

# 本征权边界积分法解任意截面 波导传输问题\* \*\*

祝 雷 章文勋

(东南大学无线电系, 南京)

**摘要** 本文选取本征函数作为权函数,由格林第二恒等式建立边界积分方程,并采用边界基形式得到线性齐次方程组。这种方法不仅降低了系数矩阵的维数,而且使其各项仍保持为简单一项,减少了计算量。本文提供了几种常见金属波导的例子,计算结果既收敛快、又足够准确。

**关键词** 边界积分法;金属波导;本征值问题;截止波数

## 1. 引言

矩量法与边界积分法是两种并列发展的数值计算技术,前者求未知函数定义域内的解,属于域内方法;而后者求未知函数在定义域边界上的解,属于边界方法<sup>[1]</sup>。边界积分法有内域基和边界基两个分支,其中取无界空间的格林函数为权函数的边界基边界积分法即为边界元法。边界元法在电磁场领域内已被用于求解传输线、波导、辐射和散射等问题<sup>[2,3]</sup>。

用边界元法求解传输线和波导问题时,对于一些边界较长的横截面结构,如带状线、脊波导和鳍线等,由于边界积分区域较大,经单元剖分后所得线性方程组的维数较大,故计算量仍较大。虽然修正边界元法<sup>[4]</sup>可使积分区域仅限制在非规则边界部分,从而降低了该线性方程组的维数,在一定程度上减少了计算量。但是,由于修正格林函数为无穷级数形式,则线性方程组的各项系数也具有级数形式,与边界元法相比,实际上仍将高维线性方程组的一部分计算量转移成了系数的计算量。

就边界积分法的一般意义来讲,权函数未必选取格林函数,也可以选取满足方程和规则部分边界条件的本征函数<sup>[5]</sup>。这样不仅将积分区域限制于非规则边界部分,降低了线性方程组的维数;而且使各系数项仍保持为一项,故减少了计算量。

## 2. 原理

任意截面金属波导的横截面形状如图1所示,求解其截止波数是一个二维本征值问题。其未知函数 $\phi(\mathbf{r})$ 为波导模式的标位函数:对于TM模, $\phi(\mathbf{r}) = E_z(\mathbf{r})$ ;对于TE模, $\phi(\mathbf{r}) = H_z(\mathbf{r})$ 。 $\phi(\mathbf{r})$ 满足二维亥姆霍茨方程和真实边界 $\Gamma$ 上的齐次边界条件,

\* 1988年2月8日收到,同年12月修改定稿。

\*\* 国家自然科学基金资助课题。

$$\nabla_{\perp}^2 \phi(\mathbf{r}) + k_c^2 \phi(\mathbf{r}) = 0, \quad (\mathbf{r} \in s) \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \in \Gamma} = 0, \quad (\text{TM 模}) \\ \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial n}|_{\mathbf{r} \in \Gamma} = 0, \quad (\text{TE 模}) \end{array} \right. \quad (2a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \in \Gamma} = 0, \quad (\text{TM 模}) \\ \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial n}|_{\mathbf{r} \in \Gamma} = 0, \quad (\text{TE 模}) \end{array} \right. \quad (2b)$$

式中,  $k_c$  为金属波导的截止波数, 即待求本征值. 为了利用二维格林第二恒等式

$$\iint_{\Gamma} [W(\mathbf{r}) \nabla_{\perp}^2 \phi(\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r}) \nabla_{\perp}^2 W(\mathbf{r})] ds = \oint_{\Gamma} \left[ W(\mathbf{r}) \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial n} - \phi(\mathbf{r}) \frac{\partial W(\mathbf{r})}{\partial n} \right] d\Gamma \quad (3)$$

先假设权函数  $W(\mathbf{r})$  满足相同本征值方程, 以及虚拟规则边界  $\Gamma_1$  上的边界条件 (图 1),

$$\nabla_{\perp}^2 W(\mathbf{r}) + k_{c_1}^2 W(\mathbf{r}) = 0 \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} W(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \in \Gamma_1} = 0, \quad (\text{TM 模}) \\ \frac{\partial W(\mathbf{r})}{\partial n}|_{\mathbf{r} \in \Gamma_1} = 0 \quad (\text{TE 模}) \end{array} \right. \quad (5a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} W(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \in \Gamma_1} = 0, \quad (\text{TM 模}) \\ \frac{\partial W(\mathbf{r})}{\partial n}|_{\mathbf{r} \in \Gamma_1} = 0 \quad (\text{TE 模}) \end{array} \right. \quad (5b)$$

式中,  $k_{c_1}$  为规则边界区域的截止波数, 令  $k_{c_1} = k_c$  则(3)式中的面积分项为零. 由此得到以下边界积分方程,

$$\oint_{\Gamma} \left[ W(\mathbf{r}) \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial n} - \phi(\mathbf{r}) \frac{\partial W(\mathbf{r})}{\partial n} \right] d\Gamma = 0 \quad (6)$$

式中, 本征权函数  $W(\mathbf{r})$  选为

$$W_n(\mathbf{r}) = \begin{cases} \sin\left(\frac{n\pi}{h}y\right) \sin(k_{x_n}x), & (\text{TM 模}) \\ \cos\left(\frac{n\pi}{h}y\right) \cos(k_{x_n}x), & (\text{TE 模}) \end{cases} \quad (7a)$$

$$\cos\left(\frac{n\pi}{h}y\right) \cos(k_{x_n}x), \quad (\text{TE 模}) \quad (7b)$$

$$k_{x_n} = \sqrt{k_c^2 - (n\pi/h)^2}, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (8)$$

利用  $\phi(\mathbf{r})$  的齐次边界条件可使(6)式简化为

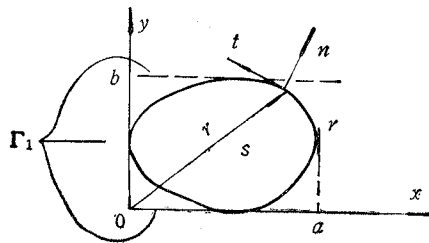


图 1 任意金属波导的横截面图

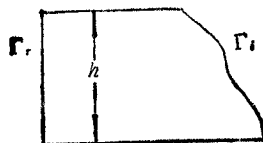


图 2 含有部分规则边界的金属波导

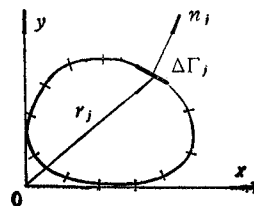


图 3 离散化的边界

$$\left\{ \oint_{\Gamma} \left[ W(\mathbf{r}) \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial n} \right] d\Gamma = 0, \quad (\text{TM 模}) \right. \quad (9a)$$

$$\left. \left\{ \oint_{\Gamma} \left[ \frac{\partial W(\mathbf{r})}{\partial n} \phi(\mathbf{r}) \right] d\Gamma = 0, \quad (\text{TE 模}) \right. \right. \quad (9b)$$

如果  $\Gamma$  本身含有规则部分  $\Gamma_r$  和非规则部分  $\Gamma_i$  (图2), 则取  $\Gamma_i$  通过  $\Gamma_r$ , 使  $W(\mathbf{r})$  在  $\Gamma_r$  上也满足相同的齐次边界条件, 可使方程(9)进一步简化为,

$$\left\{ \int_{\Gamma_i} \left[ W(\mathbf{r}) \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial n} \right] d\Gamma = 0, \quad (\text{TM 模}) \right. \quad (10a)$$

$$\left. \left\{ \int_{\Gamma_i} \left[ \frac{\partial W(\mathbf{r})}{\partial n} \phi(\mathbf{r}) \right] d\Gamma = 0, \quad (\text{TE 模}) \right. \right. \quad (10b)$$

由于采用了本征函数作为权函数, 使含有未知函数  $\phi(\mathbf{r})$  的积分区域仅在边界  $\Gamma$  或  $\Gamma_i$  上部分, 故称为本征权边界基边界积分法, 简称为本征权边界积分法。

### 3. 公式

将边界  $\Gamma$  或  $\Gamma_i$  划分成  $N$  段 (图3), 记为  $j = 1, 2, \dots, N$ . 将积分方程(9)或(10)转化成  $N$  维线性齐次方程组, 用矩阵形式表示为

$$[\mathbf{H}(k_c)]_{N \times N} \cdot [\mathbf{S}]_{N \times 1} = [\mathbf{O}]_{N \times 1} \quad (11)$$

可写出系数矩阵  $[\mathbf{H}]$  的各元素为

$$H_{ij} = \begin{cases} \int_{\Delta\Gamma_j} \left[ \sin\left(\frac{i\pi}{h}y\right) \sin(k_{xi}x) \right] d\Gamma_j, & (\text{TM 模}) \\ \int_{\Delta\Gamma_j} \frac{\partial}{\partial n_j} \left[ \cos\left(\frac{i\pi}{h}y\right) \cos(k_{xi}x) \right] d\Gamma_j, & (\text{TE 模}) \end{cases} \quad (12a)$$

$$\quad (12b)$$

式中,

$$k_{xi} = \sqrt{k_c^2 - \left(\frac{i\pi}{h}\right)^2} \quad (13)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, N$$

变量列阵  $[\mathbf{S}]$  的元素  $S_j$  则为第  $j$  段上未知函数的取样值  $\frac{\partial \phi(\mathbf{r}_j)}{\partial n_j}$  或  $\phi(\mathbf{r}_j)$ . 为得到线性齐次方程组(11)的非平凡解, 必须

$$\det [\mathbf{H}(k_c)] = 0 \quad (14)$$

于是通过解超越方程可确定截止波数  $k_c$ .

在上述过程中,  $h$  值的选取与计算时间和解的准确性有很大关系. 若选取过少的  $N$  和过小的  $h$ , 从(12)式中可看出, 被积函数在  $\Delta\Gamma_j$  内变化较大, 只能采用数值积分方法来计算积分值, 从而增加了计算量; 若选取过多的  $N$  和过大的  $h$ , 虽可减少计算量, 但这使得系数矩阵中每一行元素之间的值较接近, 造成系数矩阵的性态变差, 故所得的解误差较大. 可见应该选取合适的  $h$ , 使被积函数在各积分子域内变化较缓慢, 且保证系数矩阵处于良好状态, 这样不但计算量小、收敛快, 而且能得到较准确的解。

### 4. 实例

下面利用本征权边界积分法对几种常见的金属波导的截止波数进行数值计算. 其结果分别示于表 1—表 5.

(1) 圆波导

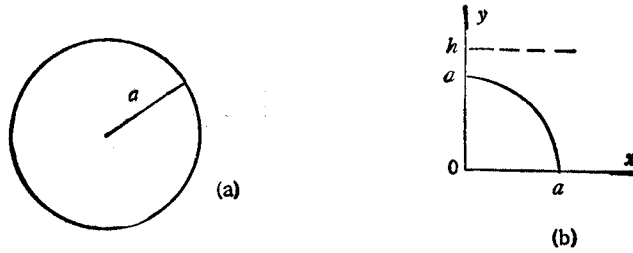


图4 金属圆波导  
(a) 圆波导截面图 (b) 对称单元

表1 金属圆波导  $E_{01}$  模的截止波数

准确值  $k_c a = 2.4048$

$h/a = 5.0$	$N$	2	3	4	5	6	7	8	9	$\infty$
计算值 $\tilde{k}_c a$		2.4048	2.4048	2.4048	2.4048	2.4048	2.4048	2.4048	2.4146	2.4644
$N = 6$	$h/a$	1.0	1.4	1.8	2.0	2.4	6.0	8.0	10.0	11.0
计算值 $\tilde{k}_c a$		3.4288	1.9932	2.4045	2.4048	2.4048	2.4048	2.4048	2.3079	2.4456

表2 金属圆波导  $H_{11}$  模的截止波数

准确值  $k_c a = 1.841$

$N, h/a$	3, 3.0	6, 6.0	9, 10.0
计算值 $\tilde{k}_c a$	1.841	1.841	1.841

(2) 等腰直角三角波导

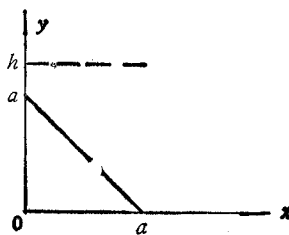


图5 等腰直角三角波导

表 3 等腰直角三角波导  $H_{01}$  模的截止波数 $h/a = 5.0$ , 准确值  $k_c a = 3.142$ 

$N$	2	3	4	5	6	7
$\tilde{k}_c a$	3.086	3.159	3.141	3.141	3.141	3.141

## (3) 零厚度脊波导

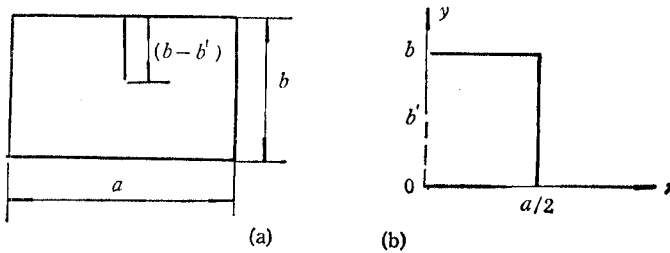


图 6 零厚度脊波导

表 4 零厚度脊波导  $H_{10}$  模的截止波长

$b'/b$	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.5
准确值 $\lambda_c/a$	3.062	2.925	2.747	2.636	2.536	2.505	2.374	2.268
节点数 $M, N$	2, 10	3, 9	3, 10	3, 9	4, 8	5, 6	4, 6	5, 5
计算值 $\tilde{\lambda}_c/a$	3.1353	2.9343	2.7523	2.6286	2.5236	2.4446	2.3643	2.2420
百分误差(%)	2.39	0.32	0.19	0.28	0.49	2.40	0.41	1.10

表 5 零厚度脊波导  $H_{30}$  模的截止波长

$b'/b$	0.1	0.2	0.3
准确值 $\lambda_c/a$	0.880	0.867	0.858
节点数 $M, N$	2, 8	3, 7	3, 7
计算值 $\tilde{\lambda}_c/a$	0.8953	0.8567	0.8398
百分误差(%)	1.74	1.19	2.05

感谢东南大学无线电工程系洪伟等同志的有益讨论。

## 参 考 文 献

- [ 1 ] 章文勋, 电磁场工程中的泛函方法, 上海科学技术文献出版社, 上海, 1985, 第四章.  
[ 2 ] 吴万春, 文炯一, 王家礼, 通信学报, 1986年, 第 2 期, 第 53—61 页.  
[ 3 ] S. Kagami, I. Fukai, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-32** (1984), 455—461.  
[ 4 ] Zhang Wenxun, Hong Wei, Yuan Jinyun. Proc. OFSET'87, Academic Press, Beijing, 1987, pp. 415—420.  
[ 5 ] Zhang Wenxun. The Methodology of Boundary Methods. IEEE Int. Sym. on AP, Syracuse, UAS, 1988. pp. 299—332

## SOLUTION OF ARBITRARY CROSS-SECTION WAVEGUIDE USING METHOD OF EIGEN-WEIGHTED BOUNDARY INTEGRAL EQUATION

Zhu Lei Zhang Wenxun

(Southeast University, Nanjing)

**Abstract** Based on the second kind of Green's identity, a boundary integral equation for arbitrary cross-section waveguide is transformed to a system of linear homogeneous algebraic equations by means of expansion of boundary bases and using the eigenfunctions of a fictitious regular boundary as weighting functions, which corresponds to less algebraic equations than BEM and simpler coefficients than the modified BEM. The numerical results for some typical metallic waveguides are given by using the method of eigen-weighted boundary integral equation, and they are exact enough with fast convergence.

**Key words** Boundary integral method; Metallic waveguide; Eigenvalue problem; Cutoff wavenumber