

# Chi-Square 起伏目标在秩二进积累 检测器中的检测性能\*

陆林根

(北京无线电测量研究所)

## (一) 引言

近几年来,非参量检测逐渐被人们重视起来的主要原因是当输入噪声的分布相同和距离采样各自独立时,能保持虚警率恒定(CFAR).秩二进积累(RQ)检测器是在求秩后采用二进积累方法的一种非参量检测器.这种检测器实现较为简单,检测性能与秩和(RS)检测器的相差不大,故在雷达信号检测系统中得到较为广泛的应用.文献[1]研究了RQ检测器的渐近性能.本文主要推广文献[1]中所得结果.

## (二) Chi-Square 起伏目标的发现概率

众所周知,Chi-Square 起伏目标模型是一种有代表性的目标起伏模型<sup>[2]</sup>.其概率密度函数(pdf)为:

$$p(x, s) = \frac{K}{(K-1)!s} \cdot \left(\frac{K \cdot x}{s}\right)^{K-1} \exp\left(-\frac{Kx}{s}\right), x \geq 0, \quad (1)$$

式中 $K$ 为 $p(x, s)$ 的半自由度, $p(x, s)$ 的均值和方差分别为 $s$ 和 $s^2/K$ ;当 $K=1$ 时, $p(x, s)$ 为一个指数分布;当 $K$ 很大时,则趋于 Gauss 分布.非起伏和 Swerling 起伏均可看成是 Chi-Square 起伏的特例,即可适当取 $p(x, s)$ 中的 $K$ 来逼近<sup>[2]</sup>.Rice 型、对数正态型起伏在某种条件下也可用 Chi-Square 起伏来逼近<sup>[2]</sup>.

当输入噪声的 pdf 为 Gauss 分布时,单个脉冲非起伏目标的信号加噪声的 pdf 为:

$$p_1(x, a) = \frac{x}{\sigma_x^2} \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + 2a}{2\sigma_x^2}\right) \cdot I_0(x\sqrt{2a}), x \geq 0, \quad (2)$$

式中 $\sigma_x$ 表示输入噪声的方差, $I(\cdot)$ 表示零阶虚轴 Bessel 函数, $a$ 表示非起伏目标信号幅度.假如 $a$ 是按式(1)形式来起伏,则 Chi-Square 起伏目标的信号加噪声的 pdf 应为:

$$G_K(x, s) = \int_0^\infty p_1(x, a)p(a, s)da. \quad (3)$$

将式(1)、(2)代入式(3)得:

$$G_K(x, s) = \left(\frac{K\sigma_x^2}{K+s}\right)^K \cdot \frac{x}{\sigma_x^2} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right) \cdot {}_1F_1\left(K; 1; \frac{sx^2}{2\sigma_x^2(K\sigma_x^2+s)}\right), x \geq 0, \quad (4)$$

式中 ${}_1F_1(\cdot; \cdot; \cdot)$ 为合流超几何函数.设 $\sigma_x=1$ ,则式(4)可简化为:

$$G_K(x, s) = \left(\frac{K}{K+s}\right)^K \cdot x \cdot \exp(-x^2/2) \cdot {}_1F_1\left(K; 1; \frac{sx^2}{2(K+s)}\right), x \geq 0. \quad (5)$$

\* 1981年6月4日收到.

将  $K = 1, 2$  和  $\infty$  代入式(5)则可得 Swerling II、IV 和非起伏目标信号加噪声的 *pdf*.

设 RQ 检测器的各参考单元采样值为  $W_i$ , 其中  $i = 1, 2, \dots, N+1; i \neq N/2$ . 而检测单元的采样值表示为  $W_{N/2}$ . 用  $u$  表示单位阶跃函数, 其表达式为:

$$U(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (6)$$

将每一个参考单元的采样值与检测单元采样值比较后, 可得秩值  $R_N$  为:

$$R_N = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq N/2}}^{N+1} U(W_{N/2} - W_i). \quad (7)$$

令  $T_1$  表示为秩值检测器的第一门限, 则其发现概率可写成<sup>[1]</sup>:

$$P_d = \sum_{i=T_1}^N \binom{N}{i} \int_0^{\infty} [F(x)]^i [1 - F(x)]^{N-i} G_K(x, s) dx, \quad (8)$$

式中  $F(\cdot)$  为  $W_i$  随机变量的分布函数. 若其 *pdf* 为 Rayleigh 分布, 则

$$F(x) = 1 - \exp(-x^2/2). \quad (9)$$

将式(5)和(9)代入式(8)得

$$P_d = \sum_{r=T_1}^N \binom{N}{r} \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} (-1)^i (1 + N - r + i)^{-1} \cdot \left[ 1 + \frac{(N - r + i)s}{K(1 + N - r + i)} \right]^{-K} \quad (10)$$

式(10)为 Chi-Square 起伏目标在 RQ 检测器中发现概率的表达式. 如  $s = 0$ , 则

$$G_K(x, 0) = x \cdot \exp(-x^2/2). \quad (11)$$

将式(11)和(9)代入式(8)得虚警概率  $P_{fa}$  的表达式:

$$P_{fa}(s = 0) = P_{fa} = (N + 1 - T_1)/(N + 1). \quad (12)$$

如令  $K \rightarrow \infty$ , 则

$$\begin{aligned} P_d(K = \infty) &= \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{r=T_1}^N \binom{N}{r} \cdot \sum_{i=0}^r (-1)^i \cdot \binom{r}{i} \cdot (N - r + i + 1)^{-1} \\ &\quad \cdot \left[ 1 + \frac{(N - r + i)s}{K(1 + N - r + i)} \right]^{-K} \\ &= \sum_{r=T_1}^N \binom{N}{r} \sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{r}{i} \frac{1}{(N - r + i + 1)} \\ &\quad \cdot \lim_{K \rightarrow \infty} \left[ \frac{K}{K + \frac{(N - r + i)s}{(1 + N - r + i)}} \right]^K \\ &= \sum_{r=T_1}^N \binom{N}{r} \sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{r}{i} \frac{\exp\left[-\frac{s(N - r + i)}{1 + N - r + i}\right]}{(N - r + i + 1)}. \end{aligned} \quad (13)$$

式(13)是非起伏目标在 RQ 检测器中的  $P_d$  表达式. 当  $K = 1, 2$  时, 式(10)所得结果与文献[1]中式(11)和式(12)完全相同. 令  $K = 0.5$ , 则

$$\begin{aligned} P_d(K = 0.5) &= \sum_{r=T_1}^N \binom{N}{r} \sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{r}{i} \cdot (0.5)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \cdot [(N - r + i)^2(0.5 + s) + (N - r + i)(1 + s) + 0.5]^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (14)$$

用 DJS-6 型计算机计算在不同  $K$  和不同  $T_1$  时的  $P_d$  结果见图 1 和图 2. 在图 1 中虚警概率用虚线表示, 而在图 2 中  $s = 0$  的各点即为虚警概率. 从图 1 可见, 当  $N - T_1$  增加时,  $P_{fa}$  是直线上升的, 而  $P_d$  则开始增加较快, 渐渐趋于饱和.

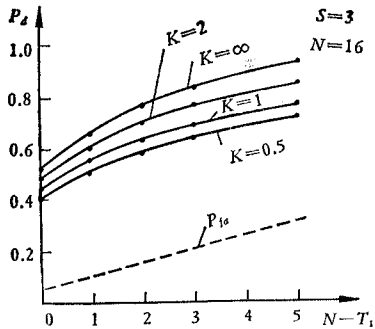


图 1 不同  $K$  时,  $P_d$  与  $N - T_1$  的关系

Fig1. Detection probability  $P_d$  as a function of  $N - T_1$   
 $S$ —normalization signal to noise  
 $N$ —number of reference cells

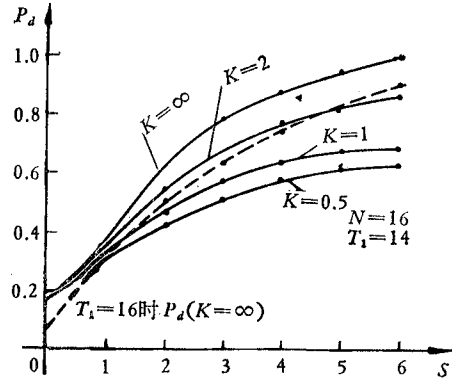


图 2 不同  $K$  时,  $P_d$  与  $s$  的关系

Fig2. Detection probability  $P_d$  as a function of  $S$   
 $N$ —number of reference cells  
 $T_1$ —rank quantization

在雷达进行搜索时, 假设在  $M$  次扫描周期目标的信杂比是恒定的. 这相当于雷达在某一固定方向发射  $M$  个脉冲. 又假设各次扫描间噪声都是独立的, 对目标信号则进行积累, 这时积累秩值可表示为

$$Q = \sum_{j=1}^M U(R_{N_j} - T_1), \tag{15}$$

式中  $R_{N_j}$  表示雷达的第  $j$  个周期检测单元  $N/2$  的秩值. 把  $Q$  与 RQ 检测器第二门限  $T_2$  作比较, 如  $Q \geq T_2$ , 则 RQ 检测器判为有目标, 否则就判为无目标. 在经过  $M$  个雷达扫描周期积累后的发现, 概率  $P_{dm}$  和虚警概率  $P_{fam}$  分别表示为:

$$P_{dm} = \sum_{i=T_2}^M \binom{M}{i} P_d^i (1 - P_d)^{M-i}, \tag{16}$$

$$P_{fam} = \sum_{i=T_2}^M \binom{M}{i} P_{fa}^i (1 - P_{fa})^{M-i}. \tag{17}$$

有关经典起伏模型在 RQ 检测器中的渐近性能见文献[1]. 为了检查 Chi-Square 起伏模型是否同样满足 Capon 正则条件<sup>[1]</sup>, 必须求检测器的功效. 为此, 应对式 (10) 进行对  $s$  求偏导, 并令  $s = 0$ , 观察其是否存在.

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_d}{\partial s} \Big|_{s=0} &= \sum_{r=T_1}^N \binom{N}{r} \sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{r}{i} \frac{N - r + i}{(1 + N - r + i)^2} \\ &= \sum_{r=T_1}^N \binom{N}{r} \sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{r}{i} \left[ \frac{1}{(1 + N - r + i)^2} - \frac{1}{1 + N - r + i} \right] \end{aligned} \tag{18}$$

上述结果与文献[1]附录中计算结果完全相同. 至此文献[1]所推导的结果均可应用. 由

此得 RQ 检测器的功效为<sup>[1]</sup>:

$$e_{RQ} = \frac{N+1-T_1}{T_1} \left( \sum_{i=N+2-T_1}^{N+1} \frac{1}{i} \right)^2, T_1 \leq N. \quad (19)$$

其它如渐近相对效率和渐近损失均见文献[1]. 由此可见,文献[1]所得结果完全可以推广到任意K的 Chi-Square 起伏目标.

### (三) $P_{dm}$ 与最佳 $T_1$ 的计算

在给定N下,从渐近性能得知:最佳  $T_1$  应为  $0.8(N+1)$ <sup>[1]</sup>. 但正如文献[1]中的结论所述,当N, M 数有限时,最佳  $T_1$  和  $P_{dm}$  还应按式(10)、(16)小样本性能计算得出. 下面介绍用 DJS-6 机计算  $P_{dm}$  和最佳  $T_1$  的过程.

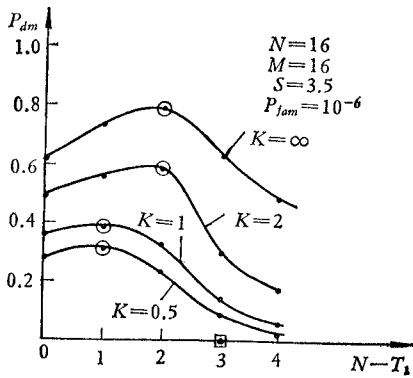


图 3 不同K时,  $P_{dm}$  与  $N - T_1$  关系

Fig3. Detection probability  $P_{dm}$  as a function  $N - T_1$ .

N—number of reference cells  
M—number of pulse repetition rate  
S—normalization signal to noise  
 $P_{fam}$ —false alarm rate

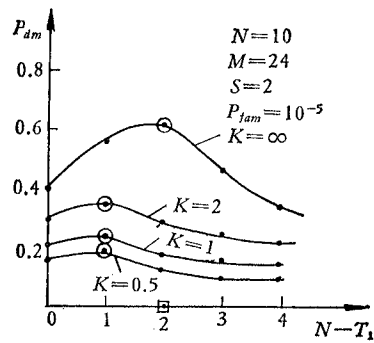


图 4 不同K时,  $P_{dm}$  与  $N - T_1$  关系

Fig4. Detection probability  $P_{dm}$  as a function  $N - T_1$ .

N—number of reference cells  
M—number of pulse repetition rate  
S—normalization signal to noise  
 $P_{fam}$ —false alarm rate

计算的过程是这样的: 首先指定N、M、S、K和要求的虚警概率 $P'_{fam}$ , 并令 $T_1 = N/2$ ,  $T_2 = M/2$ ; 根据式(12)、(17)计算得出 $P_{fam}$ . 如计算得出的 $P_{fam}$ 大于 $P'_{fam}$ , 则使 $T_2$ 加1, 再求 $P_{fam}$ , 一直到得出合适的 $T_2$ . 接着根据已得的 $T_2$ 按式(10)、(16)计算得 $P_{dm}$ , 至此我们得到一组 $T_1 = N/2$ ,  $T_2, P_{dm}$ . 然后令 $T_1$ 加1, 重复上述计算过程, 得出另一组 $T_1, T_2, P_{dm}$ . 根据所得各组中的 $P_{dm}$ 最大值, 即可得出最佳 $T_1$ . 计算所得部分结果如图3、4、5所示. 由上述各图可以得出以下简要结论:

(1) 在计算 $N=16, 24, 10; M=10, 16, 24$ 时,最佳  $T_1$  应选择在  $0.9(N+1)$  与

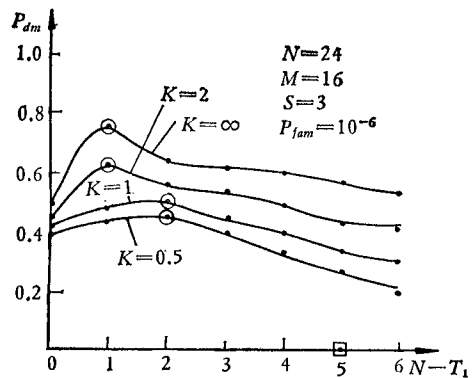


图 5 不同K时,  $P_{dm}$  与  $N - T_1$  关系

Fig5. Detection probability  $P_{dm}$  as a function  $N - T_1$ .

N—number of reference cells  
M—number of pulse repetition rate  
S—normalization signal to noise  
 $P_{fam}$ —false alarm rate

0.8(N + 1) 之间. 具体计算所得结果见表 1.

(2)  $T_2$  的选择主要决定于  $P_{jam}$  和  $T_1$  值.

(3) 当  $T_1$  选择并不是最佳时, 由图 3、4、5 看出, 其损失是很大的, 因此选择  $T_1$  是很重要的.

#### (四) 结论

本文将文献 [1] 中结果推广于 Chi-Square 起伏目标, 并用计算机计算了  $P_{dm}$  和  $T_1$ .

表 1 不同参考单元时, 最佳  $T_1$  的数字解

Tab. 1 Optimal  $T_1$  for various  $N$

$T_1$ —rank quantization  $N$ —number of reference cells

| $P_{jam}$              | $10^{-6}$ |      |      |     |      |      | $10^{-3}$ |      |      |     |      |      |
|------------------------|-----------|------|------|-----|------|------|-----------|------|------|-----|------|------|
|                        | 16        |      |      | 24  |      |      | 16        |      |      | 24  |      |      |
| $M$                    | 10        | 16   | 24   | 10  | 16   | 24   | 10        | 16   | 24   | 10  | 16   | 24   |
| $0.8(N + 1)^{1/1}$     | 8         | 13   | 19   | 8   | 13   | 19   | 8         | 13   | 19   | 8   | 13   | 19   |
| $0.9(N + 1)$           | 9.9       | 15.3 | 22.5 | 9.9 | 15.3 | 22.5 | 9.9       | 15.3 | 22.5 | 9.9 | 15.3 | 22.5 |
| $K = \infty$ 时最佳 $T_1$ | 8         | 14   | 23   | 8   | 15   | 23   | 9         | 14   | 21   | 9   | 14   | 23   |
| $K = 2$ 时最佳 $T_1$      | 10        | 14   | 23   | 9   | 15   | 22   | 10        | 14   | 22   | 9   | 15   | 22   |
| $K = 1$ 时最佳 $T_1$      | 9         | 15   | 22   | 9   | 15   | 22   | 9         | 14   | 22   | 9   | 15   | 22   |
| $K = 0.5$ 时最佳 $T_1$    | 10        | 15   | 22   | 9   | 15   | 22   | 9         | 14   | 22   | 9   | 15   | 23   |

#### 参 考 文 献

- [1] 朱兆达, 秩二进积累 (RQ) 非参量检测器的渐近性能, 电子学报, 1980 年, 第 3 期, 第 89 页.  
 [2] D. P. Meyer and H. A. Mayer, *Radar Target Detection, Handbook of Theory and Practice*, New York, 1973, p. 35—39.

## DETECTION PERFORMANCE OF CHI-SQUARE FLUCTUATING TARGETS IN A RANK BINARY INTEGRATION DETECTOR

Lu Lin-gen

(Beijing Institute of Radio Measurement)

The formula of detection probability ( $P_d$ ) of Chi-Square fluctuating targets in a rank binary integration detector is derived. The calculation shows that asymptotic performance for the model targets is equal with asymptotic performance which is given in [1].

Representative numerical results are included to indicate  $P_d$ , which are computed by digital computer DJS-6. The optimal rank quantization is approximately between  $0.8(N + 1)$  and  $0.9(N + 1)$  for  $N = 10, 16, 24$ ;  $M = 16, 24$ ; where  $N$  is the number of reference cells,  $M$  is the number of radar's pulse repetition rate.