

阵元间互耦条件下二维波达方向估计方法¹

万 群 杨万麟

(电子科技大学电子工程学院 成都 610054)

摘 要 该文在与波达方向 (DOA) 有关的阵元间互耦条件下, 提出了一种新的自校准 DOA 估计方法, 并给出了参数可辨识性的一个必要条件. 该方法利用一维 DOA 搜索, 无需估计互耦参数, 避免了多维参数搜索和迭代过程. 仿真实验结果表明, 阵元间互耦参数和 DOA 估计存在模糊性. 在其间存在互耦的阵元个数已知的条件下, 可以得到正确的 DOA 估计结果.

关键词 互耦, 波达方向估计, 可辨识性, 模糊性

中图分类号 TN911.23

1 前 言

在实际测向系统中, 由于通道失配、阵元位置误差、阵元间互耦等因素, 众多的高分辨率波达方向 (Direction Of Arrival, DOA) 估计方法所基于的简单模型不能正确地描述阵列观测数据, 导致 DOA 估计性能恶化. 通过硬件校正模型误差, 一般需要较高的代价. 采用已知波达方向的辅助信号源, 通过估计补偿因子, 可以达到阵列校正的目的^[1-3], 但难以校正与波达方向有关的模型误差. 为克服 DOA 估计结果对简单模型误差的敏感性, 有必要增加模型的复杂性, 以更准确的模型描述阵列观测数据. 自校准算法正是基于具有更多未知参数的模型, 通过求解多维参数优化问题, 在估计模型参数的同时, 得到信号 DOA 估计. 由于求解多维参数优化问题一般与多维参数搜索或迭代算法有关, 自校准方法一般需要较大的运算量^[4-7]. 并且, 由于涉及 DOA 以外的模型参数, 自校准算法一般存在参数估计的模糊性问题. 文献 [6] 和 [7] 分别在与波达方向无关和有关的阵元间互耦条件下, 给出了联合估计多个参数 (包括信号 DOA) 的迭代方法. 本文在与波达方向有关的阵元间互耦条件下^[7], 提出了一种新的自校准 DOA 估计方法, 并给出了参数可辨识性的一个必要条件. 该方法在其间存在互耦的阵元个数已知的条件下, 通过一维搜索, 可以得到无模糊的 DOA 估计结果, 无需估计 DOA 以外的模型参数, 避免了多维参数搜索、迭代过程.

2 阵元间互耦条件下信号模型

假设 M 个阵元的均匀线阵, 相邻阵元的间隔 d 不大于 $1/2$ 波长. q 个窄带信号源从不同的方向 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ 到达阵列, t 时刻的 M 阶阵列观测矢量 \mathbf{x}_t 为^[7] $\mathbf{x}_t = \sum_{i=1}^q s_i(t) \mathbf{G}_i \mathbf{a}(\theta_i) + \mathbf{n}_t$, 其中 $\mathbf{a}(\theta) = [1 \ e^{-j2\pi(d/\lambda)\sin\theta} \ \dots \ e^{-j(M-1)2\pi(d/\lambda)\sin\theta}]^T$ 为方向矢量, θ 为波达方向, $[\]^T$ 表示转置, $s_i(t)$ 为 t 时刻第 i 个窄带信号的复振幅, 为相互独立的随机变量, \mathbf{n}_t 是加性随机噪声, \mathbf{G}_i 为与波达方向 θ_i 有关的阵元间互耦矩阵, 可以表示为如下的 Toeplitz 矩阵:

$$\mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} g_i(0) & g_i(1) & g_i(2) & \dots & g_i(M-1) \\ g_i(1) & g_i(0) & g_i(1) & \dots & g_i(M-2) \\ g_i(2) & g_i(1) & g_i(0) & \dots & g_i(M-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_i(M-1) & g_i(M-2) & g_i(M-3) & \dots & g_i(0) \end{bmatrix} \quad (1)$$

¹ 2000-04-01 收到, 2000-11-30 定稿

其中 $g_i(m)$ 为间隔 md 的阵元间的互耦系数, $m = 0, 1, \dots, M-1$, $g_i(0) = 1$. 观测数据 \mathbf{x}_t 又可写成 $\mathbf{x}_t = \sum_{i=1}^q s_i(t) \mathbf{b}(\theta_i, \mathbf{g}_i) + \mathbf{n}_t$, 其中 M 阶矢量 $\mathbf{g}_i = [g_i(0) \ g_i(1) \ \dots \ g_i(M-1)]^T$, $\mathbf{b}(\theta_i, \mathbf{g}_i)$ 定义为信号的“广义方向矢量”, 可以表示为

$$\mathbf{b}(\theta_i, \mathbf{g}_i) = \mathbf{G}_i \mathbf{a}(\theta_i) \quad (2)$$

3 多维参数估计方法

假设信号矢量 $\mathbf{s}_t = [s_1(t) \ s_2(t) \ \dots \ s_q(t)]^T$ 和噪声矢量 \mathbf{n}_t 为互不相关的零均值随机矢量, 二阶矩满足 $E[\mathbf{s}_t \mathbf{s}_k^H] = \mathbf{P} \delta(t, k)$, $E[\mathbf{n}_t \mathbf{n}_k^H] = \sigma_n \mathbf{I}_M \delta(t, k)$, 其中 $\delta(t, k)$ 为 Kronecker δ 函数, $\mathbf{P} = E(\mathbf{s}_t \mathbf{s}_t^H)$ 为信号协方差矩阵, $[\]^H$ 表示共轭转置, \mathbf{I}_M 为 M 阶单位矩阵, σ_n 为噪声方差. 令 $\mathbf{B} = [\mathbf{b}(\theta_1, \mathbf{g}_1) \ \mathbf{b}(\theta_2, \mathbf{g}_2) \ \dots \ \mathbf{b}(\theta_q, \mathbf{g}_q)]$, 则阵列观测数据的协方差矩阵为 $\mathbf{R} = \mathbf{B} \mathbf{P} \mathbf{B}^H + \sigma_n \mathbf{I}_M$, 它的奇异值分解为 $\mathbf{R} = \mathbf{U}_s \mathbf{\Lambda}_s \mathbf{U}_s^H + \mathbf{U}_n \mathbf{\Lambda}_n \mathbf{U}_n^H$, 其中 q 阶矩阵 $\mathbf{\Lambda}_s = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q)$, $M-q$ 阶矩阵 $\mathbf{\Lambda}_n = \text{diag}(\sigma_n, \sigma_n, \dots, \sigma_n)$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_q > \sigma_n$, $M \times q$ 阶矩阵 \mathbf{U}_s 和 $M \times M-q$ 阶矩阵 \mathbf{U}_n 的列矢量分别由 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q$ 和 σ_n 对应的奇异矢量构成. 假设信号源协方差矩阵 \mathbf{P} 非奇异, 即各信号源之间不完全相干, 则有

$$\mathbf{U}_n^H \mathbf{b}(\theta_i, \mathbf{g}_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (3)$$

得到的多维参数 MUSIC 空间谱为 $f_M(\theta, \mathbf{g}) = [\mathbf{b}^H(\theta, \mathbf{g}) \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{b}(\theta, \mathbf{g})]^{-1}$. 通过多维参数谱峰搜索, 可以由该空间谱的谱峰位置估计信号 DOA 和互耦参数.

比较未知参数的个数和方程的个数可知, 互耦条件下参数估计可辨识性的一个必要条件为非零的互耦系数 $g_i(m)$ ($m = 0, 1, 2, \dots, M-1$) 的个数 N 小于阵元数 M , 即 $N < M^{[7]}$. 当所有阵元间都存在互耦时, 不能同时辨识所有的未知参数. 考虑到信号方向矢量 $\mathbf{b}(\theta_i, \mathbf{g}_i)$ 能分解为如 (2) 式所示的只与 DOA 有关和只与互耦参数有关的两部分, 这种多维参数谱峰搜索的估计方法可以简化为如下的一维 DOA 谱峰搜索, 只估计信号 DOA, 不估计阵元间互耦参数.

4 互耦条件下一维 DOA 搜索估计方法

由 (3) 式可知, 在互耦条件下, DOA 估计为极小化问题的解: $(\theta_i, \mathbf{g}_i) = \arg \min_{(\theta, \mathbf{g})} \mathbf{b}^H(\theta, \mathbf{g}) \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{b}(\theta, \mathbf{g})$. 由 (2) 式知 $\mathbf{b}(\theta_i, \mathbf{g}_i) = \mathbf{A}(\theta_i) \mathbf{g}_i$, 其中 M 阶方阵 $\mathbf{A}(\theta_i)$ 为

$$\mathbf{A}(\theta_i) = \begin{bmatrix} a_1(\theta_i) & a_2(\theta_i) & a_3(\theta_i) & \dots & a_M(\theta_i) \\ a_2(\theta_i) & a_1(\theta_i) + a_3(\theta_i) & a_4(\theta_i) & \dots & a_{M-1}(\theta_i) \\ a_3(\theta_i) & a_2(\theta_i) + a_4(\theta_i) & a_1(\theta_i) + a_5(\theta_i) & \dots & a_{M-2}(\theta_i) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_M(\theta_i) & a_{M-1}(\theta_i) & a_{M-2}(\theta_i) & \dots & a_1(\theta_i) \end{bmatrix} \quad (4)$$

$a_m(\theta_i)$ 为方向矢量 $\mathbf{a}(\theta_i)$ 的第 m 个元素. 若非零的互耦系数 $g_i(m)$ ($m = 0, 1, 2, \dots, M-1$) 的个数为 N (小于阵元数 M), 则 $\mathbf{A}(\theta_i)$ 为由上述方阵的前 N 列组成的 $M \times N$ 阶矩阵. 所以 $(\theta_i, \mathbf{g}_i) = \arg \min_{(\theta, \mathbf{g})} \mathbf{g}^H \mathbf{Q}(\theta) \mathbf{g}$, 其中 $N \times N$ 阶矩阵 $\mathbf{Q}(\theta)$ 为 $\mathbf{Q}(\theta) = \mathbf{A}^H(\theta) \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{A}(\theta)$, 是一个非负定的共轭对称矩阵, 所有特征值都为非负数. 可见, 对应信号源 DOA, 矩阵 $\mathbf{Q}(\theta)$ 的最小特征值取极小值 (无噪声时为零), \mathbf{g}_i 为相应的特征向量. 由于 $M \times M$ 阶矩阵 $\mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H$ 的秩为 $M-q$, 因此, $N \times N$ 阶矩阵 $\mathbf{Q}(\theta)$ 的秩不大于 $M-q$ 和 N . DOA 可辨识性要求矩阵 $\mathbf{Q}(\theta)$ 在非信

号 DOA 处的最小特征值远离极小值 (为某个较大正数), 即矩阵 $Q(\theta)$ 满秩, 即秩为 N 。所以 DOA 可辨识性要求 $M - q \geq N$, 这是一个比 $N < M$ 更强的必要条件。文献 [7] 通过比较复杂的一阶扰动分析, 得到的参数可辨识性的局部条件与这个结果相同。

注意, $g_i(0) = 1$, 所以 DOA 估计对应如下约束极小化问题的解:

$$(\theta_i, g_i) = \arg \min_{(\theta, g), g_i(0)=1} g^H Q(\theta) g \quad (5)$$

在固定 θ 的条件下, 容易给出满足上式约束极小化的矢量 g 为 $g = [h^T Q^+(\theta) h]^{-1} Q^+(\theta) h$, 其中 N 阶矢量 $h = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]^T$, $Q^+(\theta)$ 为矩阵 $Q(\theta)$ 的广义逆矩阵。将上式代入 (5) 式, DOA 估计将对应如下空间谱的谱峰位置:

$$f(\theta) = -\log 10(h^T Q^+(\theta) h) \quad (6)$$

这种互耦条件下一维搜索的 DOA 估计方法在每个 DOA 搜索点都需要计算 $N \times N$ 阶矩阵 $Q(\theta)$ 的逆矩阵。由于阵元间互耦系数与阵元间距离呈现反比关系, 相距较远的阵元间互耦系数可以近似为零, 因此, 非零的互耦系数 $g_i(m) (m = 0, 1, 2, \cdots, M-1)$ 的个数 N 一般具有较小的数值。

5 互耦条件下 DOA 估计的模糊性问题分析

与无互耦条件下 DOA 估计的模糊性问题相比, 在互耦条件下, 导致 DOA 模糊性的主要原因是引入了多个未知的互耦参数。考虑到阵元间互耦与阵元间距离成反比, 相距较远的两个阵元间的互耦很弱, 由 (1) 式给出的阵元间互耦矩阵 G_i 一般为带型 Toeplitz 矩阵, 即 $g_i(m) = 0, M-1 \geq m \geq N \geq 1$, 将信号方向矢量 $b(\theta_i, g_i)$ 记为 $b_N(\theta_i, g_i)$, 可以表示为 $b_r(\theta_i, g_i) = A_N(\theta_i) g_i$, 其中 g_i 为 N 阶矢量, 矩阵 $A_N(\theta_i)$ 由 (4) 式给出的矩阵 $A(\theta_i)$ 的前 N 个列矢量构成。当 $N = 1$ 时, 退化为阵元间无互耦的情况。由于假设均匀线阵相邻阵元间的间隔小于 $1/2$ 波长, 在无互耦时, 不存在 DOA 模糊性。当 N 增大, 即其间存在互耦的阵元个数变大时, 对于不同的波达方向 θ_1 和 θ_2 , 广义方向矢量 $b_N(\theta_1, g_1)$ 和 $b_N(\theta_2, g_2)$ 可能线性相关, 导致信号源个数估计失败和 DOA 估计的模糊性。当所有阵元间都存在互耦, 即 $N = M$ 时, 矩阵 $A_N(\theta_1) = A(\theta_1)$, 一般是满秩的, 因此对任意 θ_2 和 g_2 , 都存在 g_1 使得 $b_N(\theta_2, g_2) = b_N(\theta_1, g_1)$ 。另外, 若其间存在互耦的阵元个数 N 未知时, 需要在 N 为 $1, 2, \cdots, M$ 的假设下, 计算由 (6) 式给出空间谱, 并选择谱峰数等于信号源个数的谱估计结果, 但仍不能排除出现 DOA 估计模糊性的可能。下面的计算机仿真实验假设 N 已知, 这是比较容易获得的先验知识。

6 数值结果

考虑 8 个阵元组成的相邻间隔为 $1/2$ 波长的均匀线阵, 相邻 3 个阵元间存在互耦。在加性白噪声条件下, 2 个相互独立的远场窄带信号源分别从波达方向 $\theta_1 = -22.0^\circ$ 和 $\theta_2 = -16.0^\circ$ 到达阵列, 信噪比为 20dB, 快摄数为 200。互耦系数分别为 $g_1(1) = 0.2029 - 0.8697j$, $g_1(2) = 0.0418 - 0.1739j$, $g_2(1) = -0.1491 + 0.6740j$, $g_2(2) = -0.0298 + 0.1348j$ 。图 1 给出了在阵元间无互耦和相邻 2 个阵元间存在互耦的假设下, 由 (6) 式得到的一个典型的空间谱估计结果。阵元间无互耦 ($N = 1$) 时的空间谱估计相当于通常的 MUSIC 空间谱, 如图 1 虚线所示。阵元间无互耦和相邻 2 个阵元间存在互耦的假设与真实情况不符, 由图 1 无法得到正确的 DOA 估计。图 2 和图 3 分别给出了在相邻 3 个阵元间存在互耦和相邻 5 个阵元间存在互耦的假设下, 由 (6) 式得到的一个典型的空间谱估计结果。在相邻 4 个阵元间存在互耦的假设下, 由 (6) 式得到的空间谱估计结果与图 2 所示的差别不大。在其间存在互耦的阵元个数 $N = 3$ 已知的条件下, 由图 2 可以得到正确的 DOA 估计。在相邻 5 个阵元间存在互耦的假设下, 由于广义方向

矢量间可能线性相关, 导致 DOA 估计的模糊性, 如图 3 中的伪峰所示。图 4 给出了快拍数为 200, 相邻 2 个阵元间存在互耦时 ($g_1(1) = -0.1836 + 0.1259j$, $g_2(1) = -0.3883 - 0.0966j$), 30 个不同信噪比条件下 DOA 估计的均方根误差, 各信噪比条件下做了 200 次仿真实验。虚线对应目标 1, 实线对应目标 2。可见, 阵元间互耦较强的目标 2 比目标 1 具有较大的均方根误差。

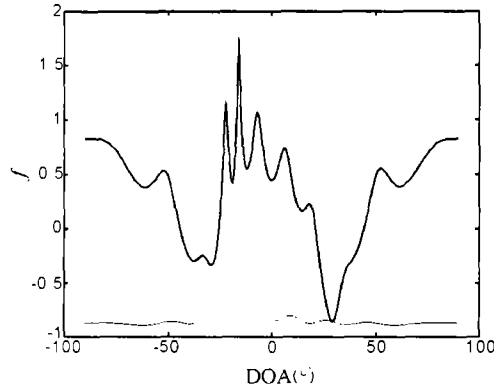


图 1 相邻的 3 个阵元间存在互耦时, 假设阵元间不存在互耦得到的空间谱估计 (虚线) 和假设相邻 2 个阵元间存在互耦得到的空间谱估计

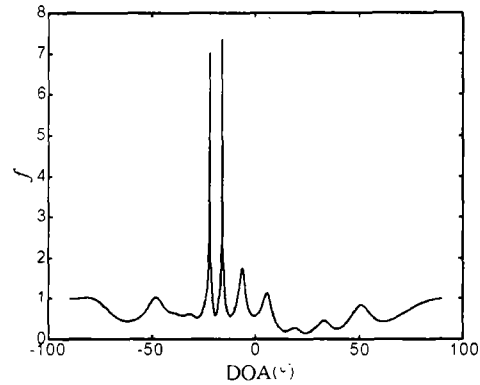


图 2 相邻的 3 个阵元间存在互耦时, 假设相邻 3 个阵元间存在互耦得到的空间谱估计

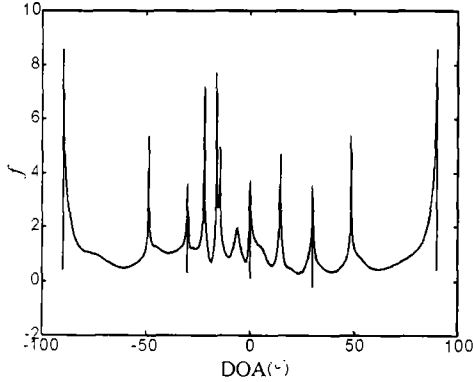


图 3 相邻的 3 个阵元间存在互耦时, 假设相邻 5 个阵元间存在互耦得到的空间谱估计

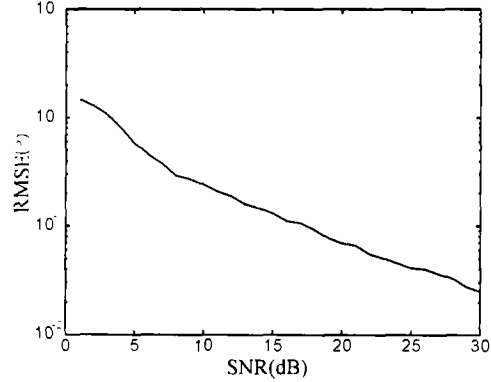


图 4 不同信噪比条件下 DOA 估计的均方根误差, 快拍数为 200, 相邻 2 个阵元间存在互耦

7 结 论

在阵元间互耦条件下, 为以更准确的模型描述阵列观测数据, 有必要引入互耦参数。自校准算法可以在估计互耦参数的同时, 得到信号 DOA 估计, 但一般要求解多维参数优化问题, 运算量要求较高, 并存在多维参数估计的模糊性问题。本文在与波达方向有关的阵元间互耦条件下, 提出了一种新的自校准 DOA 估计方法, 并给出了参数可辨识性的一个必要条件。该方法在其间存在互耦的阵元个数已知的条件下, 通过一维搜索, 可以得到无模糊的 DOA 估计结果, 无需估计 DOA 以外的模型参数, 避免了多维参数搜索、迭代过程。这种互耦条件下一维搜索的 DOA 估计方法在每个 DOA 搜索点都需要计算 $N \times N$ 阶矩阵 $Q(\theta)$ 的逆矩阵, N 为其

间存在互耦的阵元个数,一般取值较小。仿真实验结果表明,其间存在互耦的阵元个数 N 的假设若与实际情况不符,则不能得到准确的 DOA 估计或可能出现 DOA 估计的模糊性,阵元间互耦较强情况下 DOA 估计的均方根误差比阵元间互耦较弱情况下的大。

参 考 文 献

- [1] 李全力,肖先赐,空间谱估计测向系统信道失配的单信号源校正方法,电子学报,1991,19(3),123-125.
- [2] 王学礼,李舜酩,陈仲仪,俞靖,多信号源方向和频率估计中信道失配和阵元互耦的一次性补偿,电子科学学刊,2000,22(1),28-34.
- [3] 姚康泽,梁甸农,模型误差对阵列信号特征结构的影响及一种校准方法,系统工程及电子技术,1996,18(8),44-47.
- [4] M. Jansson, A. L. Swindlehurst, B. Ottersten, Weighted subspace fitting for general array error models, IEEE Trans. on Signal Processing, 1998, 46(9), 2484-2498.
- [5] A. J. Weiss, A. S. Willsky, B. C. Levy, Eigenstructure approach for array processing with unknown intensity coefficients, IEEE Trans. on Signal Processing, 1988, 36(10), 1613-1617.
- [6] B. Fiedlander, A. J. Weiss, Direction finding in the presence of mutual coupling, IEEE Trans. on Antennas and Propagation, 1991, 39(3), 273-284.
- [7] A. Fieller, A. Fereol, P. Larzabal, H. Clergeot, Robust bearing estimation in the presence of direction-dependent modeling errors: Identifiability and treatment, IEEE ICASSP, Detroit, MI, 1995, 1884-1887.

APPROACH FOR DIRECTION OF ARRIVAL ESTIMATION BASED ON 1-DIMENSIONAL SEARCHING IN THE PRESENCE OF MUTUAL COUPLING

Wan Qun Yang Wanlin

(Dept. of Electronic Engineering, UEST of China, Chengdu 610054, China)

Abstract By using 1-dimensional DOA searching rather than resort to multidimensional parametric searching, an algorithm for DOA estimation in the presence of mutual coupling is got. A necessary condition for identifiability is proposed. The ambiguous peaks appeared in certain cases must be eliminated. Detailed analysis of ambiguous problem is presented and is illuminated by numerical examples.

Key words Mutual coupling, DOA estimation, Identifiability, Ambiguity

万 群: 男, 1971 年生, 博士生, 研究方向包括高分辨率阵列信号处理、分布式目标波达方向估计方法。

杨万麟: 男, 1945 年生, 教授, 博士生导师, 研究方向包括阵列信号处理、大阵列微波成像、高速实时信号处理、雷达目标识别等领域。