

基于提升框架的整数小波变换¹

吴永宏 潘泉 张洪才 张绍武 张云龙

(西北工业大学自动控制系 西安 710072)

摘要: 提升框架可以从一个新的角度来构造小波滤波器, 它的核心是确定预测算子和更新算子. 该文引进了多项式局部拟合方法来求取预测算子和更新算子, 对每步提升下取整, 就实现了整数小波变换. 仿真结果表明, 该方法应用于二维数字图像, 在一定失真的前提下, 具有较高的压缩比, 而且小波系数与尺度系数都是整数, 不需要量化步骤. 因此, 它对于整数数据压缩具有重要的意义.

关键词: 提升框架, 整数小波变换, 预测算子, 更新算子

中图分类号: TN911.72, O177.6 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-5896(2004)04-0659-05

Wavelet Transforms that Map Integers to Integers Based on Lifting Scheme

Wu Yong-hong Pan Quan Zhang Hong-cai Zhang Shao-wu Zhang Yun-long

(Dept of Automation Control, Northwest Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract The lifting scheme is a new idea of constructing wavelet filters. Its key element is to find the predict operator and the update operator. The polynomial local regression is used to find these operators in the paper. These lifting steps take integers downwardly. Then the wavelet transforms that map integers to integers are realized. The algorithm is applied to two dimensions digital image processing, and the simulation indicates that compression ratio is high with allowable distortion. The scale coefficients and wavelet coefficients are integers, thus the quantification is not needed. This brings the significant importance of the proposed algorithm for integer data compression.

Key words Lifting scheme, Wavelet transforms that map integers to integers, Predict operator, Update operator

1 引言

随着社会的进步, 我们逐步进入数字化时代, 而这个时代更多地是要处理数字信号和数字图像. 经过大约 20 年的发展, 小波已成为数字信号处理领域的一个非常重要的工具^[1-2]. 在实数域小波分析中, 要进行数值计算, 需要二进制与十进制数据之间的转换, 用有限数代替实数, 这不可避免地引入误差. 如果用二进制数域小波变换替代实数域小波变换处理二进制数数据时, 速度快, 简单可靠^[3].

20 世纪 90 年代中期贝尔实验室的 Wim Sweldens 提出了用提升框架可以构造小波滤波器^[4-10], 构造小波的核心是确定预测算子和更新算子, 本文引入多项式局部拟合方法来求取预测算子和更新算子, 并应用于整数变换.

2 整数变换与提升框架

$s_{0,l}$ 是一个实数序列, $[x]$ 表示对 x 下取整, 对序列 $s_{0,l}$ 作如下变换:

$$d_{1,l} = s_{0,2l+1} - s_{0,2l}, \quad s_{1,l} = s_{0,2l} + d_{1,l}/2 \quad (1)$$

¹ 2002-11-23 收到, 2003-05-20 改回

教育部“跨世纪优秀人才培养计划项目”基金和自然科学基金(60172037)资助课题

反变换为

$$s_{0,2l} = s_{1,l} - d_{1,l}/2, \quad s_{0,2l+1} = d_{1,l} + s_{0,2l} \quad (2)$$

显然, 式 (1) 和式 (2) 不是整数变换。对式 (1) 取整:

$$d_{1,l} = s_{0,2l+1} - s_{0,2l}, \quad s_{1,l} = s_{0,2l} + \lfloor d_{1,l}/2 \rfloor \quad (3)$$

对式 (2) 取整

$$s_{0,2l} = s_{1,l} - \lfloor d_{1,l}/2 \rfloor, \quad s_{0,2l+1} = d_{1,l} + s_{0,2l} \quad (4)$$

显然, 式 (4) 是式 (3) 的逆变换, 可见式 (1) 和式 (2) 取整后可以实现完全重建的整数变换, 避免了计算误差。若小波变换能用提升框架方法表示, 那么就可以进行整数小波变换。

提升框架把一个序列分解为偶数序列和奇数序列, 用偶数序列去预测奇数序列, 再用奇数序列的真实值和预测值的偏差去修正偶数序列, 这样重复进行, 如图 1 所示。运用提升框架的小波逆变换如图 2 所示。其中 $p^{(i)}, u^{(i)}, i = 1, 2, \dots, m$ 分别是预测算子和更新算子。

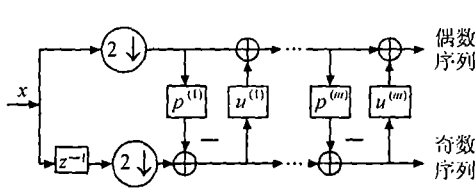


图 1 运用提升框架的小波分解变换

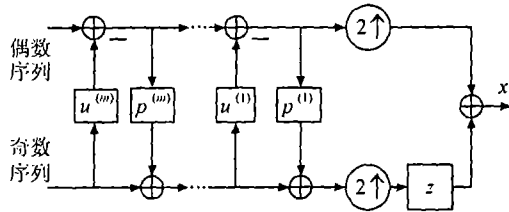


图 2 运用提升框架的小波逆变换

对预测表达式和更新表达式取整, 由图 1 知, 运用提升框架的整数小波分解变换的表达式为

$$s_{1,l}^{(0)} = s_{0,2l}, \quad d_{1,l}^{(0)} = s_{0,2l+1}$$

$$d_{1,l}^{(i)} = d_{1,l}^{(i-1)} - \left\lfloor \sum_k p_k^{(i)} \cdot s_{1,l-k}^{(i-1)} + 1/2 \right\rfloor, \quad s_{1,l}^{(i)} = s_{1,l}^{(i-1)} + \left\lfloor \sum_k u_k^{(i)} \cdot d_{1,l-k}^{(i-1)} + 1/2 \right\rfloor$$

经过 m 次预测和更新后, 有

$$s_{1,l} = s_{1,l}^{(m)}, \quad d_{1,l} = d_{1,l}^{(m)}$$

颠倒小波分解变换表达式的顺序, 并给符号取反, 则运用提升框架的整数小波逆变换的表达式为

$$d_{1,l}^{(m)} = d_{1,l}, \quad s_{1,l}^{(m)} = s_{1,l}$$

$$s_{1,l}^{(i-1)} = s_{1,l}^{(i)} - \left\lfloor \sum_k u_k^{(i)} \cdot d_{1,l-k}^{(i)} + 1/2 \right\rfloor, \quad d_{1,l}^{(i-1)} = d_{1,l}^{(i)} + \left\lfloor \sum_k p_k^{(i)} \cdot s_{1,l-k}^{(i-1)} + 1/2 \right\rfloor$$

$$s_{0,2l} = s_{1,l}^{(0)}, \quad s_{0,2l+1} = d_{1,l}^{(0)}$$

3 预测算子和更新算子的确定

提升框架可以通过有限步预测和更新来构造小波滤波器, 但如何来确定预测算子和更新算

子呢? 对于一次预测和一次更新的情形, 定理 1 给出了确定预测算子和更新算子的充要条件.

定理 1^[11] 若 $N \leq \tilde{N}$, 预测滤波器是次数为 \tilde{N} , 偏移量为 $-1/2$ 的 Neville 滤波器, 更新滤波器乘以 2 是次数为 N , 偏移量为 $1/2$ 的 Neville 滤波器, 则该滤波器具有 N 阶主消失矩和 \tilde{N} 阶对偶消失矩.

由定理 1 知

$$\sum_n p_n \cdot n^k = \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad (5)$$

$$2 \sum_n u_n \cdot n^l = \left(-\frac{1}{2}\right)^l \quad (6)$$

其中, p_n, u_n 分别是预测算子和更新算子, $l \leq k$.

根据式 (5)、式 (6) 确定预测算子和更新算子有不同的方法, 本文应用基于多项式局部拟合的办法来求 p_n 和 u_n .

拟合是用低次多项式来逼近所要求的函数, 实验数据可以任取多个, 而仅仅要求多项式尽可能接近给定的数据. 大量实际问题中, 已知模板点上的函数值只不过是一些实验数据, 实验数据本身就有误差, 要求在模板点上都与实验数据相符并不很合理. 因此, 拟合能够充分利用数据的信息, 对噪声更稳健.

$\{x_i, f(x_i)\} (i = 1, 2, \dots, N)$ 是来自一个连续信号的采样值, 用 $n(n+1 < N)$ 次多项式 $q_n(x_i)$ 对它进行拟合, 有

$$q_n(x_i) = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_n x_i^n, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad N > n + 1$$

运用最小二乘方法, 多项式系数为

$$\mathbf{A} = (\boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\psi}) \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{y}$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \cdots & x_N^n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{bmatrix}$$

这样, 利用拟合多项式可以估计在点 $x (x \neq x_i)$ 的函数值, 即

$$q_n(x) = [1, x, x^2, \dots, x^n] (\boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\psi})^{-1} \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{y} \quad (7)$$

已知函数在二进有理点 $\{j/(2^N), j \in Z\}$ 的值, 通过固定模板的多项式局部拟合估计二进有理点 $\{j/(2^N) + 1/(2^{N+1}), j \in Z\}$ 的值. 这相当于用一个模板在数据集上移动, 依次得到插值点的值, 插值点的函数值等于模板点函数值的线性组合, 组合系数为 $[1, x, x^2, \dots, x^n] (\boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\psi})^{-1} \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{y}$, 可见组合系数只依赖于模板和插值点的相对位置. 以 $1/2$ 为插值点, $\text{Stencil}(N+1, m) = \{m, m+1, m+2, \dots, m+N-1, m+N\}$ 为拟合模板, 多项式次数是 n , 根据式 (7), 相应的组合系数为

$$\mathbf{g} = [1, 1/2, 1/4, \dots, 1/2^n] (\boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\psi})^{-1} \boldsymbol{\psi}^T \quad (8)$$

其中

$$\boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} 1 & m & m^2 & \cdots & m^n \\ 1 & m+1 & (m+1)^2 & \cdots & (m+1)^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & m+N & (m+N)^2 & \cdots & (m+N)^n \end{bmatrix}$$

可以验证式(8)满足式(5)、式(6)的条件,也就是说,对于预测算子 p_n 和更新算子 u_n 可以利用式(8)来确定。

4 仿真实例

若对偶消失矩为4,模板点数为6,由式(8)得预测算子为 $p_n = \{-3/32, 7/32, 3/8, 3/8, 7/32, -3/32\}$, $n = -2, -1, 0, 1, 2, 3$; 主消失矩为2,模板点数4,由式(8)得更新算子为 $u_n = \{1/8, 1/8, 1/8, 1/8\}$, $n = -2, -1, 0, 1$ 。

应用提升框架的整数小波分解变换表达式为

$$s_{1,l}^{(0)} = s_{0,2l}, \quad d_{1,l}^{(0)} = s_{0,2l+1}$$

$$d_{1,l}^{(1)} = d_{1,l}^{(0)} - \left[-\frac{3}{32}s_{1,l-2}^{(0)} + \frac{7}{32}s_{1,l-1}^{(0)} + \frac{3}{8}s_{1,l}^{(0)} + \frac{3}{8}s_{1,l+1}^{(0)} + \frac{7}{32}s_{1,l+2}^{(0)} - \frac{3}{32}s_{1,l+3}^{(0)} + \frac{1}{2} \right]$$

$$s_{1,l}^{(1)} = s_{1,l}^{(0)} + \left[\frac{1}{8}d_{1,l-2}^{(1)} + \frac{1}{8}d_{1,l-1}^{(1)} + \frac{1}{8}d_{1,l}^{(1)} + \frac{1}{8}d_{1,l+1}^{(1)} + \frac{1}{2} \right]$$

应用提升框架的整数小波重建变换表达式为

$$s_{1,l}^{(1)} = s_{1,l}^{(0)} - \left[\frac{1}{8}d_{1,l-2}^{(1)} + \frac{1}{8}d_{1,l-1}^{(1)} + \frac{1}{8}d_{1,l}^{(1)} + \frac{1}{8}d_{1,l+1}^{(1)} + \frac{1}{2} \right]$$

$$d_{1,l}^{(1)} = d_{1,l}^{(0)} + \left[-\frac{3}{32}s_{1,l-2}^{(0)} + \frac{7}{32}s_{1,l-1}^{(0)} + \frac{3}{8}s_{1,l}^{(0)} + \frac{3}{8}s_{1,l+1}^{(0)} + \frac{7}{32}s_{1,l+2}^{(0)} - \frac{3}{32}s_{1,l+3}^{(0)} + \frac{1}{2} \right]$$

对 256×256 的 Mary 图像进行二次小波分解,低频图像如图3所示。图3(a)是原始图像,图3(b)是用例子中的小波进行整数变换得到的,Matlab6.5小波工具箱正交小波 db4 的消失矩为4,图3(c)是用它分解得到的。从图3中可以看出,图3(b)的视觉效果较好,图3(c)左上角的斜线发生了扭曲。也就是说,在压缩比为16:1的情况下,基于多项式局部拟合方法构造的小波滤波器具有良好的视觉性能。

用例子中小波的整数变换和 db4 小波对 Mary 图像分别进行数据压缩,均方误差曲线如图4所示。图中非零系数是指小波变换后总系数与不为零的系数之比,均方误差是指压缩后重建图像与原始图像偏差的均方差,从图中可以看出,二者的均方误差在不同的压缩比下相差不大。



图3 两次小波分解低频图像

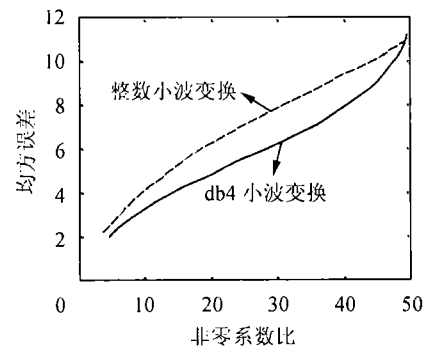


图4 均方误差曲线

总之,多项式局部拟合方法构造的小波滤波器可以是对称的,具有线性相位,低频图像具有良好的视觉性能,而且它的压缩比接近正交小波。对预测算子和更新算子下取整,可以实现整数小波变换,变换后尺度系数和小波系数都是整数,避免了量化步骤,能够直接进行编码。

5 结论

提升框架可以构造小波滤波器, 它的核心是确定预测算子和更新算子。该文引进了基于多项式局部拟合方法来确定预测算子和更新算子, 构造出一类双正交小波, 对每步提升下取整, 实现了整数小波变换。通过仿真说明了基于提升框架的这类整数小波变换具有优良的压缩性能, 而且不需要量化步骤。随着数字化程度的提高, 此方面的理论和算法会有很好的应用前景。

参 考 文 献

- [1] 彭玉华. 小波变换与工程应用. 北京: 科学出版社, 1999: 2-7.
- [2] 杨福生. 小波变换的工程分析与应用. 北京: 科学出版社, 1999: 1-3.
- [3] 程正兴, 姚普选, 张玲玲. 整数到整数小波分解与重构的现状, 工程数学学报, 2000, 17(增刊): 73-78.
- [4] Sweldens W. The lifting scheme: A custom-design construction of biorthogonal wavelets. *J. of Appl. and Comput. Harmonic Analysis*, 1996, 3(2): 186-200.
- [5] Sweldens W. The lifting Scheme: A new philosophy in biorthogonal wavelet constructions. A. F. Laine, M. Unser, editors, *Wavelet Applications in Signal and Image Processing III*, in Proc. SPIE 2569, 1995: 68-79.
- [6] Sweldens W. The lifting scheme: A construction of second generation wavelets. IMI Technical Report 1995, 06, Industrial Mathematics Initiative, Department of Mathematics, University of South Carolina, 1995.
- [7] Sweldens W, Schröder P. Building your own wavelets at home. *Wavelets Computer Graphics*, ACM SIGGRAPH Course Notes, 1996.
- [8] Sweldens W. In place calculation of wavelet transforms. Manuscript, 1996. <http://cm.bell-labs.com/who/wim>.
- [9] Daubechies I. Ten lectures on wavelets. CBMS-NSF Regional Conf. Series in Appl. Math., Vol.61, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1992: 215-249.
- [10] Calderbank R, Daubechies I, Sweldens W, Yeo B-L. Wavelet transforms that map integers to integers. *J. of Appl. and Comput. Harmonic Analysis*, 1998, 5(3): 332-369.
- [11] Kovačević J, Sweldens W. Wavelet families of increasing order in arbitrary dimensions. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2000, 9(3): 480-496.

吴永宏: 男, 1974年生, 博士生, 主要研究方向是数据压缩、小波理论及应用研究。
潘 泉: 男, 1961年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向是信息融合、估计与控制等。
张洪才: 男, 1938年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向是估计理论及其应用研究。
张绍武: 男, 1964年生, 副研究员, 博士生, 主要研究方向是生物信息学。
张云龙: 男, 1966年生, 讲师, 博士生, 主要研究方向是质量管理。