引子时可以不考虑它们的影响。

将表 2 中的  $LC_3$  表达式与 (4) 式比较可知, 非自治系统  $LC_3$  的振幅、频率和直流分量都与自治系统的  $LC'$  接近, 但它们的稳定性不同。由于外信号的干扰, 原稳定的极限环  $LC'$  变为对内吸引、对外排斥的半稳定极限环  $LC_3$ 。正是由于这一改变, 使原稳定振荡系统变为混沌系统。

自治系统中, 满足 (1) 式的鞍焦平衡点  $Q_1$  具有螺旋运动的不稳定流形  $w^u$  和单向运动的稳定流形  $w^s$ [2,3]。非自治系统中, 由于外信号的干扰, 系统运动轨线有所改变, 但因为外信号幅值很小,  $Q_1$  附近相轨运动的大趋势不会变。因此, 在该非自治系统中, 鞍焦静态平衡点  $Q_1$  和半稳定极限环  $LC_3$  各为一个半吸引子, 且构成一对混合吸引子。它们相互吸引对方的  $w^u$ , 从而形成循环相轨流。这一过程可用图 6 说明。当相点从  $Q_1 = [0, 0, 0]$  出发时, 受  $Q_1$  的排斥和  $LC_3$  的吸引, 相点螺旋运动远离  $Q_1$  并逐渐接近  $LC_3$ ; 当相点靠近  $LC_3$  时, 受到  $LC_3$  的排斥, 单向运动远离  $LC_3$ ; 在远离  $LC_3$  的过程中, 相点与  $Q_1$  的  $w^s$  相遇, 重新落回到螺旋运动曲面。这样循环往复, 形成有形但随机性又很强的混沌吸引子。

### 4 结 论

以上实验结果和分析表明, 文献 [2, 3] 提出的自治系统混沌细胞模型和混合吸引子理论可推广到非自治系统, 作为本文的结论, 将这一理论简述如下。

一类非自治系统混沌吸引子中存在混合吸引子, 它由一个鞍焦静态平衡点  $x_e$  和一个半稳定极限环  $LC$  组成。每一半吸引子吸引另一半吸引子的不稳定流形。这样形成的循环相轨流中存在无穷多个层层嵌套的周期轨道。据此可给出如下细胞模型: 一个混沌吸引子由一个或多个细胞组成。最简单的吸引子只有一个细胞, 其基本模型如图 8 所示。细胞核心为静态平衡点  $x_e$ , 细胞体是由螺线相轨簇组成的涡卷  $x_s$ , 它受到细胞外层的一个主极限环  $LC$  的吸引和约束。涡卷内外有两个空间分叉区  $C_i$  和  $C_o$ , 将其连接起来的单向运动相轨簇形成细胞的键带  $x_b$ 。相轨到达空间分叉区时的走向是随机的, 这决定了混沌吸引子的长期不可预测性。

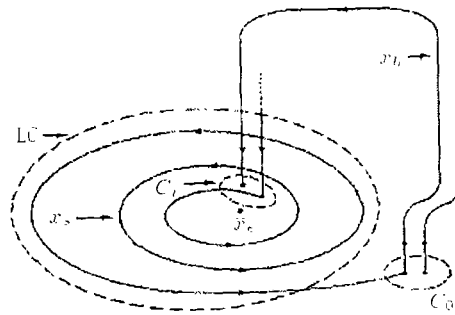


图 8 混沌吸引子的单细胞模型

本文研究的非自治 Genesisio 混沌系统满足定理 1 的 3 个条件: 存在满足条件 1 的鞍焦静态平衡点  $Q_1$  和满足条件 2 的半稳定极限环  $LC_3$ , 并且其余极限环 ( $LC_1$  和  $LC_2$ ) 均不稳定。这验证了作为自治系统混沌存在判据的定理 1 也可推广到一类非自治系统, 这一推广的严格理论证明有待进一步研究。

## 参 考 文 献

- [1] C. Silva, Shil'nikov theorem—a tutorial, IEEE Trans. on Circuits Syst.-I, 1993, 40(10), 675–682.
- [2] Shui-Sheng Qiu, A cell model of chaotic attractor, IEEE ISCAS'97, Hong Kong, 1997, 1033–1036.
- [3] 丘水生, 混沌吸引子细胞模型研究的新结果, 中国第十四届电路与系统学术年会论文集, 福州, 1998, 37–41.
- [4] Shui-Sheng Qiu, Calculation of steady-state oscillations in non-linear circuits, Int. J. Electronics, 1989, 67(3), 403–414.
- [5] Shui-Sheng Qiu, On verification of limit cycle stability in autonomous nonlinear systems, IEEE Trans. on Circuits Syst., 1988, 35(8), 1062–1064.
- [6] 钟晓旭, 三阶混沌系统的仿真与分析, [硕士论文], 广州, 华南理工大学, 1998.

STUDY ON CHAOTIC CELL MODEL IN  
A KIND OF NONAUTONOMOUS SYSTEMS

Lu Yuanyuan    Qiu Shuisheng    Zhou Xiaoran

(College of Information Engineering, Shenzhen University, Shenzhen 518060, China)

\*(College of Electron. and Info., South China Univ. of Tech., Guangzhou 510640, China)

**Abstract** This paper studies chaotic attractors in nonautonomous nonlinear systems. Based on the mathematical analysis and digital simulation of the Genesisio system in detail, a cell model of chaotic attractor in a kind of nonautonomous systems is obtained.

**Key words** Nonautonomous chaotic system, Saddle focus equilibrium point, Semi-stable limit cycle, Chaos model

卢元元: 女, 1955 年生, 副教授, 主要研究方向为电子线路 CAD、模拟电路故障诊断、混沌及保密通信。

丘水生: 男, 1940 年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为非线性系统理论、功率电子学、混沌及保密通信。

周小安: 男, 1969 年生, 博士, 主要研究方向为非线性系统理论、混沌及保密通信。