

分形光栅的散射¹

吴振森 徐 良

(西安电子科技大学物理系 西安 710071)

摘 要 本文根据菲涅尔-基尔霍夫理论,研究了均匀 Cantor 集分形和 Sierpinski “地毯”(carpet) 分布光栅结构的电磁(光)散射,计算了一维和二维分形光栅散射的强度分布,分析了它们的空间频率分布特性。其数值结果表明,它们均具有明显的分形特征和频率选择特性。

关键词 分形, 光栅, 散射

中图分类号 O441

1 引 言

分形物体的光散射、绕射和分形介质中波的传播已被众多学者研究,其中分形相位屏的散射是非常感兴趣的课题之一。有规和随机分形结构的绕射也获得一定的研究^[1-3]。无限和有限多个周期性导体和介质条带,或光栅结构已被实际用于电磁(光)频谱的研究。它们的频率选择特性在微波段已被用于天线系统和隐身技术,也应用于红外光学系统。通过改变基元的电尺寸和形状能获得不同的频谱响应^[4-6]。本文根据菲涅尔-基尔霍夫理论,研究了均匀 Cantor 集分形和 Sierpinski “地毯”分布光栅结构的电磁(光)散射,计算了一维和二维分形光栅散射的强度分布和空间频率分布特性。数值结果表明,它们均具有明显的分形特征和频率选择特性。

2 分形光栅的散射

设无限大导体平面(或不透明平面)位于 $z=0$ 处,并具有有限分形结构的狭缝或矩形孔,构成分形光栅。它具有外尺度 L 和取基元尺寸作为内尺度 τ 。基元线度远大于波长,但它的线度均远小于光栅到观察屏的距离。根据菲涅尔-基尔霍夫理论,忽略时间因子 $\exp(-i\omega t)$, 在 z 处观察平面 xy 上的散射场为^[2]

$$\begin{aligned} E(\mathbf{r}) = & \frac{\exp(ikz)}{i2\pi z} \exp\left[ik\frac{x^2+y^2}{2z}\right] \mathbf{k} \times \iint_{s'} dx' dy' \mathbf{n} \\ & \times E(\mathbf{r}') \exp\left[ik\frac{x'^2+y'^2}{2z}\right] \exp\left[-ik\frac{xx'+yy'}{z}\right], \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $\mathbf{n} = \hat{z}$ 为单位矢量, $E(\mathbf{r}')$ 为在光栅屏孔径上的出射场, $E(\mathbf{r}') = T(x', y')E_i(\mathbf{r}')$, $T(x, y)$ 称为透射率函数。一维、二维分形光栅和 Sierpinski 地毯光栅结构如图 1 所示。

¹ 1995-12-11 收到, 1996-08-19 定稿
国家自然科学基金资助课题

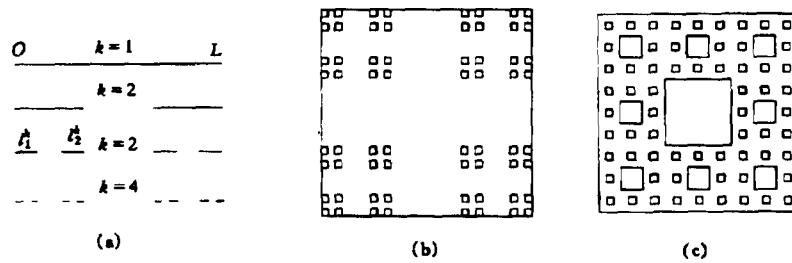


图 1 (a) 不同层次的 Cantor 集光栅 (b) 二维分形光栅 (c) Sierpinski 地毯光栅

2.1 夫琅和费衍射

当 $z \gg k(x'^2 + y'^2)_{\max}/2$ 时, 可以获得夫琅和费衍射公式. 忽略倾斜因子, 且令 $p = x/(\lambda z)$, $q = y/(\lambda z)$, λ 为入射波长. 单位幅度平面线偏振波垂直入射.

以一维 $1/3$ Cantor 集为例, 光栅 G 的外尺度 $[-L, L]$, 第 n 层次有 2^n 个狭缝, 每个缝宽为 $\tau = 2L/3^n$. 参考一维分形 Cantor 集天线阵的阵因子推导方法^[7], 可得观察屏平面上的衍射强度:

$$I(P) = \left(\frac{1}{\lambda z}\right) I_n(p) = \left(\frac{1}{\lambda z}\right) 4L^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} \left[\prod_{i=1}^n \cos\left(\frac{4\pi p L}{3^i}\right) \right]^2 \left(\frac{\sin(2\pi p L/3^n)}{2\pi p L/3^n}\right)^2. \quad (2)$$

上述结果可以推广到一维 ν/μ 均匀 Cantor 集光栅. 忽略因子 $(1/\lambda z)$, 得

$$I_n(p) = 4L^2 \left(\frac{2\nu}{\mu}\right)^{2n} \left[\prod_{j=1}^n \cos\left(\frac{(\mu - \nu)\nu^{j-1}}{\mu^j} 2\pi p L\right) \right]^2 \left[\frac{\sin(2\pi p L \nu^n / \mu^n)}{2\pi p L \nu^n / \mu^n}\right]^2. \quad (3)$$

同时也可以构成各种不同结构的二维分形光栅. 例如, 在光栅平面 G , 沿 x' 方向为 n 层次的 $1/\mu$ Cantor 集, 沿 y' 方向为 k 层次的 $1/\nu$ Cantor 集, 则 $1/\mu \times 1/\nu$ Cantor 集二维光栅的散射强度 $I_{n,k}$ 为 (忽略 $E_0/\lambda z$ 因子)

$$I_{n,k}(pq) = (2L)^4 \left(\frac{2}{\mu}\right)^{2n} \left(\frac{2}{\nu}\right)^{2k} \left[\prod_{j=1}^n \cos\left(\frac{2(\mu - 1)\pi p L}{\mu^j}\right) \right]^2 \left[\prod_{j=1}^k \cos\left(\frac{2(\nu - 1)\pi p L}{\nu^j}\right) \right]^2 \times \left[\frac{\sin(2\pi p L / \mu^n)}{2\pi p L / \mu^n}\right]^2 \left[\frac{\sin(2\pi p L / \nu^n)}{2\pi p L / \nu^n}\right]^2. \quad (4)$$

图 2 分别表示层次 $n=4, 5, 6$, $L=1$ 时 $1/3$ Cantor 集一维光栅衍射的结构因子的频谱曲线, 它们具有明显分形特征.

(1) 周期性或准周期性 由于 $\mu=3$ 为有理数, 频谱曲线存在周期性. 图 2 给出了一个空间周期的频谱. 如果 μ 为无理数时, 频谱曲线将呈现准周期性.

(2) 自相似性 在一个空间周期内频谱曲线的整体与局部存在不同层次的自相似, 如图 2(a)、2(b) 和 2(c). 以及局部与局部之间也存在自相似性, 见图 3(a) 和图 3(b).

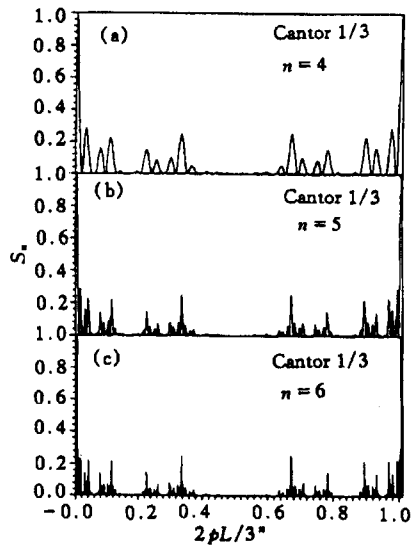


图 2 不同层次 Cantor 集光栅散射的结构因子

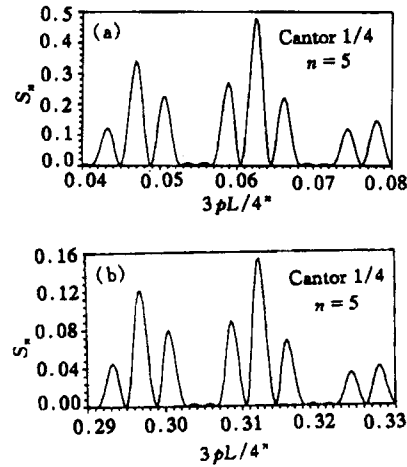


图 3 分形光栅散射结构因子的局部之间自相似性

(3) 包络性 随着层次 n 增加, 空间频率分布向高频展宽。同时, 随着 n 的增加, 缝宽变窄, 狭缝数成倍增加, 由于干涉效应其分辨率提高。而且它们用 $3^n L/2$ 归一化的空间频率分布具有包络性, 即第 $n-1$ 层次的结构函数的分布是第 n 层次的包络, 如图 4 所示。图 5 表示 $n=3$ 时 $1/4 \times 1/4$ Cantor 集光栅散射强度的空间频率分布。实际上它们表示给定频率时衍射强度的小角度分布, 具有明显的分形结构。

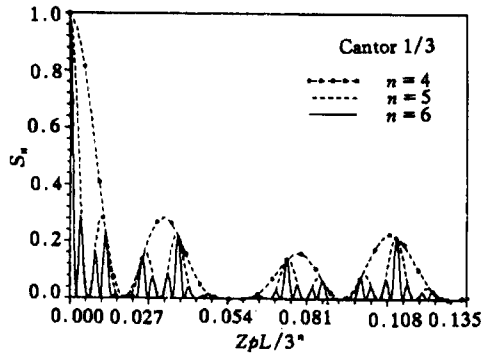


图 4 归一化结构因子空间频率分布的包络性

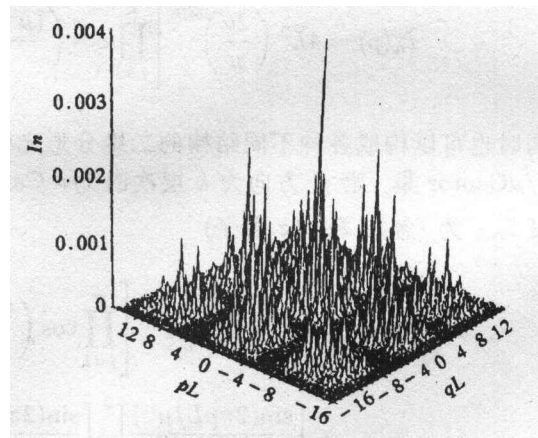


图 5 $1/4 \times 1/4$ Cantor 集散射强度的空间频率分布

类似地, 我们以 Sierpinski 地毯为例, 讨论非均匀孔径分形光栅的散射。设 Sierpinski 地毯的外尺度为 $2L \times 2L$, 对于第 n 层次, Sierpinski 光栅的频谱为

$$A_n = F_1(L/3) + \sum_{k=2}^n \left[F_k(L/3^k) \prod_{j=1}^{k-1} C(L/3^j) \right], \quad (5)$$

其中

$$F_k(L/3^k) = [\sin(2\pi pL/3^k)/(\pi p)][\sin(2\pi qL/3^k)/(\pi q)], \quad (6)$$

$$C(t) = 2[\cos(4\pi pt) + \cos(4\pi qt) + 2\cos(4\pi pt)\cos(4\pi qt)]. \quad (7)$$

图 6(a) 为 $n = 2$ 时 Sierpinski 光栅散射强度的空间频谱分布。为了比较, 图 6(b) 为边长等于 $2L/3^2$ 的 9 个相同孔径构成的均匀光栅散射强度的空间频谱分布。即将 Sierpinski 地毯的中心为 $2L/3$ 的大方孔换成边长为 $2L/3^2$ 的小方孔。显然, 在相同的空间频率范围内 Sierpinski 光栅散射强度的主极大最大, 而次极大明显低于均匀光栅散射强度的次极大。其分形光栅散射强度的等值图也具有明显的分形特征。

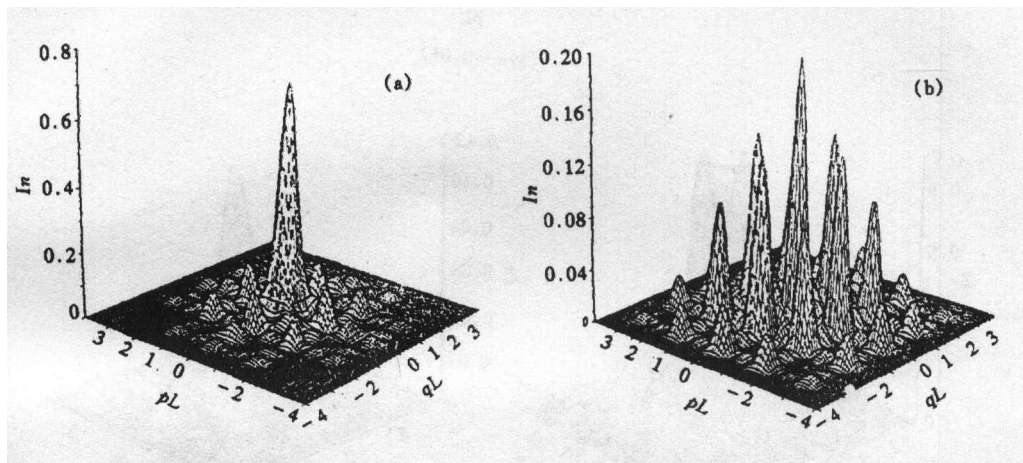


图 6 (a) Sierpinski 光栅散射强度的空间频谱分布
(b) 均匀光栅散射强度的空间频谱分布

2.2 菲涅尔衍射

根据 (1) 式, 能获得菲涅尔衍射公式

$$E(x, y) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \iint_{S'} dx' dy' E(x', y') \exp\left\{\frac{ik}{2z}[(x-x')^2 + (y-y')^2]\right\}, \quad (8)$$

其中 $E(x', y')$ 为在光栅屏孔径上的出射场, $E(x', y') = T(x', y')E_i(\mathbf{r})$ 。当满足条件

$$z^3 \gg [\pi/(4\lambda)][(x-x')^2 + (y-y')^2]_{\max} \quad (9)$$

时, 观察平面所在区域称为菲涅尔区。(8) 式表明位于菲涅尔区观察平面上的复振幅分布可看作是孔径平面上透射场复振幅分布 $E(x', y')$ 与惠更斯球面子波的卷积。条件 (9) 式是充分的, 但不是必要的。实际上观察平面到光栅屏的距离很小时, 虽然不满足这一条件, 也能观察到菲涅尔衍射, 这可用稳相原理解释。本文数值计算了各种分形光栅散射强度的空间频谱分布。图 7 仅给出了 $n = 2$ 时、在不同观察平面上 Sierpinski 地毯结构光栅散射强度的空间分布。当 $z = 0.01\lambda$ 时, 它近似为几何光学解。图 7(a) 给出了散射强度的等值图, 它与光栅孔径的分布十分接近, 具有明显的边界。图 7(b) 和图 7(c) 分别给出了 $z = \lambda$ 和 $z = 5\lambda$ 时的散射强度的空间分布。它们的空间位置分布同样具有分形特征。不同的 z 值时的散射强度主极大和次极大的起伏完全取决于光栅孔径分布和菲涅尔积分的振荡行为。

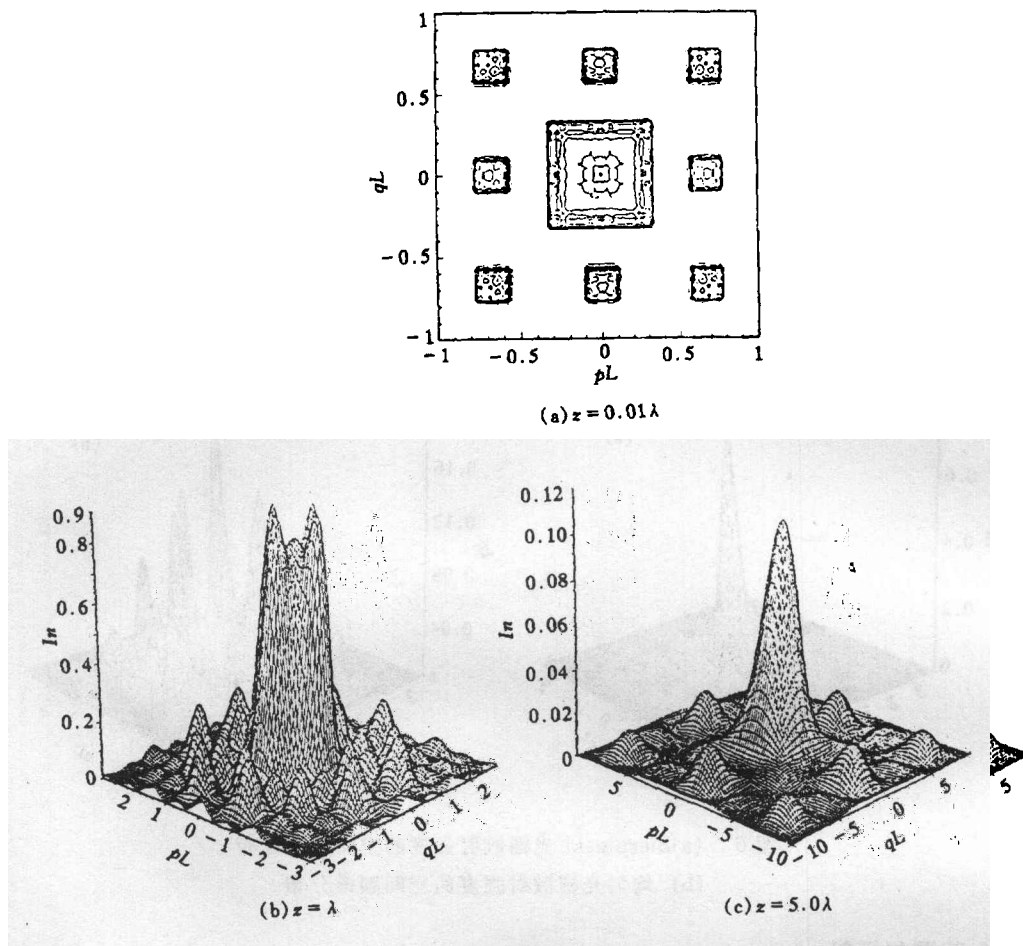


图7 Sierpinski 地毯结构光栅的非涅尔衍射
(a) $z = 0.01\lambda$ (b) $z = \lambda$ (c) $z = 5.0\lambda$

3 结束语

本文讨论了会聚球面波入射时分形光栅的电磁(光)散射。其强度分布具有与分形光栅完全相同的分形特征和频率选择特性。如果平面波入射时, 只须将(1)式中积分改为菲涅尔积分, 可作类似分析。但值得注意的是, 当光栅单元孔径与间距和入射波长相比拟时, 物理光学近似失效, 需考虑它们之间的耦合。与均匀分布导体或介质条带/板元类似, 如果将几个不同分形光栅组合起来形成多屏散射或者组合成不同的阵列。在频率选择表面、天线和电磁散射其它方面的应用将具有一定的应用前景。

参 考 文 献

- [1] Sinha S K. Scattering from fractal structures. *Physica D.*, 1989, 38(1): 310-314.
- [2] Allain C, Cloitre M. Optical diffraction on fractals. *Phys. Rev.*, 1986, B33(10): 3566-3569.
- [3] Uozumi J, Kimura H, Asakura T. Laser diffraction by randomized Koch fractals. *Wave Random Media*, 1991, 1(1): 73-80.

- [4] Gaylord T K, Moharam M G. Analysis and application of optical diffraction by gratings. *Proc. IEEE*, 1985, 73(5): 894-937.
- [5] Cwik T, Mittra R. The effects of the truncation and curvature of periodic surfaces: A strip grating. *IEEE Trans. on AP*, 1988, AP-36(4/5): 612-622.
- [6] Kriezis E E, Chrissoulidis D P. EM-wave scattering by an inclined strip grating. *IEEE Trans. on AP*, 1993, AP-41(11): 1473-1480.
- [7] Xu liang, Wu Zhensen, Wang Wenbing. Study of the fractal linear arrays. *J. of Xidian University*, 1994, 21(5): 80-84.

SCATTERING BY FRACTAL GRATING

Wu Zhensen Xu Liang

(*Dept. of Physics, Xidian University, Xi'an 710071*)

Abstract Based on Fresnel-Kirchhoff theory, the electromagnetic scattering from fractal gratings, which have structure on uniform Cantor sets or Sierpinski carpet, is discussed. The scattering intensities of 1-dimensional and 2-dimensional fractal grating with different fractal dimension are calculated and their properties on spatial frequency distribution are then analysed. The numerical results illustrate the fractal characteristics and frequency selectivities.

Key words Fractal, Grating, Scattering

吴振森: 男, 1946年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为: 非均匀介质、随机介质中电磁波/光波的传播与散射以及目标电磁散射特性和光散射特性研究.

徐良: 男, 1965年生, 高级工程师, 主要从事宽频带天线理论计算和实验分析, 天线匹配网络设计以及分形天线理论研究.