

尺度空间检测边缘特征的进化分析¹

姬光荣 王国宇 谭锐 冯天瑾 陈霞

(青岛海洋大学电子工程系 青岛 266003)

摘要 多尺度分析中的一个重要问题是检测特征的尺度空间进化规律。本文以 2-D 高斯函数作为核函数, 明确给出了角点图像的尺度空间检测边缘是一个由角边界的斜率和分析尺度共同决定的椭圆。以此为基础, 讨论了尺度因子对相邻角点检测边缘的同化效应, 给出了角最小分辨率与分析尺度的关系不等式。本文的结果对多尺度分析具有普遍性参考意义。

关键词 尺度空间, 检测边缘, 进化分析, 同化, 角最小分辨率

中图分类号 TN911.7, TP391.7

1 引言

边缘和角点常被作为重要的特征应用于图像分析及计算机视觉的目标识别等方面。Marr 和 Hildreth^[1] 曾提出“空间一致性”假设分类零交叉边缘。Witkin^[2] 分析了一个经高斯核函数平滑后的信号在连续尺度(高斯核函数的标准差)空间零交叉边缘的变化情况, 后来由 Yuille 和 Poggio^[3] 等发展为“尺度定理”。

近年来, 以小波变换为代表的多尺度分析方法受到普遍重视。视觉生理和心理学方面的研究表明生物视觉(包括人的视觉)采用多通道方法处理低级传感数据。多尺度图像分析可以统一在小波变换的理论之下^[4]。S. Mallat^[5-7] 提出了小波分解和重构的塔式算法, 研究了信号在小波变换下零交叉表示的稳定性和完全性问题。

基于小波变换的尺度空间检测特征的进化规律与所选取的小波基函数形式密切相关, 亦即关系到优化小波基的选取问题。本文以 2-D 高斯函数作为核函数, 分析了角点检测边缘的尺度空间进化规律。由于高斯函数具有在 Heisenberg 测不准原理下时-频局部化最优的性质, 所以本文的结果对多尺度分析具有普遍性参考意义。

2 尺度空间边缘检测

取含有角点和线性边缘的图像:

$$f(x, y) = AU(y + kx) \times U(y - kx), \quad (1)$$

其中 k 为直线的斜率, A 为图象的灰度值, $U(\cdot)$ 为单位阶跃函数,

$$U(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (2)$$

取 2-D 高斯函数作为核函数:

$$G(x, y) = (1/2\pi) \exp[-(x^2 + y^2)/2]. \quad (3)$$

¹ 1998-07-15 收到, 1999-01-23 定稿
国家自然科学基金(69675005)和 863 项目(03-08)资助课题

在高斯函数中引入尺度因子:

$$G_{\sigma}(x, y) = (1/\sigma^2)G(x/\sigma, y/\sigma), \quad (4)$$

则尺度空间的 Marr-Hildreth 零交叉边缘检测算子为

$$\nabla^2[f(x, y) * G_{\sigma}(x, y)] = 0, \quad (5)$$

其中

$$\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 \quad (6)$$

为拉普拉斯算子. “*”表示卷积运算.

在(5)式中, 交换微分与卷积运算的次序,

$$\begin{aligned} & \nabla^2[f(x, y) * G_{\sigma}(x, y)] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} * G_{\sigma}(x, y) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} * G_{\sigma}(x, y) \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

记

$$E(\sigma, x, y) = f(x, y) * G_{\sigma}(x, y); \quad (8)$$

由(1)式,

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = A[\delta(y+kx)U(y-kx) + \delta(y-kx)U(y+kx)], \quad (9)$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = Ak[\delta(y+kx)U(y-kx) - \delta(y-kx)U(y+kx)], \quad (10)$$

由(8), (9)式, 我们有

$$\begin{aligned} E_y(\sigma, x, y) &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} * G_{\sigma}(x, y) \\ &= \frac{A}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}\right\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(1+k^2)u^2}{2\sigma^2}\right\} \\ &\quad \times \left[\exp\left\{\frac{(x-ky)u}{\sigma^2}\right\} + \exp\left\{\frac{(x+ky)u}{\sigma^2}\right\} \right] du. \end{aligned} \quad (11)$$

将积分号内部右端的项级数展开, 交换积分与求和的次序, 利用公式:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^j \exp\left\{-\frac{1}{2}u^2\right\} du = \begin{cases} \sqrt{2\pi}(j-1)!!, & j = 0, 2, 4, \dots; \\ 0, & j = 1, 3, 5, \dots; \end{cases}$$

这里, $(j-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (j-1)$, 得到

$$E_y(\sigma, x, y) = H \left[\exp\left\{-\frac{(y+kx)^2}{2(1+k^2)\sigma^2}\right\} + \exp\left\{-\frac{(y-kx)^2}{2(1+k^2)\sigma^2}\right\} \right], \quad (12)$$

其中 $H = A/\sqrt{2\pi(1+k^2)}\sigma$. (12)式的推导见附录.

类似的, 利用 (8), (10) 式的结果, 得到

$$E_x(\sigma, x, y) = kH \left[\exp \left\{ -\frac{(y+kx)^2}{2(1+k^2)\sigma^2} \right\} - \exp \left\{ -\frac{(y-kx)^2}{2(1+k^2)\sigma^2} \right\} \right]. \quad (13)$$

由此,

$$E_{xx}(\sigma, x, y) = k^2 H \left[-\frac{(y+kx)}{(1+k^2)\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{(y+kx)^2}{2(1+k^2)\sigma^2} \right\} - \frac{(y-kx)}{(1+k^2)\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{(y-kx)^2}{2(1+k^2)\sigma^2} \right\} \right], \quad (14)$$

$$E_{yy}(\sigma, x, y) = H \left[-\frac{(y+kx)}{(1+k^2)\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{(y+kx)^2}{2(1+k^2)\sigma^2} \right\} - \frac{(y-kx)}{(1+k^2)\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{(y-kx)^2}{2(1+k^2)\sigma^2} \right\} \right]. \quad (15)$$

将 (14), (15) 式的结果代入 (5) 式, 略去常数项, 得到

$$(y+kx) \exp \left\{ -\frac{(y+kx)^2}{2(1+k^2)\sigma^2} \right\} + (y-kx) \exp \left\{ -\frac{(y-kx)^2}{2(1+k^2)\sigma^2} \right\} = 0. \quad (16)$$

该方程的解即为尺度空间所检测的零交叉边缘曲线。

3 检测边缘的尺度空间进化分析

3.1 尺度空间线性边缘和角点边缘的进化分析

3.1.1 线性边缘部分 这里的线性边缘指 $f(x, y) = AU(y+kx)$ 或 $f(x, y) = AU(y-kx)$ 的边缘。由 (16) 式, 当求和的两部分互相之间不产生影响时所检测的零交叉边缘分别为

$$y+kx=0 \quad (17)$$

和

$$y-kx=0 \quad (18)$$

两条直线。该结果隐含说明了对原图像边缘曲率半径大于所使用的分析尺度 (核函数曲率半径, 此处为高斯函数的标准差) 部分, 所检测边缘将不产生形变。

3.1.2 角点部分 为突出讨论角点部分的尺度空间检测边缘进化, 我们将 (16) 式在角点位置 (0, 0) 进行三阶 Taylor 展开, 得到

$$y^2 + 3k^2x^2 = 2(1+k^2)\sigma^2 \quad (19)$$

这是一个由角点边界直线的斜率 k 和尺度因子 σ 所共同决定的椭圆。

角点图像的尺度空间检测边缘为上述二个部分的合成。

3.2 尺度因子对相邻角点检测边缘的同化作用

可以直观想象, 所使用的分析尺度因子越大, 对原图像边缘的平滑作用也越大, 由此导出尺度空间角的最小分辨率问题。为讨论尺度因子对相邻角点检测边缘的同化效应, 我们取待分析图像为

$$f(x, y) = f_1(x, y) + f_2(x, y), \quad (20)$$

其中

$$f_1(x, y) = AU[y - k(x - a)]U[y + k(x - a)], \quad (21)$$

$$f_2(x, y) = AU[y - k(x + a)]U[y + k(x + a)], \quad (22)$$

a 为角点中心到原点的距离. 由于卷积和偏导数均为线性算子, 借助前述结果, 我们有

$$E^Z(x, y) = E_1^Z(x, y) + E_2^Z(x, y) \quad (23)$$

其中

$$E_1^Z(x, y) = H \left\{ [y + k(x - a)] \exp \left\{ -\frac{[y + k(x - a)]^2}{2(1 + k^2)\sigma^2} \right\} + [y - k(x - a)] \exp \left\{ -\frac{[y - k(x - a)]^2}{2(1 + k^2)\sigma^2} \right\} \right\}, \quad (24)$$

$$E_2^Z(x, y) = H \left\{ [y + k(x + a)] \exp \left\{ -\frac{[y + k(x + a)]^2}{2(1 + k^2)\sigma^2} \right\} + [y - k(x + a)] \exp \left\{ -\frac{[y - k(x + a)]^2}{2(1 + k^2)\sigma^2} \right\} \right\}. \quad (25)$$

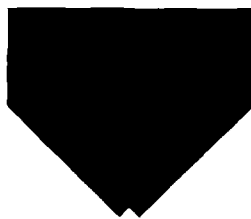
令 $E^Z(x, y) = 0$ 且将其在原点 $(0, 0)$ 位置进行三阶 Taylor 展开, 略去常数项, 可以近似得到如下结果

$$y^2 + 3k^2x^2 = 2(1 + k^2)\sigma^2 - 3k^2a^2. \quad (26)$$

当上式右端大于零时, 该式是一个椭圆方程. 由此导出

$$\sigma > \sqrt{3k^2/(1 + k^2)}a. \quad (27)$$

该式说明, 对于两个相邻距离为 $2a$ 的角点, 当分析尺度满足 (27) 式时, 它们的检测边缘将被同化为一个椭圆. 该式同时也给出了尺度空间角点检测边缘的最小分辨率. 我们以实验结果验证了该关系的正确性. 图 1 给出了不同分析尺度时的边缘检测示意图, 其中 (a) 为原图象 (角点至原点的距离 $a = 11$), (b) 分别为 $\sigma = 4, \sigma = 8, \sigma = 10, \sigma = 12, \sigma = 14$ 时的边缘检测结果, 为便于观察, 按尺度因子顺序依次进行了纵向平移.



(a) 原图象



(b) $\sigma = 4, 8, 10, 12, 14$ 时的边缘检测结果(由上而下)

图 1 边缘检测示意图

4 基于小波变换的多尺度边缘检测讨论

取 2-D 高斯函数作为平滑函数:

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right). \quad (28)$$

以 2-D 高斯函数的二阶导数作为小波:

$$\psi(x, y) = \nabla^2 G(x, y). \quad (29)$$

可以证明,

$$\iint_{R^2} \psi(x, y) dx dy = 0, \quad (30)$$

$$\iint_{R^2} \frac{|\hat{\psi}(\omega_x, \omega_y)|^2}{\omega_x^2 + \omega_y^2} d\omega_x d\omega_y < \infty, \quad (31)$$

因此 $\psi(x, y)$ 满足小波的允许性条件. 在高斯函数中引入尺度因子:

$$G_\sigma(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right], \quad (32)$$

$$\psi_\sigma(x, y) = \frac{1}{\sigma^2} \psi\left(\frac{x}{\sigma}, \frac{y}{\sigma}\right) = \frac{-1}{2\pi\sigma^2} \left(2 - \frac{x^2 + y^2}{\sigma^2}\right) \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (33)$$

函数 $f(x, y)$ 关于尺度 σ 在位置 (x, y) 的小波变换定义为

$$W_\sigma f(x, y) = f(x, y) * \psi_\sigma(x, y) = \sigma^2 \nabla^2 [f(x, y) * G_\sigma(x, y)]. \quad (34)$$

令

$$\nabla^2 [f(x, y) * G_\sigma(x, y)] = 0, \quad (35)$$

该方程的解即为尺度空间所检测的零交叉边缘曲线, 它对应于尺度空间的 Marr-Hildreth 零交叉边缘检测算子. 由此, 前述分析结果均可适用. 对于小波变换的多分辨分析, 注意到平滑函数的多次平滑卷积可等效为一个合成尺度平滑函数的作用, 所以本文的结果仍可适用, 在此不作详细讨论. 由于高斯函数具有在 Haisenberg 测不准原理下时-频局部化最优的性质, 所以本文的结果对多尺度检测边缘的进化分析具有普遍性参考意义.

5 结 论

本文以高斯函数作为核函数, 分析了尺度空间边缘检测的进化规律. 明确给出角点图像的尺度空间检测边缘是一个由原图像边界夹角的斜率 k 和尺度因子 σ 共同决定的椭圆. 随着尺度的增加, 两个相邻角点的检测边缘将被尺度因子同化为一个椭圆, 由此给出了尺度空间角点检测边缘的最小分辨率. 由于高斯函数具有在 Haisenberg 测不准原理下时-频局部化最优的性质, 所以本文的结果对多尺度分析具有普遍性参考价值.

附 录

(12) 式的推导

由

$$f(x, y) = A[U(y + kx)U(y - kx)], \quad (\text{A-1})$$

$$f_y(x, y) = A[\delta(y + kx)U(y - kx) + \delta(y - kx)U(y + kx)], \quad (\text{A-2})$$

$$f_x(x, y) = Ak[\delta(y + kx)U(y - kx) - \delta(y - kx)U(y + kx)], \quad (\text{A-3})$$

则

$$\begin{aligned} E_y(x, y) &= f_y(x, y) * G_\sigma(x, y) \\ &= \frac{A}{2\pi\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x-u)^2}{2\sigma^2}\right\} \left[\int_{ku}^{\infty} \delta(v+ku) \exp\left\{-\frac{(y-v)^2}{2\sigma^2}\right\} dv \right] du \\ &\quad + \frac{A}{2\pi\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x-u)^2}{2\sigma^2}\right\} \left[\int_{-ku}^{\infty} \delta(v-ku) \exp\left\{-\frac{(y-v)^2}{2\sigma^2}\right\} dv \right] du \\ &= \frac{A}{2\pi\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x-u)^2}{2\sigma^2}\right\} \left[\exp\left\{-\frac{(y+ku)^2}{2\sigma^2}\right\} + \exp\left\{-\frac{(y-ku)^2}{2\sigma^2}\right\} \right] du \\ &= \frac{A}{2\pi\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\exp\left\{-\frac{(x-u)^2 + (y+ku)^2}{2\sigma^2}\right\} \right. \\ &\quad \left. + \exp\left\{-\frac{(x-u)^2 + (y-ku)^2}{2\sigma^2}\right\} \right] du. \end{aligned} \quad (\text{A-4})$$

又

$$\begin{aligned} (x-u)^2 + (y+ku)^2 &= (x^2 + y^2) + (1+k^2)u^2 - 2(x-ky)u, \\ (x-u)^2 + (y-ku)^2 &= (x^2 + y^2) + (1+k^2)u^2 - 2(x+ky)u, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_y(x, y) &= \frac{A}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{(x^2 + y^2)}{2\sigma^2}\right\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(1+k^2)u^2}{2\sigma^2}\right\} \\ &\quad \times \left[\exp\left\{\frac{(x-ky)u}{\sigma^2}\right\} + \exp\left\{\frac{(x+ky)u}{\sigma^2}\right\} \right] du. \end{aligned} \quad (\text{A-5})$$

将积分号内部右端方括号内的项级数展开:

$$\left[\exp\left\{\frac{(x-ky)u}{\sigma^2}\right\} + \exp\left\{\frac{(x+ky)u}{\sigma^2}\right\} \right] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\sigma^{2m}} [(x-ky)^m - (x+ky)^m] u^m, \quad (\text{A-6})$$

交换积分与求和的次序, 我们得到

$$\begin{aligned} E_y(x, y) &= \frac{A}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{(x^2 + y^2)}{2\sigma^2}\right\} \\ &\quad \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\sigma^{2m}} [(x-ky)^m + (x+ky)^m] \int_{-\infty}^{\infty} u^m \exp\left\{-\frac{(1+k^2)u^2}{2\sigma^2}\right\} du. \end{aligned} \quad (\text{A-7})$$

利用公式: $\int_{-\infty}^{\infty} u^j \exp\{-\frac{1}{2}u^2\} du = \begin{cases} \sqrt{2\pi}(j-1)!!, & j \text{ 为偶数,} \\ 0, & j \text{ 为奇数.} \end{cases}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^m \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{1+k^2}}{\sigma}u\right)^2\right\} du = \left(\frac{\sigma}{\sqrt{1+k^2}}\right)^{m+1} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{1+k^2}}{\sigma}u\right)^m \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{1+k^2}}{\sigma}u\right)\right\} d\frac{\sqrt{1+k^2}}{\sigma}u$$

在 (A-7) 式中令 $m = 2n$, 我们得到

$$\begin{aligned} E_y(x, y) &= \frac{A}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}\right\} \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!\sigma^{2n}}{(2n)!\sigma^{4n}} \frac{\sqrt{2\pi}\sigma}{(\sqrt{1+k^2})^{2n+1}} [(x-ky)^{2n} + (x+ky)^{2n}] \\ &= \frac{A}{\sqrt{1+k^2}\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}\right\} \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n! \sigma^{2n}} \frac{1}{(1+k^2)^n} [(x-ky)^{2n} + (x+ky)^{2n}] \\ &= \frac{A}{\sqrt{1+k^2}\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}\right\} \\ &\quad \times \left[\exp\left\{\frac{(x-ky)^2}{2(1+k^2)\sigma^2}\right\} + \exp\left\{\frac{(x+ky)^2}{2(1+k^2)\sigma^2}\right\} \right], \end{aligned} \quad (\text{A-8})$$

其中 $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!} = \frac{1}{2^n n!}$. 记: $H = \frac{A}{\sqrt{1+k^2}\sqrt{2\pi}\sigma}$, 又:

$$\begin{aligned} -\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2} + \frac{(x-ky)^2}{2(1+k^2)\sigma^2} &= -\frac{(y+kx)^2}{2(1+k^2)\sigma^2}, \\ -\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2} + \frac{(x+ky)^2}{2(1+k^2)\sigma^2} &= -\frac{(y-kx)^2}{2(1+k^2)\sigma^2}, \end{aligned}$$

故有

$$E_y(x, y) = H \left[\exp\left\{-\frac{(y+kx)^2}{2(1+k^2)\sigma^2}\right\} + \exp\left\{-\frac{(y-kx)^2}{2(1+k^2)\sigma^2}\right\} \right]. \quad (\text{A-9})$$

此式即正文中的 (12) 式.

参 考 文 献

- [1] Marr D, Hildreth E. Theory of edge detection. Proc. Royal Society of London, 1980, B-207, 187-217.
- [2] Witkin A P. Scale space filtering: A new approach to multi-scale description. S. Ullman, W. Richards, eds., Image Understanding, 1984, Norwood, N. J.: Ablex, 1984, 79-95.
- [3] Yuille A L, Poggio T A. Scaling theorems for zero crossings. IEEE Trans. on PAMI, 1986, PAMI-8(1): 15-25.

- [4] 王玉平, 蔡元龙. 多尺度 B 样条小波边缘检测算子. 中国科学 (A 辑), 1995, 25(4): 426-437.
- [5] Mallat S. Zero-crossings of a wavelet transform. IEEE Trans. on Information Theory, 1991, IT-37(4): 1019-1033.
- [6] Mallat S, Sifen Zhong. Characterization of signals from multiscale edges. IEEE Trans. on. PAMI, 1992, PAMI-14(7): 710-732.
- [7] Mallat S, Hwang W L. Singularity detection and processing with wavelets. IEEE Trans. on Information Theory, 1992, IT-38(2): 617-643.

EVOLUTION ANALYSIS OF THE DETECTED EDGE IN SCALE-SPACE

Ji Guangrong Wang Guoyu Tan Rui Feng Tianjin Chen Xia

(Department of Electrical Engineering, Ocean University of Qingdao, Qingdao 266003)

Abstract The detected features evolution in scale-space is an important problem in multiscale analysis. With the 2-D Gaussian function as the kernel, the detected edge of an acute corner in scale-space, that is an ellipse determined by the slope of the corner boundary and the analysis scale, is given out clearly in this paper. Based on this, the assimilative effect of the scale factor to the detected edges of adjacent corners is discussed and the inequality of the distinguishable resolution of the corners in scale-space with the scale factor is given. The results given in this paper can be treated as the general reference for the multiscale analysis.

Key words Scale-space, Edge detected, Evolution analysis, Assimilative, Distinguishable resolution of corners

姬光荣: 男, 1953 年生, 教授, 研究方向为图像分析与模式识别.
王国宇: 男, 1962 年生, 副教授, 研究方向为 3-D 图像分析.
谭 锐: 男, 1943 年生, 副教授, 研究方向为光电技术与机器视觉信息获取.