

行波管非线性相互作用理论中的能量守恒问题*

宋文森

提 要

本文从动力学的一般原理出发推导了 Rowe 的行波管非线性理论中的能量守恒关系。通过分析证明 Rowe 理论中存在能量不守恒的问题,那是由于 Rowe 理论中所采用的感应电流的不合理性所造成。计算和分析都证明由于这种能量不守恒所带来的效率的相对误差最大可以和 2C 差不多,即在 30% 以上,所以是相当可观的。本文的分析不光对螺旋线行波管适用,并且对所有采用等效电路模型的微波器件如“O”型返波管,“M”型器件等也都适用。因这些器件的非线性相互作用理论,原则上都存在同样的问题。

一、引 言

行波管非线性相互作用理论早在1953年就由 Nordsieck^[1] 提出,以后由 Tien^[2]和 Rowe^[3]加以完善。1965年出版的 Rowe 著的“电子与波的非线性相互作用现象”^[4]一书对此作了全面的总结。现在 Rowe 的理论已经成为螺旋线行波管的理论和设计的基础之一,近年来有关螺旋线行波管的理论和设计的一系列文章:如“螺旋线行波管的设计程序”、“相位聚焦和非线性畸变的研究”等等都基于这一理论。但是,Rowe 的理论中存在着一个问题,能量的不守恒性,即按 Rowe 所给的效率的理论公式,在无损耗的假定下,线路上所得到的高频能量总是大于电子注所消耗的动能。由于这一能量不守恒性的存在,使 Rowe 的理论和实际行波管的测试结果之间差别较大,很难满足实际工程设计的需要。一些文章已经指出了这一问题,并提出了修正的方案^[5,6]。但是,这些文章并没有找到造成能量不守恒的物理上和数学上的原因,因而,只是一些粗略的讨论和修正。

文献[7]对 Rowe 理论中的输出功率的表达式作了修正,从数学上证明了通过所加的修正项,电子注所消耗的动能和高频场得到的能量得到了平衡。数值计算的结果也较好地证明了这一点。但该文在分析能量关系时所采用的只是 Rowe 理论本身的一些方程,由于这一方法的局限性,不容易看清其中的物理内容,因而在该文中,对于修正项的物理意义没有加以说明,也没有涉及到产生能量不守恒的物理模型上的原因。

本文从动力学的普遍原理出发,导出了螺旋线行波管中能量关系的数学表达式,这表达式和文献[7]的形式完全一致。并从等效电路上得到了类似于文献[6]中所用的功率守

* 1978年12月28日收到。

恒的形式。进一步分析表明上述两种行波管中的能量守恒的公式,只不过是形式上的守恒,它并不能解决 Rowe 理论中所存在的能量不守恒这一缺陷。Rowe 理论中所存在的能量不守恒性是由其基本的物理模型所造成的,即是由于在这种模型中所采用的感应电流的形式不能反应能量守恒的基本规律所造成的。这就提出了进一步改进行波管非线性相互作用的模型的必要性,并为此提供了改进的方向,但进一步改进模型的问题不在本文中讨论。本文的分析不光对螺旋线行波管适用,并且对所有采用等效电路模型的微波器件如“O”型返波管、“M”型器件等也都适用。因这些器件原则上都存在同样的问题。

二

为了搞清行波管非线性相互作用理论中的能量关系,我们从动力学的一般原理出发,为了使分析简化起见,假设:(1)整个系统是一维的,(2)无直流电场,(3)不考虑空间电荷力的影响($QC = 0$),(4)线路是无损的($d = 0$)。应该指出,这些假定只是为了使分析更加简单明了,并不影响我们的结论在更一般的情况下的正确性。

除了上述假定外,还有一个基本的假定,就是线路中的高频电场可以通过电位函数的形式来表示:

$$E(z, t) = - \frac{\partial V(z, t)}{\partial z} \quad (1)$$

这个假定是行波管的 Pierce^[8]的线性理论,也是 Rowe 理论的基础,通过这个假定才能使微波场的问题用等效电路的形式来表示。

根据上述假定,即可写出单个电子的运动方程:

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -eE(z, t) = e \frac{\partial V(z, t)}{\partial z} \quad (2)$$

上式可以改写成:

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{1}{2} m v^2(z, t) \right] = e \frac{\partial V(z, t)}{\partial z} \quad (3)$$

这里 e 、 m 和 v 分别为电子的电荷、质量和速度。由于,在行波管中电路的简谐的特性,位函数 $V(z, t)$ 对时间的变化是简谐的(不考虑高次谐波)。为了运算方便起见,可把(3)式改写成:

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{1}{2} m v^2(z, t) \right] = e \frac{dV(z, t)}{dz} - e \frac{\partial V(z, t)}{\partial t} \bigg/ \frac{dz}{dt} \quad (3)$$

若令电子出发时间为 t_0 , 上式从 0 到 z 积分:

$$\frac{1}{2} m [v^2(z, t) - v^2(0, t_0)] = e [V(z, t) - V(0, t_0)] - e \int_0^z \frac{\partial V(z, t)}{\partial t} \cdot \frac{1}{v(z, t)} dz \quad (4)$$

现在考虑从 0 到 T 的一周期内的电子的总的能量关系。若输入无调制,直流电流为 I_0 , 单位时间进入电场入口的电子数为 I_0/e 。从 0 到 T 积分即为一周期内的能量变化,除以周期 T 就成为功率的关系:

$$\frac{I_0}{2T\eta} \int_0^T [(v^2(z, t) - v^2(0, t_0))] dt_0$$

$$= \frac{I_0}{T} \int_0^T [V(z, t) - V(0, t_0)] dt_0 - \frac{I_0}{T} \int_0^z \int_0^T \frac{\partial V(z, t)}{\partial t} \cdot \frac{1}{v(z, t)} dz dt_0 \quad (5)$$

注意: 这里到达 z 位置的时间 t 和出发时间 t_0 有关, t 是 z 和 t_0 的二元函数. 如果考虑到电子注上没有初始调制, $V(0, t_0)$ 在一个周期上积分为零; $v(0, t_0)$ 为常数用直流速度 u_0 表示, 则得:

$$\begin{aligned} & \frac{I_0}{2T\eta} \int_0^T [u_0^2 - v^2(z, t)] dt_0 \\ &= \frac{I_0}{T} \int_0^z \int_0^T \frac{\partial V(z, t)}{\partial t} \cdot \frac{1}{v(z, t)} dz dt_0 - \frac{I_0}{T} \int_0^T V(z, t) dt_0 \end{aligned} \quad (6)$$

(6) 式即为用等效迴路所表示的高频场中电子运动的能量守恒的一般表达式. 左边为电子注损失的动能功率, 右边应是高频场增加的功率. 这里高频功率被分成了两项: 第一项相应于 Rowe 理论中通过感应电流注入到线路的功率; 第二项就是文献 [7] 中提出的修正项, 它在形式上就是一个周期的电子在位置 z 处的高频场的位能的平均值.

为了使 (6) 式和 Rowe 的结果进行比较, 我们采用同样的归一化的形式:

$$\begin{aligned} y &= \frac{C\omega}{u_0} z, \\ \Phi_0 &= \omega t_0 \\ V(z, t) &= \text{Re}[V(z) e^{-j\Phi}] \\ -\Phi(z, t) &= \omega t - [y/C - \theta(y)] \\ v(z, t) &= u_0 [1 + 2Cu(y, \Phi_0)] \\ V(z) &= \frac{Z_0 I_0}{C} A(y) \end{aligned}$$

这里引入的参量的意义和 Rowe 中完全一致不再重述. 代入这些归一化量后 (6) 式变为:

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [1 + 2Cu(y, \Phi_0)]^2 d\Phi_0 \\ & \frac{2C}{\pi} \int_0^y A(y) \int_0^{2\pi} \frac{\sin \Phi(y, \Phi_0)}{1 + 2Cu(y, \Phi_0)} d\Phi_0 dy - \frac{2C^2}{\pi} A(y) \int_0^{2\pi} \cos \Phi(y, \Phi_0) d\Phi_0 \end{aligned} \quad (7)$$

(7) 式和文献 [7] 的 (25) 式一致 (只是这里没有考虑空间电荷项和 $\int_0^{2\pi} \cos \Phi_0 d\Phi_0 = 0$). 可以把它和 Rowe 的结果相对照. 文献 [7] 中已经证明其右边第一项即为 Rowe 所给的效率, 记以 η_R . 而从动力学的分析显然 (7) 式左边才是真正的效率, 所以:

$$\eta = \eta_R - \frac{2C^2}{\pi} A(y) \int_0^{2\pi} \cos \Phi(y, \Phi_0) d\Phi_0 \quad (8)$$

三

为了进一步讨论能量守恒关系式 (7) 的物理意义, 我们返回到等效电路模型. 从图 1 的等效电路模型, 按 Rowe 的文章, 可以推出下面两个方程:

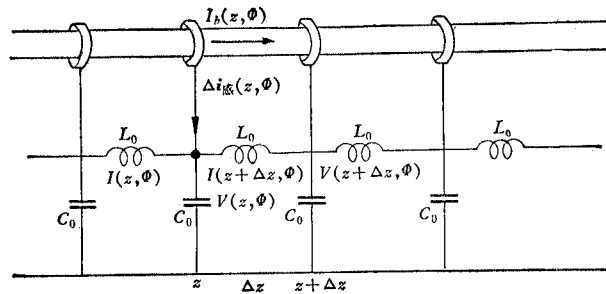


图1 电子注和电路波相互作用模型图

$$A(y) \frac{d^2\theta(y)}{dy^2} + 2 \frac{dA(y)}{dy} \left[\frac{d\theta(y)}{dy} - \frac{1}{C} \right] = -\frac{1 + bC}{\pi C} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \Phi(y, \Phi_0)}{1 + 2Cu(y, \Phi_0)} d\Phi_0 \quad (9)$$

和

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re}[V^*(y, \Phi) \cdot I(y, \Phi)] = 2CI_0V_0A^2(y) \frac{[1 - C^{d\theta(y)/dy}]}{1 + bC} \quad (10)$$

(9)式即工作方程中第二式(见文献[4] VI章(28)式) $d = 0$ 的情形; (10)式即 Rowe 所给的输出功率的公式(见文献[4] VI章(38)式),实际上这不是输出功率,而只是归一化距离 y 处流过电感 L_0 的功率流。

(9)式两边乘 $\left[-\frac{2C^2}{1 + bC} A(y) \right]$ 并从 0 到 y 积分:

$$\text{右边} = \frac{2C}{\pi} \int_0^y A(y) \int_0^{2\pi} \frac{\sin \phi(y, \Phi_0)}{1 + 2Cu(y, \Phi_0)} d\Phi_0 dy$$

这即(7)式右边第一项。

$$\begin{aligned} \text{左边} &= \int_0^y \frac{d}{dy} \left[2CA^2(y) \frac{[1 - C^{d\theta(y)/dy}]}{1 + bC} \right] \\ &= 2CA^2(y) \frac{[1 - C^{d\theta(y)/dy}]}{1 + bC} - 2CA^2(0) \frac{\left[1 - C \frac{d\theta(y)}{dy} \right]_{y=0}}{1 + bC} \\ &= \frac{1}{I_0V_0} \frac{1}{2} \operatorname{Re}[V^*(y, \Phi)I(y, \Phi)] - \frac{P_{\text{输入}}}{I_0V_0} \end{aligned}$$

这里最后一步中应用了(10)式和入口条件 $\left. \frac{d\theta(y)}{dy} \right|_{y=0} = -b$, 这样和分母 $1 + bC$ 正好消去, 而 $2CA^2(0)$ 即归一化的输入功率。把右边和左边等起来, 就得到(7)式的右边第一项即是在 y 处流过电路(电感 L_0)的归一化功率流和输入归一化功率流之差。

下面求(7)式右边第二项。为此我们先求电子注上的基波电流 I_b 。由于求 I_b 的过程中涉及电流方向, 电子电荷的符号等复杂的关系, 发现 Rowe 的结果未仔细考虑电流的方向, 所以差了一个负号。从连续性方程得:

$$\rho(y, \Phi_0) = \frac{I_0}{u_0} \left| \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \right| \frac{1}{1 + 2Cu(y, \Phi_0)} \quad (11)$$

从(11)式得到的 ρ 是绝对值。所以电子注电流应表示为:

$$I(y, \Phi_0) = -\rho(y, \Phi_0)v(y, \Phi_0) = -I_0 \left| \frac{\partial \Phi_0}{\partial \Phi} \right| \quad (12)$$

(12)式上的符号的意义很容易理解,因为在图 1 的模型中假定电流方向,电子注运动方向都是 z 的方向,而 I_0 取正值,所以实际电流 I 应加负号. 下面再把电流 I 展开成傅氏级数,得基波电流 I_b 的表达式:

$$I_b(y, \Phi_0) = -\frac{I_0}{\pi} \left[\int_0^{2\pi} \cos \Phi(y, \Phi_0) d\Phi_0 + j \int_0^{2\pi} \sin \Phi(y, \Phi_0) d\Phi_0 \right] e^{-j\Phi} \quad (13)$$

和文献[6]中类似,我们定义一个电子注和电路耦合场的平均功率流:

$$\begin{aligned} P_{b-c}(y) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[V^*(y, \Phi_0) \cdot I_b(y, \Phi_0)] \\ &= -\frac{1}{2} \frac{Z_0 I_0}{C} A(y) \frac{I_0}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos \Phi(y, \Phi_0) d\Phi_0 \\ &= -\frac{2C^2}{\pi} I_0 V_0 A(y) \int_0^{2\pi} \cos \Phi(y, \Phi_0) d\Phi_0 \end{aligned} \quad (14)$$

从这里看出(7)式右边第二项等于 $\frac{1}{2} \operatorname{Re}[V^* I_b]/I_0 V_0$, 即在 y 处的耦合场的归一化功率流. 按文献[6]中 Detweiler 和 Rowe 的说法,这一项就是电子注和电路的耦合功率,最后我们可以把(7)式改写为:

$$\begin{aligned} &\frac{I_0}{e} \frac{1}{2} m u_0^2 - \frac{I_0}{e} \frac{1}{2} m \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v^2(y, \Phi_0) d\Phi_0 \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[V^*(y, \Phi) \cdot I(y, \Phi)] - 2C I_0 V_0 A_0^2 + \frac{1}{2} \operatorname{Re}[V^*(y, \Phi) I_b(y, \Phi)] \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \operatorname{Re}[V^* \cdot I] + \frac{1}{2} \operatorname{Re}[V^* \cdot I_b] + \frac{I_0}{e} \frac{1}{2} m \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v^2(y, \Phi_0) d\Phi_0 \\ &= \frac{I_0}{e} \frac{1}{2} m u_0^2 + 2C I_0 V_0 A_0^2 = P_{\text{总}}(\text{常数}) \end{aligned} \quad (15)$$

如果把第一项称为电路功率 P_c ;第二项称为耦合功率 P_{b-c} ;第三项称为电子注功率 P_b , 则整个系统的功率守恒的形式为:

$$P_c(y) + P_{b-c}(y) + P_b(y) = \text{常数} \quad (16)$$

这就是文献[6]上给出的形式. 所不同的是在文献[6]中这个能量守恒式是一种假设,而我们这里得到了严格的证明,另一个差别是文献[6]中认为

$$P_{b-c}(y) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[V_c^* \cdot i_{1c}(y)].$$

其中 V_c 和我们的结果一样表示电路电压;而 i_{1c} 认为是感应到电路的基波电流,这显然是不对的,我们已经严格地证明了是电子注的基波电流. 且在文献[6]中给出的 P_{b-c} 的具体形式是(见(47)式)

$$P_{b-c} = -\frac{4C^2 |I_0|}{1 + Cb} V_0 A(y) \frac{1}{\pi x_b^2} \int_0^{x_b'} \int_0^{2\pi} \frac{\phi(x') \cos \Phi' x'_0 dx'_0 d\Phi'_0}{1 + 2C u_y(y, x'_0 \Phi'_0)}$$

这是二维的情形,在一维下可化为

$$P_{b-c} = -\frac{4C^2|I_0|}{1+Cb} V_0 A(y) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \Phi(y, \Phi_0)}{1+2cu(y, \Phi_0)} d\Phi_0$$

该式和(14)式的差别是很小的,只差了两个分母项 $(1+Cb)$ 和 $1+2cu(y, \Phi_0)$,而这些都是接近于 1 的量. 由于文献[6]中不是严格的证明,而只是一种假定,所以无法讨论这些小的差别. 但从积分号内的 $\cos \Phi(y, \Phi_0)$ 就可以证明即使在文献[6]中,所用的 i_{ic} 也不是感应电流,因为如用感应电流这里出现的函数将是 $\sin \Phi(y, \Phi_0)$. 这里需指出,感应电流这个说法不确切,还在于一个点上的感应电流实际上是一个微分量,只有单位长度上的感应电流才是一个有限的值.

四

求得了(8)和(15)式之后,行波管中的能量守恒问题似乎已经得到了很好的解决.(15)式可以解释为:流过行波管任何截面上电子注的动能功率流、等效迴路上的高频功率流及电子注上的偶合功率流的总和保持不变(在无损的假定下)这就是整个系统的总能量. 所谓偶合功率流,实际上也是高频功率的一部分,所以高频的总的输出功率应包含这一部分,这样就得到了(8)式所表示的修正的效率公式. 在进一步分析偶合功率流的物理意义之前,我们先讨论一下偶合功率流和电路上高频功率流的相对大小. 由此可以给出 Rowe 理论可能造成的误差的范围. 相对的效率误差 $\Delta\eta$ 可以表示为

$$\begin{aligned} \Delta\eta &= \frac{|\eta_{b-c}|}{\eta_c} = \frac{4C^2 A(y) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \Phi(y, \Phi_0) d\Phi_0}{2C A^2(y) \left[\frac{1 - C d\theta(y)/dy}{1 + Cb} \right]} \\ &\approx \frac{2C \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \Phi(y, \Phi_0) d\Phi_0}{A(y)} \end{aligned} \quad (17)$$

这里假定分母中的方括号项近似为 1. 分子中 $\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos \Phi(y, \Phi_0) d\Phi_0$ 即归一化的电子注中基波电流的 $\cos \Phi$ 分量. 我们知道在饱和时电子注的基波电流的 $\sin \Phi$ 分量为零,所以这项即归一化注电流的基波分量. 从数值计算的一般结果表明,归一化的注电流的基波分量,和归一化电压 $A(y)$ 在饱和时一般都在 1 附近,所以效率相对误差

$$\Delta\eta \approx (1-2)C \quad (18)$$

在一般情况下,行波管工作在 C 等于 0.1 到 0.2 之间,所以这一相对误差最高可达 30% 以上. 这对于工程设计来说当然是不能允许的. 从一般的大讯号计算可以得到饱和时注电流基波分量的大小和工作状态有很大关系,当非同步参量 b 越小时它愈大. 这是因为在这种情况下相互作用越不充分,由于电子注基波电流的相位落后而造成了饱和,而饱和时电子注的基波电流的幅度仍相当大. 当 b 大时相互作用较充分,饱和时的电子注基波电流幅度减小,因而相对的效率误差也大大减小. 这也造成了 Rowe 理论中, C 较大时,饱和效率对非同步参量 b 的不敏感性. (参看文献[4] VI 章图 12, 13)

数值计算的结果完全证实了理论分析的结果. 为了保证计算的精度,我们采用了变

步长的办法。因为分析表明,每一步中电子相位的变化大小对于计算的精度影响最大,所以我们用 $|\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i,j}|$ 作为控制步长的标准。这里, i 表示在分离的 y 方向前进的步数, j 是不同初始相位的电荷盘的标记。每一周期选 32 个电荷盘, 32 个电荷盘中如果有一个在 y 方向前进一步产生的相位差超过某一规定值时, 步长就自动缩小。具体的计算方法和程序可见文献[5]。

计算结果见表 1。表中符号的意义:

$$\eta_E = 1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [1 + 2Cu_i]^2 d\Phi_0 \text{——由电子动能差算得的效率。}$$

$$\eta_R = \frac{1}{I_0 V_0} \frac{1}{2} \operatorname{Re}[V^* \cdot I] = 2CA^2(y) \frac{1 - Cd\theta/dy}{1 + Cb} \text{。——Rowe 所给的效率。}$$

$$\eta_{b-c} = \frac{1}{I_0 V_0} \frac{1}{2} \operatorname{Re}[V^* \cdot I_b] = -\frac{2C^2}{\pi} A(y) \int_0^{2\pi} \cos \Phi(y, \Phi_0) d\Phi_0 \text{——电子注和电路的耦合效率。}$$

$\eta_{all} = \eta_R + \eta_{b-c}$ ——总的高频效率,即修正后的效率。

$\Delta\eta_R = |\eta_E - \eta_R|$ ——Rowe 公式所造成的能量不守恒的绝对误差,理论上它应等于 η_{b-c} 。

$\Delta\eta_{all} = |\eta_E - \eta_{all}|$ ——修正后的公式下能量不守恒的绝对误差。它主要是由计算精度引起的。

$\Delta\eta_R/\eta_E$ 和 $\Delta\eta_{all}/\eta_E$ ——分别表示两种情况下的相对误差。

表 1 饱和点效率、绝对误差和相对误差

b	0				2	
	0		0.1		0.2	
QC					0.15	
C	0.15	0.2	0.1	0.2	0.2	0.15
$\eta_E(\%)$	25	28.5	20.8	30.4	26.2	45
$\eta_R(\%)$	32.2	38.5	23.5	38.4	32	48
$\eta_{b-c}(\%)$	-5	-8.5	-2.7	-8	-5.5	-2.2
$\eta_{all} = \eta_R + \eta_{b-c}(\%)$	27.2	30	20.8	30.4	26.5	45.8
$\Delta\eta_R = \eta_E - \eta_R (\%)$	7.2	10	2.7	8	5.8	3
$\Delta\eta_{all} = \eta_E - \eta_{all} (\%)$	2.2	1.5	0	0	0.3	0.8
$\Delta\eta_R/\eta_E(\%)$	28.8	35	13	26.7	22	6.6
$\Delta\eta_{all}/\eta_E(\%)$	8.8	5.2	0	0	1	1.7

表中的数据都是对饱和点,且忽略了输入功率,计算的结果和分析一致,在 C 大, b 小的情况下, Rowe 公式下的效率误差最大,其相对误差达 35%。经过修正以后的效率基本上达到能量守恒。

在起始段的情况特别有意思,因为根据定性的分析,在这一段,高频场的作用主要是群聚电子注。这时电子注的动能功率是增长的,由电子注动能计算的效率是负的,也就是说电子注从高频场中吸收能量,这时高频功率应该减少(相对于输入的功率),但是按 Rowe 理论计算高频效率却是增长的。经过修正后就基本上一致了,其结果见图 2。图中 η_E 起始段为负,表示电子注吸收能量, η_R 上升表示按 Rowe 模型,这时高频功率也增加,这显然不符合能量守恒原理。这里 η_{bc} 是绝对值。真实效率 $\eta_R - \eta_{b-c}$ 基本上和 η_E 一致。

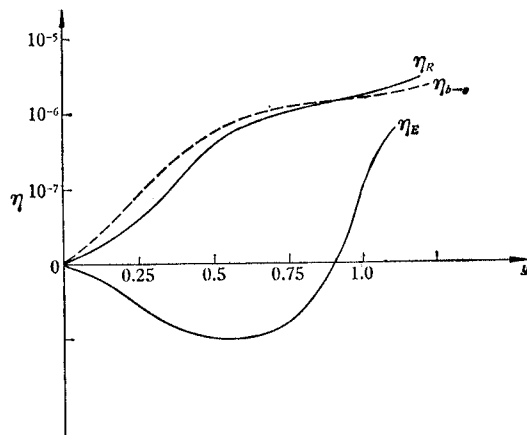


图2 在起始部分的 η_E , η_R 和 η_{b-c} 随 y 的变化 $c = 0.15, d = 0, b = 0, QC = 0$

五

虽然,加入了耦合功率流以后,Rowe的理论模型能够实现能量守恒,而且在进一步改进相互作用的物理模型之前,(8)式的效率修正公式对于提高理论计算和实验的一致性也是很有价值的。但是,进一步分析耦合功率流的物理意义,发现在理论上仍存在不可克服的困难。这可以从两方面来加以说明:首先,这耦合功率流本身的确切的物理意义到底是什么?特别是当电路和电子注分离时,即输出时,它转化为什么?如文献[7]中所提出的转化为输出功率,确实它也只能转化为输出功率,但怎样实现这种转化?更重要的是这种耦合功率流的存在和整个等效电路的理论模型是矛盾的。按现在的分析,高频功率分成了两部分,一部分是电路上的,另一部分是电子注的;而从等效电路模型看作用在电子注的高频场却完全由电路上的功率所决定。这个矛盾在输入段看得最清楚。在那里,由于电子注吸收高频场能量,总的高频能量(包括电路上的和耦合的能量)是减少的;而与此同时,用来调制电子注的电场,由于按等效电路模型只和电路电压有关,却是增加的,这当然是说不通的。这就说明,对于Rowe模型,需要修正的不光是最后的输出功率,而是整个相互作用过程中的高频场。这就需要我们更加深入地去寻找Rowe理论中造成能量不守恒的物理模型上的原因。前面的分析都是积分的结果,因而最后都利用Rowe所给的公式本身,这就使问题的本身的物理意义不易看出来。为此,我们现在可以完全抛开Rowe的工作方程组,直接从图1的模型,来讨论 z 到 $z + \Delta z$ 单元内的能量守恒关系,即从微分形式来研究能量守恒关系。

在从 z 到 $z + \Delta z$ 的小单元上,高频场 $\mathbf{E}(z, \Phi)$ 对电子注所作的功可以表示为:

$$\Delta P_c(z) = [\mathbf{I}_b(z, \Phi) \cdot \mathbf{E}(z, \Phi)] \Delta z$$

这里 \mathbf{I}_b 为电子注的基模电流。把 Δz 变为微分形式,得在位置 z 上,功率对距离的微分。现在求电子对场所作的功,所以加负号:

$$\frac{dP_c(z)}{dz} = -\mathbf{I}_b(z, \Phi) \cdot \mathbf{E}(z, \Phi) = \mathbf{I}_b(z, \Phi) \cdot \frac{\partial \mathbf{V}(z, \Phi)}{\partial z}$$

$$= \frac{d}{dz} [I_b(z, \Phi) \cdot V(z, \Phi)] - V(z, \Phi) \cdot \frac{\partial I_b(z, \Phi)}{\partial z} \quad (19)$$

下面求通过感应电流注入到电路的高频功率。先看 Δz 的单元内, 感应电流用 $\Delta i_{\text{感}}$ 表示。从 $z \rightarrow z + \Delta z$ 的电路功率的变化可以表示为:

$$\Delta P_c(z) = V(z + \Delta z, \Phi) \cdot I(z + \Delta z, \Phi) - V(z, \Phi) \cdot I(z, \Phi) \quad (20)$$

从图 1 可知:

$$V(z + \Delta z, \Phi) = V(z, \Phi) + L \frac{\partial I(z + \Delta z, \Phi)}{\partial t}$$

因此

$$\begin{aligned} \Delta P_c = & V(z, \Phi) \cdot I(z + \Delta z, \Phi) - V(z, \Phi) \cdot I(z, \Phi) + L \frac{\partial I(z + \Delta z, \Phi)}{\partial t} \\ & \cdot I(z + \Delta z, \Phi) \end{aligned}$$

第三项点积为零, 这即电感上有功功率为零。因而:

$$\Delta P_c = V(z, \Phi) \cdot [I(z + \Delta z, \Phi) - I(z, \Phi)] \quad (21)$$

从克希荷夫定律可知:

$$I(z + \Delta z, \Phi) - I(z, \Phi) = \Delta i_{\text{感}}(z, \Phi) - C \frac{\partial V(z, \Phi)}{\partial t}$$

所以

$$\begin{aligned} \Delta P_c = & V(z, \Phi) \cdot \left[\Delta i_{\text{感}}(z, \Phi) - C \frac{\partial V(z, \Phi)}{\partial t} \right] \\ = & V(z, \Phi) \cdot \Delta i_{\text{感}}(z, \Phi) - V(z, \Phi) \cdot C \frac{\partial V(z, \Phi)}{\partial t} \end{aligned}$$

同样第二项点积为零, 即电容 C 上没有有功功率流。最后得:

$$\Delta P_c = V(z, \Phi) \cdot \Delta i_{\text{感}}(z, \Phi)$$

同样, 把方程变为微分的形式

$$\frac{dP_c}{dz} = V(z, \Phi) \cdot i_{\text{感}}(z, \Phi) \quad (22)$$

这里 $i_{\text{感}}(z, \Phi)$ 是单位长度的感应电流。即

$$i_{\text{感}}(z, \Phi) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta i_{\text{感}}(z, \Phi)}{\Delta z}$$

$i_{\text{感}}$ 在 Rowe 和 Piecree 理论中表示为:

$$i_{\text{感}}(z, \Phi) = - \frac{\partial I_b(z, \Phi)}{\partial z}$$

如果把 Rowe 理论中的感应电流公式代入, 比较(19)和(22)式, 得到:

$$\frac{dP_c(z)}{dz} = \frac{dP_c(z)}{dz} + \frac{d}{dz} [I_b(z, \Phi) \cdot V(z, \Phi)] \quad (23)$$

这就是 Rowe 理论中在微分形式下的能量不守恒的形式。从这里可以看出 Rowe 理论中能量不守恒的原因就在于物理模型本身, 这种等效电路和相应的感应电流的形式不能精确反映高频场和电子注相互作用的实际情况。这个结论也并不奇怪, 因为电路和感应电流的形式严格说来只能适用于低稳场, 而不能适用于高频场, 高频场的问题是比集中电

路更为复杂的问题。

Rowe 的书^[4]中也指出螺旋线中的高频场可以用电路来表示的条件是:

$$E \approx j\beta V \quad (24)$$

如果,这个条件得到满足,等效电路的模型自然成立,我们这里的能量守恒的问题也得到了满足。但实际的大讯号理论中(24)式是不可能满足的。

六、结 论

1. Rowe 理论中存在能量不守恒的问题,由此引起的效率最大的相对误差,大小和 $2C$ 差不多,这对于工程设计的精度有不可忽略的影响。

2. 造成能量不守恒的原因在于 Rowe 理论的物理模型本身,它的感应电流不能反映能量守恒关系。

3. 由此可见有进一步改进螺旋线行波管非线性相互作用物理模型的必要性。但改进物理模型是一项较复杂的工作,如果还采用等效电路而改变感应电流的公式,这就要涉及到电流和电压的无功部分,这一问题不在本文中讨论。

参 考 文 献

- [1] A. Nordsieck, *PIRE*, 41(1953), 630.
- [2] P. K. Tien L. R. Walker and V. M. A. Wolonitis *PIRE* 43(1955), 260.
- [3] J. E. Rowe, *TRE Trans. on ED*, ED-3 (1956), 39.
- [4] J. E. Rowe, "Nonlinear Electron-Wave Interaction Phenomena", Acad. press., 1965.
中译本,电子与波的非线性相互作用现象,科学出版社, 1979.
- [5] 宋文淼等: "行波管非线性相互作用理论和计算"«电子管设计手册»编委会编, 1976.
- [6] H. K. Detweiler and J. E. Rowe, *Advances in microwave*, 6(1971), 30.
- [7] 姜遵富、方永绥、宋文淼,科学通报, 1978 年,第 1 期,第 31 页.
- [8] J. R. Pierce, *Traveling wave Tubes*, Van Nostrand, Princeton N. J. 1950.