

同心导体圆盘-圆环结构散射场的一种分析方法

叶春飞 章文勋

(东南大学毫米波国家重点实验室 南京 210018)

摘要 本文从电场积分方程出发,经傅氏变换,并分离出电荷对散射场的贡献,导出了平面波投射于同心圆盘-圆环结构时,分析散射场的一个形式简单且便于求解的积分方程。当平面波正投射时解法尤为简单。据此求解圆盘和/或圆环结构上感应电流分布和相应的散射场。为验证本方法的准确性,对圆盘雷达散射截面(RCS)的计算结果与精确解进行了比较,结果吻合很好。文中还给出了当平面波正投射时,同心圆盘-圆环结构上感应电流各分量的幅度分布和散射场分布。

关键词 电磁散射,雷达散射截面,积分方程,圆盘-圆环结构

1 引言

表面的散射问题曾引起人们不少兴趣^[1,2]。理论上可对任意形状表面的散射进行数值分析。而对于圆盘或圆环的散射问题,则更有简单易行的高频近似方法,如几何绕射理论(GTD)和物理光学近似(PO)可供使用^[3];圆盘的散射场还有精确解^[4]。但对于某些常见的问题,如大而窄圆环,当采用GTD或物理绕射理论(PTD)中的增量长度绕射系数(ILDC)^[5],其精度将受到影响。当有多个圆环时,若考虑到多重绕射,则分析变得十分复杂。若采用矩量法等数值解法,则由于大电尺寸要求较大的计算机容量和较长的计算时间。对这些问题寻求简单易行的解法具有实际意义。

本文针对圆盘-圆环结构的对称性,从电场积分方程(EFIE)出发,应用傅氏变换消去变量 α ,并将散射场分解成感应电流和感应电荷的联合贡献,其中来自电荷的贡献则通过求解相应的微分方程给出通解形式,从而避免了EFIE中关于源的复杂的微积分运算,并将积分方程的维数降至一维,最后结合边缘上电流法向分量为零的条件,确定问题的解。整个推导过程虽比较复杂,但最后得到的需求解的积分方程特别简单,十分便于进行数值计算。

1993-02-22收到,1993-07-30定稿

叶春飞 男,1962年生,讲师,博士,现在上海铁道学院电信工程系从事微波通信、天线和电波传播的教学和研究工作。邮政编码为:上海200333。

章文勋 男,1937年生,教授,博士生导师,中国电子学会会士,IEE会士,IEEE高级会员。现从事电磁场工程理论及应用,包括天线、散射和导波等研究工作。

2 积分方程

电场积分方程可写为

$$\mathbf{E}^{\text{inc}} + (\nabla\nabla \cdot + k^2) \int_S \mathbf{J}\phi dS' = 0, \quad \mathbf{r} \in S, \quad (1)$$

式中 $\mathbf{J} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}/(4\pi j\omega\epsilon_0)$; $\phi = \exp(-jkR)/R$, $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$; S 为散射表面; \mathbf{E}^{inc} 为入射电场的切向分量; \mathbf{r}, \mathbf{r}' 分别为场点和源点的矢径; ∇ 为横向算子, 已略去下标 z .

散射电场 \mathbf{E}^{sc} 可认为来自感应面电流分布 $k^2 \int_S \mathbf{J}\phi dS'$ 和感应面电荷分布 $\nabla\nabla \cdot \int_S \mathbf{J}\phi dS'$ 的联合贡献。这里, 由于面电荷项的存在使得(1)式的处理变得复杂。我们将把(1)式写成适合作傅氏变换处理的分量形式, 而将面电荷对散射场的贡献通过微分方程直接写出其通解形式。

2.1 电场积分方程的分量形式

应用二维散度定理

$$\int_S \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) dS = \oint_l \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}_l dl \quad (2a)$$

或

$$\int_S \nabla' \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}') dS' = \oint_l \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}_l dl', \quad (2b)$$

其中 l 为 S 的围线, \mathbf{n}_l 为 l 的外法向。

由矢量运算关系很易推得

$$\nabla \cdot \int_S \phi \mathbf{J}(\mathbf{r}') dS' = \int_S \nabla \phi \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dS'.$$

注意到 $\nabla \phi = -\nabla' \phi$, 利用二维散度定理可得

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \int_S \phi \mathbf{J}(\mathbf{r}') dS' &= - \left[\int_S \nabla' \cdot (\mathbf{J}\phi) dS' - \int_S (\nabla' \cdot \mathbf{J}) \phi dS' \right] \\ &= \int_S \phi \nabla' \cdot \mathbf{J} dS' - \int_S (\mathbf{J}\phi) \cdot \mathbf{n}_l dl'. \end{aligned}$$

在导体边缘(周界) l 上, 电流法向分量为零, 得到公式

$$\nabla \cdot \int_S \mathbf{J}\phi dS' = \int_S \phi \nabla' \cdot \mathbf{J} dS'. \quad (3)$$

在圆柱坐标 (r, α, z) 下, 将电流写成 $\mathbf{J} = J_r \mathbf{a}_r + J_\alpha \mathbf{a}_\alpha$, (1) 式可写成

$$E_r^{\text{inc}} + \frac{\partial}{\partial r} \int_S \rho \phi dS' + k^2 \int_S [J_r \cos(\alpha - \alpha') + J_\alpha \sin(\alpha - \alpha')] \phi dS' = 0, \quad (4a)$$

$$E_\alpha^{\text{inc}} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_S \rho \phi dS' + k^2 \int_S [J_\alpha \cos(\alpha - \alpha') - J_r \sin(\alpha - \alpha')] \phi dS' = 0, \quad (4b)$$

其中感应面“电荷”密度 $\rho = \nabla \cdot \mathbf{J}$.

类似于处理圆柱坐标系中的弯曲结构时方程去耦所用的双复形式 (Bi-complex forms)^[5], 引入

$$J_1 = J_r + jJ_a, \quad J_2 = J_r - jJ_a.$$

对 (4b) 式乘 j 并与 (4a) 式作加减后可得积分方程的分量形式

$$E_r^{inc} + jE_a^{inc} + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \int_S \rho \phi dS' + k^2 \int_S J_1 \exp[-j(\alpha - \alpha')] \phi dS' = 0, \quad (5a)$$

$$E_r^{inc} - jE_a^{inc} + \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \int_S \rho \phi dS' + k^2 \int_S J_2 \exp[+j(\alpha - \alpha')] \phi dS' = 0. \quad (5b)$$

2.2 分量方程的傅氏变换

如图 1 所示, 设入射平面波为^[6]

$$\begin{aligned} E_0^{inc} = & E_0 (\alpha_x \cos \varphi_0 \cos \theta_0 + \alpha_y \sin \varphi_0 \\ & - \alpha_x \cos \varphi_0 \sin \theta_0) \\ & \times \exp[-jk(x \sin \theta_0 + z \cos \theta_0)]. \end{aligned} \quad (6)$$

以下设 $E_0 = 1$. 由于 ρ, J_1, J_2 均是以 2π 为周期的函数, 故可写成傅氏级数形式

$$J_1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(r') \exp(jn\alpha'),$$

$$J_2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n(r') \exp(jn\alpha'), \quad \rho = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \rho_n(r') \exp(jn\alpha'). \quad (7)$$

在圆盘(环)上, $\theta = \theta' = \pi/2$, $R = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma)^{1/2}$,

其中

$$\cos \gamma = [\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\alpha - \alpha')] |_{\theta=\theta'=\pi/2} = \cos(\alpha - \alpha').$$

(5) 式两边同乘 $\exp(-jn\alpha)$, 并在 $[0, 2\pi]$ 上对 α 积分, 将(7)式代入(5)式, 而 $dS' = r' dr' d\alpha'$, 由此可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (E_r^{inc} + jE_a^{inc}) \exp(-jn\alpha) d\alpha + \left(\frac{d}{dr} - \frac{n}{r} \right) \int_{S_{C_i}} r' \rho_n \phi_n dr' \\ + k^2 \int_{S_{C_i}} r' a_n \phi_{n+1} dr' = 0, \end{aligned} \quad (8a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (E_r^{inc} - jE_a^{inc}) \exp(-jn\alpha) d\alpha + \left(\frac{d}{dr} + \frac{n}{r} \right) \int_{S_{C_i}} r' \rho_n \phi_n dr' \\ + k^2 \int_{S_{C_i}} r' b_n \phi_{n-1} dr' = 0. \end{aligned} \quad (8b)$$

上式中, $\int_{S_{C_i}}$ 意义如下: 若是圆盘 $0 \leq r \leq R$, 则为 \int_0^R ; 若是圆环 $R_1 \leq r \leq R_2$, 则为 $\int_{R_1}^{R_2}$; 若为同心放置的圆盘-圆环, 则为 $\int_0^R + \int_{R_1}^{R_2}$, 依次类推. 而式中的 $\phi_n(r, r')$ 来自积分

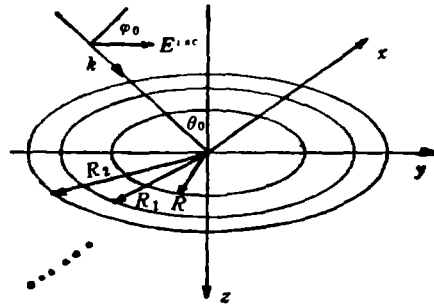


图 1 平面波入射到无限薄理想导体圆盘-圆环结构

$$\int_0^{2\pi} \exp(jn\alpha') \phi(r, r', \alpha' - \alpha) d\alpha' = \exp(jn\alpha) \int_0^{2\pi} \exp(-jn\alpha') \phi(r, r', \alpha') d\alpha'.$$

令

$$\phi_n(r, r') = \int_0^{2\pi} \phi(r, r', \alpha) \cos(n\alpha) d\alpha, \quad (9)$$

则

$$\int_0^{2\pi} \exp(jn\alpha') \phi(r, r', \alpha' - \alpha) d\alpha' = \exp(jn\alpha) \phi_n(r, r').$$

事实上, $\phi_n(r, r')$ 可看成是 $\phi(r, r', \alpha' - \alpha)$ 对 $\alpha' - \alpha$ 作傅氏级数展开时的系数(只相差 2π 因子).

2.3 感应电荷贡献的通解表示

在(8)式中,关于 ρ_n 的积分项当然可考虑用连续性方程转化成关于电流 a_n 和 b_n 表示,但这将引入关于未知量的微分,而回到通常用于 EFIE 的处理方法,增加求解的复杂性,因而我们将直接解出关于 ρ_n 的积分项.

对(1)式求散度并利用(3)式可得到

$$\nabla \cdot \mathbf{E}^{inc} + (\nabla^2 + k^2) \int_S \rho \phi dS' = 0.$$

在圆柱坐标 (r, α, z) 下,将 ∇ 展开,上式成为

$$\nabla \cdot \mathbf{E}^{inc} + \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + k^2 \right\} \int_S \rho \phi dS' = 0. \quad (10)$$

将 ρ 的展开式(7)式代入(10)式,并在两边同乘 $\exp(-jn\alpha)$, 在 $[0, 2\pi]$ 上积分得

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-jn\alpha) \nabla \cdot \mathbf{E}^{inc} d\alpha + \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right\} \int_{zC_i} r' \rho_n \phi_n dr' = 0. \quad (11)$$

记算子

$$\bar{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + k^2 - \frac{n^2}{r^2}$$

将(6)式的人射场代入并利用 Bessel 函数的积分公式

$$\int_0^{2\pi} \exp(-jn\alpha - jz \cos \alpha) d\alpha = 2\pi \exp(-n\pi j/2) J_n(x)$$

得

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-jn\alpha) \nabla \cdot \mathbf{E}^{inc} d\alpha = -jk \sin \theta_0 \cos \theta_0 \cos \varphi_0 \exp(-n\pi j/2) J_n(kr \sin \theta_0). \quad (12)$$

由于

$$\bar{A}[J_n(kr \sin \theta_0)] = k^2 \cos^2 \theta_0 J_n(kr \sin \theta_0). \quad (13)$$

而算子方程 $\bar{A}(f) = g_0$ 的解可写成特解 f_0 与齐次方程 $\bar{A}(f) = 0$ 的通解的和,而齐次方程 $\bar{A}(f) = 0$ 的通解的一般形式为 $A_n J_n(kr) + B_n Y_n(kr)$. 注意到 r 并不是定义在

连续区间,而是分段定义在域 $\bigcup_{i=1}^L C_i$, $C_i = [R_{i-1}, R_i]$ 上,因而由(11)–(13)式解得

$$k \int_{\Sigma C_i} r' \rho_n \phi_n dr' = j \tan \theta_0 \cos \varphi_0 \exp(-n\pi j/2) J_n(kr \sin \theta_0) - (A_n^{(i)} J_n(kr) + B_n^{(i)} Y_n(kr)), \quad r \in C_i. \quad (14)$$

上式中, 当 r 落在不同的区间 C_i 上时, 待定常数 $A_n^{(i)}$ 和 $B_n^{(i)}$ 相应改变. 这些待定常数应结合边缘上电流为零的条件定出.

(14) 式将电荷的贡献用微分方程通解的形式表示, 从而简化了 EFIE 的求解.

2.4 电场积分方程的简化

由(11), (12)式知, 若令 $n = -n$, 则由于 $\phi_{-n} = \phi_n$, 故(11)式不变, 因而得到 $\rho_{-n} = \rho_n$. 又在(14)式中令 $n = -n$, 可知

$$A_{-n}^{(i)} = (-1)^n A_n^{(i)}, \quad B_{-n}^{(i)} = (-1)^n B_n^{(i)}. \quad (15)$$

将以上结果和(6)式代入(8)式, 并利用圆柱函数的递推公式, 得到关于圆盘-圆环结构 EFIE 的变形形式:

$$k^2 \int_{\Sigma C_i} r' a_n \phi_{n+1} dr' + A_n^{(i)} J_{n+1}(kr) + B_n^{(i)} Y_{n+1}(kr) + \exp[-j(n+1)\pi/2] (\cos \varphi_0 \sec \theta_0 + j \sin \varphi_0) J_{n+1}(kr \sin \theta_0) = 0, \quad r \in C_i, \quad (16a)$$

$$k^2 \int_{\Sigma C_i} r' b_n \phi_{n-1} dr' - A_n^{(i)} J_{n-1}(kr) - B_n^{(i)} Y_{n-1}(kr) + \exp[-j(n-1)\pi/2] (\cos \varphi_0 \sec \theta_0 - j \sin \varphi_0) J_{n-1}(kr \sin \theta_0) = 0, \quad r \in C_i. \quad (16b)$$

积分(16)式不包含对待求量 a_n, b_n 的导数, 形式特别简单, 非常适合作数值分析. 一旦求出 a_n, b_n , 即可求得电流分布.

3 平面波正投射

在平面波正投射下, 由(6)式, 令 $\theta_0 = \varphi_0 = 0$ 得

$$E_z^{inc} + jE_z^{sc} = e^{-ja}, \quad E_z^{inc} - jE_z^{sc} = e^{ja}. \quad (17)$$

将 $n = \pm 1$ 分别代入(16)式, 可得四个方程, 而其中 a_{-1} 与 b_1 , a_1 与 b_{-1} 的方程完全一致. 由(16)式或(8), (14)和(17)三式不难证明, 除 $a_{\pm 1} = b_{\mp 1}$ 非零, 其余 a_i 和 b_i 均为零, 这只要将不同的 n 值代入方程(16)式并利用电流法向为零的条件, 可得 $a_{\pm n} = b_{\pm n} = 0$ ($n \neq 1$). 从物理意义上看, 这一点也是明显的. 而 a_1 和 b_1 的方程为

$$k^2 \int_{\Sigma C_i} r' a_1 \phi_2 dr' + A_1^{(i)} J_2(kr) + B_1^{(i)} Y_2(kr) = 0, \quad r \in C_i; \quad (18a)$$

$$k^2 \int_{\Sigma C_i} r' b_1 \phi_0 dr' - A_1^{(i)} J_0(kr) - B_1^{(i)} Y_0(kr) = -1, \quad r \in C_i. \quad (18b)$$

电流

$$\mathbf{J} = J_a \mathbf{a}_r + J_n \mathbf{a}_n = (a_1 + b_1) \cos \alpha \mathbf{a}_r + (a_1 - b_1) \sin \alpha \mathbf{a}_n$$

或记为

$$\mathbf{J} = \tilde{J}_r \cos \alpha \mathbf{a}_r + \tilde{J}_n \sin \alpha \mathbf{a}_n$$

(18)式中, 待定系数 $A_i^{(j)}$ 和 $B_i^{(j)}$ 需结合 J_r 在边缘 $r = R_i$ 上为零的条件确定。

3.1 圆盘

对圆盘 $0 \leq r \leq R$, (18) 式对应的方程为

$$A_1 J_0(kr) - k^2 \int_0^R r' b_1 \phi_0 dr' = 1, \quad r \in [0, R]; \quad (19a)$$

$$A_1 J_2(kr) + k^2 \int_0^R r' a_1 \phi_2 dr' = 0, \quad r \in [0, R]. \quad (19b)$$

电流分量 J_r 在 $r = R$ 上为零, 即

$$a_1(R) + b_1(R) = 0. \quad (19c)$$

3.2 圆环

对圆环 $R_1 \leq r \leq R_2$, 相应的方程和 J_r 在边缘 $r = R_1, R_2$ 上所满足的条件为

$$A_1 J_0(kr) + B_1 Y_0(kr) - k^2 \int_{R_1}^{R_2} r' b_1 \phi_0 dr' = 1, \quad r \in [R_1, R_2]; \quad (20a)$$

$$A_1 J_2(kr) + B_1 Y_2(kr) + k^2 \int_{R_1}^{R_2} r' a_1 \phi_2 dr' = 0, \quad r \in [R_1, R_2]; \quad (20b)$$

$$[a_1(r) + b_1(r)]|_{r=R_1, R_2} = 0. \quad (20c)$$

3.3 同心圆盘-圆环

对同心的圆盘 $0 \leq r \leq R$ 和圆环 $R_1 \leq r \leq R_2$, 由(18)式得到相应的方程和电流法向 J_r 在各边缘上所满足的条件

$$A_1^{(1)} J_0(kr) - k^2 \int_C r' b_1 \phi_0 dr' = 1, \quad r \in [0, R]; \quad (21a)$$

$$A_1^{(2)} J_0(kr) + B_1^{(2)} Y_0(kr) - k^2 \int_C r' b_1 \phi_0 dr' = 1, \quad r \in [R_1, R_2]; \quad (21b)$$

$$A_1^{(1)} J_2(kr) + k^2 \int_C r' a_1 \phi_2 dr' = 0, \quad r \in [0, R]; \quad (21c)$$

$$A_1^{(2)} J_2(kr) + B_1^{(2)} Y_2(kr) + k^2 \int_C r' a_1 \phi_2 dr' = 0, \quad r \in [R_1, R_2]; \quad (21d)$$

$$[a_1(r) + b_1(r)]|_{r=R, R_1, R_2} = 0; \quad (21e)$$

其中积分 $\int_C = \int_0^R + \int_{R_1}^{R_2}$.

也可讨论更多的圆盘-圆环结构, 这种盘环结构被用在一些特殊的场合, 如 Fresnel 区板天线 (Fresnel zone plate antenna) 的研究中^[6].

上述各方程组(18)–(21)式可十分方便地用各种数值方法, 如分域基点匹配法进行求解。

4 计算结果和讨论

(16), (18)式将各盘环之间的互耦考虑在内, 因而是一种全波分析方法。对方程组的数值求解我们采用了分域基点匹配的方法。一旦解出 a_i 和 b_i , 即可得到电流分布 J 或 \tilde{J} , 和 \tilde{J}_s 。散射场或 RCS 则可直接通过数值积分计算得到。

为验证本方法的准确性, 对 $kR = 10$ 的圆盘, 我们计算了它的 RCS, 并与其严格

解^[4]进行了比较,见图 2, 结果吻合很好。对比之下,若用严格解进行计算,则远比本方法复杂。

本文还计算了在波长 $\lambda = 0.03\text{m}$ 的平面波正投射下,同心相置的圆盘 $R = 1\lambda$ 和圆环 $R_1 = 1.5\lambda, R_2 = 2.5\lambda$ 上的感应电流分布(图 3)和远区散射场特性(图 4)。由图(3)可见, J_r 在结构的边缘上渐趋于零,而 J_α 则趋于无穷。这与已知的边缘上电流性态相一致。而高频近似一般难以求得较为准确的感应电流分布。为简单起见,未给出相应的相位分布图。

此外,当所考虑的圆环半径很大,但既不很窄又非很宽,如 $R_1 = 10\lambda, R_2 = 11\lambda$ 的圆环,高频方法误差将较大,且当考虑多重绕射影响时讨论变得复杂。若直接用 EFIE 进行数值求解,将使处理的单元过多而使计算困难。由于我们在 α 方向进行了傅氏变换,而又将电荷的贡献单独用通解表示,不仅降低了维数,大大减少了要处理的单元数目,而且使积分单元的计算变得十分简单。因而本文所采用的方法有一定的优越性。我们曾用上述方法分析一个圆盘与三个圆环同心相置的 Fresnel 区板天线的焦区场分布特性。

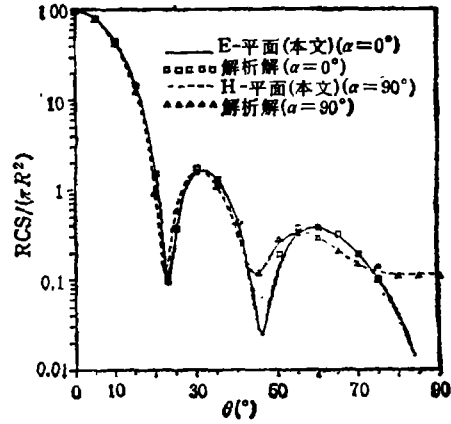


图 2 圆盘的 RCS ($kR = 10$), 本文解与解析解的比较

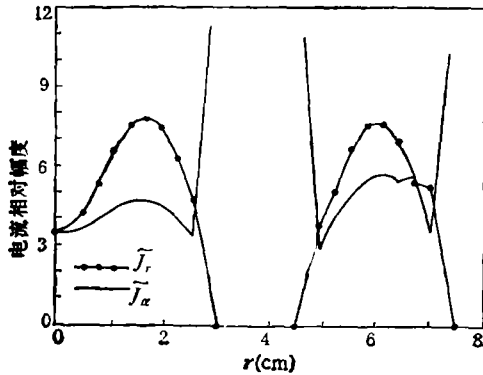


图 3 同心圆盘 ($R = 1\lambda$) 和圆环 ($R_1 = 1.5\lambda, R_2 = 2.5\lambda$) 在平面波正投射下的感应电流相对幅度分布 ($\lambda = 3\text{cm}$)

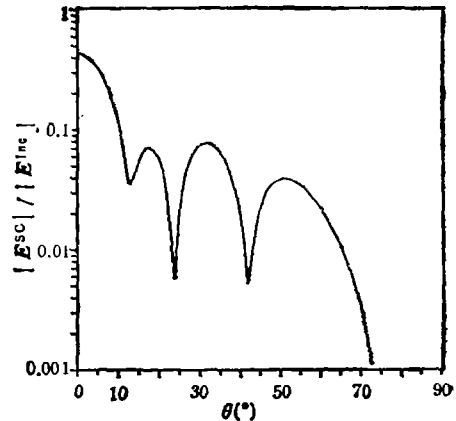


图 4 同心圆盘 ($R = 1\lambda$) 和圆环 ($R_1 = 1.5\lambda, R_2 = 2.5\lambda$) 在平面波正投射下的远区散射场分布 ($f = 10\text{GHz}, \lambda = 3\text{cm}$)

必须指出,对于平面波正投射,上述方法十分简单易行,而对于斜投射,相应的积分方程(16)式变成互不耦合的函数列 $a_n(r)$ 和 $b_n(r)$ 的积分方程,求解将变得复杂。因而本文的方法尤其适合于正投射情形,此时,这种方法比起其它方法来显得适用性强(不受电尺寸限制)且计算简单易行。

参 考 文 献

- [1] Mahadevan K, *et al.* IEEE AP Magazine, 1992, 34(1): 26—32.
- [2] Plonus M A, *et al.* IEEE Trans. on AP, 1978, AP-26(3): 488—493.
- [3] E. F. 克拉特,等著,阮颖铮,等译. 雷达散射截面——预估、测量和减缩. 北京: 电子工业出版社, 1988, 第 5 章.
- [4] Hodge D B. IEEE Trans. on AP, 1980, AP-28(5): 707—712.
- [5] Lewin L. *et al.* Electromagnetic Waves and Curved Structures. Stevenage, England, PETER PE REGRIN US LTD., 1977, Chap. 2.
- [6] Garret J E. *et al.* Int. J. of IR/MMW, 1991, 12(3): 195—220.

A NEW APPROACH FOR SCATTERING PROBLEMS OF METALLIC DISC-RING STRUCTURES ILLUMINATED BY PLANE WAVES

Ye Chunfei Zhang Wenxun

(Southeast University, Nanjing 210018)

Abstract An integralequation is derived from the electric field integral equation (EFIE) for plane wave illumination onto the metallic circular disc-ring structures by using Fourier transformation and separating the induced charge's contribution from the EFIE. For normal incidence, the equation is extremely simple and easy to be solved numerically regardless of the electric dimension of the structures. Comparison between RCS by this method and that by analytical solution for a disc shows the effectiveness of this approach. Numerical results are also given for the current distribution and the far radiation patterns of a disc-ring structure.

Key words Electromagnetic scattering, Radar cross-section, Integral equation, Disc-ring structure