

用矩形截面环单元计算轴对称场的有限元法*

李文臣

(南开大学电子科学系)

提 要

在具有轴对称特性电磁场的数值分析中,用矩形截面环单元分析具有比其他单元更多的优点.本文推导出了该单元的拉普拉斯方程、泊松方程和波动方程的单元特征式,并运用该单元成功地分析了圆柱形电容器的场结构和加载同轴腔端部的电容值和品质因数.

一、引 言

在对某些微波器件进行电磁场的数值分析时,经常会遇到具有轴对称特性的场,如圆柱形谐振腔、环形谐振腔、同轴腔和圆波导等.某些电机的场结构也经常有这种轴对称情况.在分析这样的场时,若采用一般三维结构的分割单元,如四面体、六面体和长方体时,将会给计算带来很多不必要的麻烦,这时一种可采取的措施是用三角形截面环单元去分割场^[1].但对于边界比较规则的场(如上面列举的几种器件),更宜采用矩形截面环单元(见图 1)去分割.从截面图形(矩形和三角形)很容易看出,在将全域划分成相同结点的前提下,矩形截面环单元的最长边长与最短边长之比要比三角形的最长边长与最短边长之比更接近于 1,因此,它不但具有比用三角形截面环单元分割求解域时的单元数目少的优点,而且还有所求之解的精度高的优点^[2].

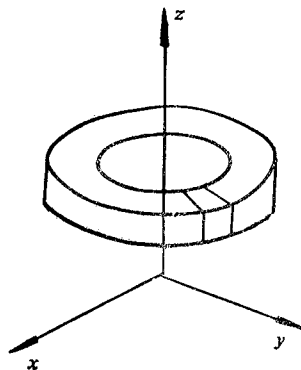


图 1

电磁场的规律是用一些偏微分方程来描述的,求解某一区域的场就是在该区域内解出某个偏微分方程.描述电磁场的最常见的偏微分方程有拉普拉斯方程、泊松方程和波动方程等.因此本文推导出了这三个方程的矩形截面环单元的单元特征式,并在最后给出了两个用该单元求解实际问题的例子,以供参考.

* 1984 年 12 月 4 日收到,1985 年 4 月 15 日修改定稿.

二、矩形截面环单元特征式

1. 拉普拉斯方程的单元特征式

如果某电磁场的问题由 (1) 式

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= 0 \text{ (在解域 } D \text{ 内),} \\ \varphi \text{ 为常数或 } \frac{\partial \varphi}{\partial n} &= 0 \text{ (在域 } D \text{ 边界 } \Sigma \text{ 上)} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

描述, 式中 φ 为电位, \mathbf{n} 为 Σ 上的法线方向. 那么据变分原理可知与 (1) 式相应的泛函为

$$J(\varphi) = \frac{1}{2} \iiint_D |\nabla \varphi|^2 dD. \quad (2)$$

现在我们用这样的矩形截面环单元去分割域 D : 矩形中两条边平行于 r 轴, 另两条边平行于 z 轴(见图 2).

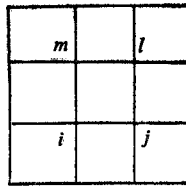


图 2

设这种单元的场变量模型用双线性插值多项式表示, 即

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 z + \alpha_4 r z. \quad (3)$$

(3) 式中四个未知数 α_1 、 α_2 、 α_3 和 α_4 由矩形截面的四个顶点处的坐标和电位值决定, 具体求法如下: 将这四个顶点的坐标和电位值分别代入 (3) 式, 即

$$\left. \begin{aligned} \varphi_i &= \alpha_1 + \alpha_2 r_i + \alpha_3 z_i + \alpha_4 r_i z_i, \\ \varphi_j &= \alpha_1 + \alpha_2 r_j + \alpha_3 z_j + \alpha_4 r_j z_j, \\ \varphi_l &= \alpha_1 + \alpha_2 r_l + \alpha_3 z_l + \alpha_4 r_l z_l, \\ \varphi_m &= \alpha_1 + \alpha_2 r_m + \alpha_3 z_m + \alpha_4 r_m z_m, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中 φ_i 、 r_i 、 z_i 分别为 i 结点的电位值和坐标值, 其他类推.

解 (4) 式, 求出 α_1 、 α_2 、 α_3 和 α_4 后, 再代入 (3) 式可得

$$\varphi = N_i \varphi_i + N_j \varphi_j + N_l \varphi_l + N_m \varphi_m, \quad (5)$$

式中

$$N_s = \frac{1}{A} (a_s + b_s r + c_s z + d_s r z), \quad (s = i, j, l, m);$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & r_i & z_i & r_i z_i \\ 1 & r_j & z_j & r_j z_j \\ 1 & r_l & z_l & r_l z_l \\ 1 & r_m & z_m & r_m z_m \end{vmatrix};$$

a_s, b_s, c_s 和 d_s 与坐标之关系如下:

$$\begin{aligned}
 a_i &= \begin{vmatrix} r_j & z_j & r_j z_j \\ r_l & z_l & r_l z_l \\ r_m & z_m & r_m z_m \end{vmatrix}, & a_j &= \begin{vmatrix} z_i & r_i & r_i z_i \\ z_l & r_l & r_l z_l \\ z_m & r_m & r_m z_m \end{vmatrix}, & a_l &= \begin{vmatrix} r_i & z_i & r_i z_i \\ r_j & z_j & r_j z_j \\ r_m & z_m & r_m z_m \end{vmatrix}, \\
 a_m &= \begin{vmatrix} z_i & r_i & r_i z_i \\ z_j & r_j & r_j z_j \\ z_l & r_l & r_l z_l \end{vmatrix}; & b_i &= \begin{vmatrix} z_j & 1 & r_j z_j \\ z_l & 1 & r_l z_l \\ z_m & 1 & r_m z_m \end{vmatrix}, & b_j &= \begin{vmatrix} 1 & z_i & r_i z_i \\ 1 & z_l & r_l z_l \\ 1 & z_m & r_m z_m \end{vmatrix}, \\
 b_l &= \begin{vmatrix} z_i & 1 & r_i z_i \\ z_j & 1 & r_j z_j \\ z_m & 1 & r_m z_m \end{vmatrix}, & b_m &= \begin{vmatrix} 1 & z_i & r_i z_i \\ 1 & z_j & r_j z_j \\ 1 & z_l & r_l z_l \end{vmatrix}; & c_i &= \begin{vmatrix} 1 & r_j & r_j z_j \\ 1 & r_l & r_l z_l \\ 1 & r_m & r_m z_m \end{vmatrix}, \\
 c_j &= \begin{vmatrix} r_i & 1 & r_i z_i \\ r_l & 1 & r_l z_l \\ r_m & 1 & r_m z_m \end{vmatrix}, & c_l &= \begin{vmatrix} 1 & r_i & r_i z_i \\ 1 & r_j & r_j z_j \\ 1 & r_m & r_m z_m \end{vmatrix}, & c_m &= \begin{vmatrix} r_i & 1 & r_i z_i \\ r_j & 1 & r_j z_j \\ r_l & 1 & r_l z_l \end{vmatrix}; \\
 d_i &= \begin{vmatrix} r_j & 1 & z_j \\ r_l & 1 & z_l \\ r_m & 1 & z_m \end{vmatrix}, & d_j &= \begin{vmatrix} 1 & r_i & z_i \\ 1 & r_l & z_l \\ 1 & r_m & z_m \end{vmatrix}, & d_l &= \begin{vmatrix} r_i & 1 & z_i \\ r_j & 1 & z_j \\ r_m & 1 & z_m \end{vmatrix}, \\
 d_m &= \begin{vmatrix} 1 & r_i & z_i \\ 1 & r_j & z_j \\ 1 & r_l & z_l \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

有限元法的关键是将偏微分方程的边值问题化为相应的泛函极值问题,因此要求(1)式的解,就要先求出每个单元的 $\frac{\partial J}{\partial \phi_i}$, $\frac{\partial J}{\partial \phi_j}$, $\frac{\partial J}{\partial \phi_l}$ 和 $\frac{\partial J}{\partial \phi_m}$ 之值. 考虑到场的轴对称性,即 $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0$, 因而在轴坐标中

$$\frac{\partial J}{\partial \phi_s} = \iiint \left[\frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \phi_s} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \phi_s} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right] r dr dz d\theta, \quad (6)$$

式中 $s = i, j, l, m$.

将(5)式代入(6)式可得

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial J}{\partial \phi_i} \\ \frac{\partial J}{\partial \phi_j} \\ \frac{\partial J}{\partial \phi_l} \\ \frac{\partial J}{\partial \phi_m} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ji} & k_{li} & k_{mi} \\ k_{ji} & k_{jj} & k_{lj} & k_{mj} \\ k_{li} & k_{lj} & k_{ll} & k_{lm} \\ k_{mi} & k_{mj} & k_{ml} & k_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_l \\ \phi_m \end{Bmatrix}, \quad (7)$$

简记为

$$\left\{ \frac{\partial J}{\partial \varphi} \right\} = [K] \{ \varphi \}. \quad (8)$$

(7) 式中

$$\begin{aligned}
 k_{sr} = & \frac{\pi}{A^2} (r_j^2 - r_i^2) \left[b_s b_r (z_m - z_i) + \frac{1}{2} (b_s d_r + b_r d_s) (z_m^2 - z_i^2) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{3} d_s d_r (z_m^3 - z_i^3) \right] + \frac{\pi}{A^2} (z_m - z_i) \left[c_s c_r (r_j^2 - r_i^2) \right. \\
 & \left. + \frac{2}{3} (c_s d_r + c_r d_s) (r_j^3 - r_i^3) + \frac{1}{2} d_s d_r (r_j^4 - r_i^4) \right], \\
 & (s, r = i, j, l, m).
 \end{aligned} \tag{9}$$

(7) 式就是拉普拉斯方程的矩形截面环单元的单元特征式。

2. 泊松方程的单元特征式

泊松方程的形式为

$$\nabla^2 \varphi = - \frac{\rho}{\varepsilon}. \tag{10}$$

式中 ρ 为电荷密度, ε 为介电常数。

对于在求解域的边界 Σ 上满足条件 $\varphi|_{\Sigma} = \text{常数}$ 或 $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ 的泊松方程, 可化为求解等价的变分问题, 其对应的泛函为

$$J(\varphi) = \frac{1}{2} \iiint_D \left[|\nabla \varphi|^2 - 2 \frac{\rho}{\varepsilon} \varphi \right] dD. \tag{11}$$

离散求解域的单元、单元场变量模型和推导过程均与拉普拉斯方程的一样, 最后也可求出轴坐标中的

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial J}{\partial \varphi_s} = & \iiint \left\{ \left[\frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \varphi_s} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \varphi_s} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right] - \frac{\rho}{\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_s} \right\} r dr dz d\theta, \\
 & (s = i, j, l, m).
 \end{aligned} \tag{12}$$

将 (5) 式代入 (12) 式可求得泊松方程矩形截面环单元的单元特征式如下:

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial J}{\partial \varphi_i} \\ \frac{\partial J}{\partial \varphi_j} \\ \frac{\partial J}{\partial \varphi_l} \\ \frac{\partial J}{\partial \varphi_m} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccc} k_{ii} & k_{ij} & k_{il} & k_{im} \\ k_{ji} & k_{jj} & k_{jl} & k_{jm} \\ k_{li} & k_{lj} & k_{ll} & k_{lm} \\ k_{mi} & k_{mj} & k_{ml} & k_{mm} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \varphi_i \\ \varphi_j \\ \varphi_l \\ \varphi_m \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} T_i \\ T_j \\ T_l \\ T_m \end{array} \right\}, \tag{13}$$

并简记为

$$\left\{ \frac{\partial J}{\partial \varphi} \right\} = [K] \{ \varphi \} - \{ T \}. \tag{14}$$

(13) 式中

$$T_s = \frac{2\pi\rho}{A\varepsilon} \left\{ \frac{a_s}{2} (z_m - z_i) (r_j^2 - r_i^2) + \frac{b_s}{3} (z_m - z_i) (r_j^3 - r_i^3) \right\}$$

$$+ \frac{c_s}{4} (z_m^2 - z_i^2)(r_j^2 - r_i^2) + \frac{d_s}{6} (z_m^2 - z_i^2)(r_j^3 - r_i^3) \}, (s = i, j, l, m);$$

$k_{sr}(r, s = i, j, l, m)$ 的表示式同 (9) 式; 式中其他参数的意义同前。

3. 波动方程的单元特征式

电磁场中的波动方程式为

$$\nabla^2 \varphi + \lambda^2 \varphi = 0, \quad (15)$$

其中 $\lambda^2 = \omega^2 \mu \varepsilon$, $\varphi = \varphi_0 e^{-i\omega t}$ 。

设边界条件为 $\varphi|_S = \text{常数}$ 或 $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$, 那么与此相应的泛函为

$$J(\varphi) = \frac{1}{2} \iiint_D (|\nabla \varphi|^2 - \lambda^2 \varphi^2) dD. \quad (16)$$

仍用前面介绍的单元和场变量模型, 这样可求出轴坐标中的

$$\frac{\partial J}{\partial \varphi_s} = \iiint_D \left\{ \left[\frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \varphi_s} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \varphi_s} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right] - \lambda^2 \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_s} \right\} r dr dz d\theta, \quad (s = i, j, l, m). \quad (17)$$

将 (5) 式代入 (17) 式, 可求得

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial J}{\partial \varphi_i} \\ \frac{\partial J}{\partial \varphi_j} \\ \frac{\partial J}{\partial \varphi_l} \\ \frac{\partial J}{\partial \varphi_m} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{il} & k_{im} \\ k_{ji} & k_{jj} & k_{jl} & k_{jm} \\ k_{li} & k_{lj} & k_{ll} & k_{lm} \\ k_{mi} & k_{mj} & k_{ml} & k_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \\ \varphi_l \\ \varphi_m \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} R_{ii} & R_{ij} & R_{il} & R_{im} \\ R_{ji} & R_{jj} & R_{jl} & R_{jm} \\ R_{li} & R_{lj} & R_{ll} & R_{lm} \\ R_{mi} & R_{mj} & R_{ml} & R_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \\ \varphi_l \\ \varphi_m \end{Bmatrix}, \quad (18)$$

并简记为

$$\left\{ \frac{\partial J}{\partial \varphi} \right\} = [K] \{ \varphi \} - [R] \{ \varphi \}, \quad (19)$$

(18) 式中

$$\begin{aligned} R_{sr} &= 2\pi\lambda^2 \iint N_s N_r r dr dz \\ &= \frac{2\pi\lambda^2}{A^2} \left\{ \frac{a_s a_r}{2} (z_m - z_i)(r_j^2 - r_i^2) + \frac{1}{3} (a_s b_r + a_r b_s)(z_m - z_i)(r^3 - r_i^3) \right. \\ &\quad + \frac{1}{4} (a_s c_r + a_r c_s)(z_m^2 - z_i^2)(r_j^2 - r_i^2) + \frac{1}{6} (b_s c_r + b_r c_s + a_s d_r + a_r d_s)(z_m^2 - z_i^2) \\ &\quad \times (r_j^3 - r_i^3) + \frac{1}{4} b_s b_r (z_m - z_i)(r_j^4 - r_i^4) + \frac{1}{8} (b_s d_r + b_r d_s)(z_m^2 - z_i^2)(r_j^4 - r_i^4) \\ &\quad + \frac{1}{6} c_s c_r (z_m^3 - z_i^3)(r_j^2 - r_i^2) + \frac{1}{9} (c_s d_r + c_r d_s)(z_m^3 - z_i^3)(r_j^3 - r_i^3) \\ &\quad \left. + \frac{1}{12} d_s d_r (z_m^3 - z_i^3)(r_j^4 - r_i^4) \right\}, (s, r = i, j, l, m); \end{aligned}$$

$k_{sr}(r, s = i, j, l, m)$ 的表示式仍同 (9) 式。

三、实 例

为了说明矩形截面环单元在解决轴对称电磁场问题中的作用，现举一个很简单的例子。

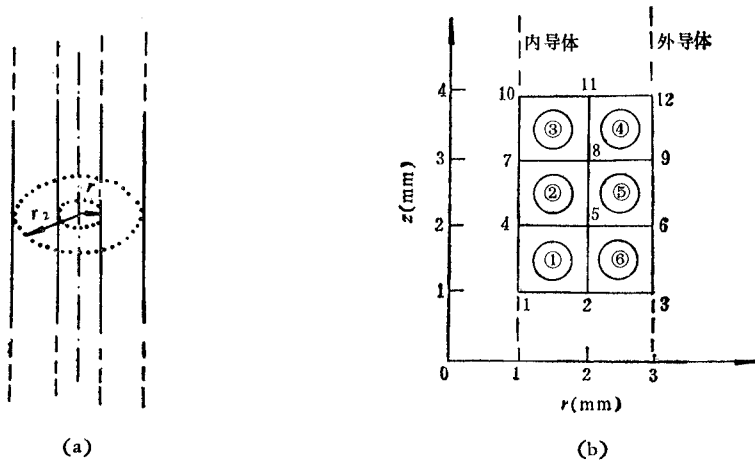


图 3

例 1 设有一无限长直圆柱形电容器, 内外径分别为 r_1 和 r_2 , 内导体电位为 U_0 , 外导体接地, 已知 $r_1 = 1\text{mm}$, $r_2 = 3\text{mm}$, 求第 2、5、8 和 11 结点的电位值, 各点的坐标见图 3。

解 这是一个静电场问题, 服从 $\nabla^2\varphi = 0$, 式中 φ 为电位。其边界条件为

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_4 = \varphi_7 = \varphi_{10} = U_0, \\ \varphi_3 = \varphi_6 = \varphi_9 = \varphi_{12} = 0. \end{cases}$$

据前所述与此问题相应的泛函为

$$J(\varphi) = \frac{1}{2} \iiint_D |\nabla\varphi|^2 dD.$$

考虑该场具有轴对称的特点, 因而选矩形截面环单元来分割场域, 为说明问题简单起见, 现只将全域分成六个单元十二个结点(见图 3)。

场变量模型的表示式如 (3) 式所示。所用单元特征式同 (7) 式。在本例中, 第 1、2、3 单元 $[K]$ 矩阵与第 4、5、6 单元 $[K]$ 矩阵分别是相同的, 即

$$[K]^{(1)} = [K]^{(2)} = [K]^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{11}{6}\pi & -\frac{\pi}{2} & -\pi & -\frac{\pi}{3} \\ -\frac{\pi}{2} & \frac{13}{6}\pi & -\frac{2}{3}\pi & -\pi \\ -\pi & -\frac{2}{3}\pi & \frac{13}{6}\pi & -\frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{3} & -\pi & -\frac{\pi}{2} & \frac{11}{6}\pi \end{bmatrix},$$

$$[K]^{\text{e}} = [K]^{\text{e}} = [K]^{\text{e}} = \begin{bmatrix} \frac{19}{6}\pi & -\frac{5}{6}\pi & -\frac{5}{3}\pi & -\frac{2}{3}\pi \\ -\frac{5}{6}\pi & \frac{21}{6}\pi & -\pi & -\frac{5}{3}\pi \\ -\frac{5}{3}\pi & -\pi & \frac{21}{6}\pi & -\frac{5}{6}\pi \\ -\frac{2}{3}\pi & -\frac{5}{3}\pi & -\frac{5}{6}\pi & \frac{19}{6}\pi \end{bmatrix}.$$

集合每个单元的 $[K]$ 矩阵^[2], 可得出表示整个求解域性质的总矩阵 $[K]_t$, 如下:

$$[K]_t = \begin{bmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 11/6 & -1/2 & 0 & -1/3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1/2 & 16/3 & -5/6 & -1 & -4/3 & -5/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -5/6 & 21/6 & 0 & -5/3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1/3 & -1 & 0 & 11/3 & -1 & 0 & -1/3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -4/3 & -5/3 & -1 & 32/3 & -5/3 & -1 & -4/3 & -5/3 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -5/3 & -1 & 0 & -5/3 & 21/3 & 0 & -5/3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & -1 & 0 & 11/3 & -1 & 0 & -1/3 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & -1 & -4/3 & -5/3 & -1 & 32/3 & -5/3 & -1 & -4/3 & -5/3 \\ 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5/3 & -1 & 0 & -5/3 & 21/3 & 0 & -5/3 & -1 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & -1 & 0 & 11/6 & -1/2 & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -4/3 & -5/3 & -1/2 & 16/3 & -5/6 \\ 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5/3 & -1 & 0 & -5/6 & 21/6 \end{bmatrix} \pi.$$

上边一行和左边一列的数字为结点编号。

因要求解的是泛函在全域上的极值问题, 故需要算

$$\left[\frac{\partial J}{\partial \varphi_1} \frac{\partial J}{\partial \varphi_2} \frac{\partial J}{\partial \varphi_3} \frac{\partial J}{\partial \varphi_4} \frac{\partial J}{\partial \varphi_5} \frac{\partial J}{\partial \varphi_6} \frac{\partial J}{\partial \varphi_7} \frac{\partial J}{\partial \varphi_8} \frac{\partial J}{\partial \varphi_9} \frac{\partial J}{\partial \varphi_{10}} \frac{\partial J}{\partial \varphi_{11}} \frac{\partial J}{\partial \varphi_{12}} \right]^T = 0,$$

即

$$[K]_t \{\varphi\} = 0. \quad (20)$$

这里

$$\{\varphi\} = [\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 \varphi_5 \varphi_6 \varphi_7 \varphi_8 \varphi_9 \varphi_{10} \varphi_{11} \varphi_{12}]^T.$$

这样就得出描述十二个结点性质的十二个方程式。根据题目要求只需求出 φ_2 、 φ_5 、 φ_8 和 φ_{11} 的值, 故只需将与这四个结点相应的方程解出即可^[2]。代入边界条件后, 这四个方程式为

$$\begin{aligned} 4\varphi_2 - \varphi_5 &= \frac{9}{8} U_0, \\ -\varphi_2 + 8\varphi_5 - \varphi_8 &= \frac{9}{4} U_0, \\ -\varphi_5 + 8\varphi_8 - \varphi_{11} &= \frac{9}{4} U_0, \end{aligned}$$

$$-\varphi_8 + 4\varphi_{11} = \frac{9}{8} U_0.$$

联立以上四个方程可解得 $\varphi_2 = \varphi_5 = \varphi_8 = \varphi_{11} = 0.375U_0$.

根据电磁场理论^[3]算出这几个结点的精确电位值为 $\varphi'_2 = \varphi'_5 = \varphi'_8 = \varphi'_{11} = 0.369U_0$ 。比较这两个答案可以看出：用矩形截面环单元算出的这四个结点的电位值的误差为 1.6%。这里应该指出：(1) 此例只是为了说明矩形截面环单元的用途，故只将全域分成六个单元。若将全域细分，单元数目再增加一些的话，则解出各点电位的误差将进一步减小；(2) 解决实际问题时，将求解域分割的单元数目往往是很多的。根据所用计算机的容量可将全域分成上百甚至上千个单元来计算，这样做的目的是为了提提高求解的精度。

下面再举一个用矩形截面环单元解题的实际例子。

例 2 求图 4 所示的电容加载同轴腔的电容 C 和品质因数 Q 。计算从 $c-c$ 面算起。已知 $d = 6\text{mm}$ ， $D = 21.6\text{mm}$ ， $w = 15\text{mm}$ ，而 t 分别为 1.2mm，2.7mm 和 4.2mm。

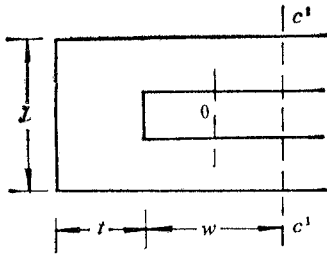


图 4 同轴腔端部剖面(注图中 0 为 d)

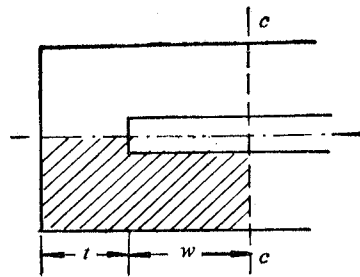


图 5 求解区域剖面

解 现用电磁场有限单元法来解。考虑到实用同轴腔端部的电长度都很短这个事实，我们可以近似地用解拉普拉斯方程的方法来求解。再考虑到场分布是轴对称的，故求解区域的剖面图如图 5 所示的阴影部分。在此区域内泛函式显然正如 (2) 式所示^[4]。同前所述，本题也宜用矩形截面环单元来分割求解域。它的场变量模型已在 (3) 式中给出，(9) 式是它的单元特征式。

本文是这样求解电容值的：

首先类似例 1 的求法，将求解域内各结点的电位值解出。

第二步将每个单元内贮存的电场能量求出，进而求出全域内的电场总能量。假如腔体内全由空气填充，那么每个单元内贮存电能的公式为：

$$W_0 = \frac{1}{2} \iint_D \epsilon_0 E^2 dD = \pi \epsilon_0 (z_m - z_i) \left\{ \frac{(r_j^2 - r_i^2)}{2} \left[\alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_2 \alpha_4 (z_m + z_i) + \frac{\alpha_4^2}{3} (z_m^2 + z_m z_i + z_i^2) \right] + \frac{2}{3} \alpha_3 \alpha_4 (r_j^3 - r_i^3) + \frac{\alpha_4^2}{4} (r_j^4 - r_i^4) \right\}. \quad (21)$$

式中

$$\alpha_2 = \frac{1}{A} (b_i \varphi_i + b_j \varphi_j + b_l \varphi_l + b_m \varphi_m),$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{A} (c_i \varphi_i + c_j \varphi_j + c_l \varphi_l + c_m \varphi_m),$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{A} (d_i \varphi_i + d_j \varphi_j + d_l \varphi_l + d_m \varphi_m),$$

ϵ_0 为真空中介电常数, E 为电场强度.

第三步利用 (22) 式求出 C 值, 其公式为:

$$C = \frac{2W}{V_{i0}^2}, \quad (22)$$

V_{i0} 为内外导体间的电位差, W 为求解域内的总电场能量.

以上各步均可由计算机来完成. 本例求出的三点的电容值见表 1

表 1

$t(\text{mm})$	1.2	2.7	4.2
$c(\text{pF})$	1.09	0.91	0.85

品质因数 Q 的定义为

$$Q = \frac{\omega W}{P_d}, \quad (23)$$

式中 $\omega = 2\pi f$ 为圆频率, P_d 为求解域内的平均耗散功率, 其值为^[9]:

$$\left. \begin{aligned} P_d &= R \iint_S |H_0|^2 dS, \\ |H_0| &= \left| \frac{E_0}{\eta} \right|, \\ |E_0| &= \left| \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|, \\ R &= \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}}, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

式中 R 为金属的表面电阻; σ 为电导率; $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$, 为波阻抗; S 为腔的内壁表面积; H_0 和 E_0 分别为 \mathbf{H} 和 \mathbf{E} 在腔的内表面处的有效值.

将 (24) 式代入 (23) 式, 即得

$$\frac{Q}{\sqrt{\omega}} = \frac{\eta^2 W \sqrt{\frac{2\sigma}{\mu}}}{\iint_S \left| \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|^2 dS}. \quad (25)$$

设腔体为铜, 其内介质为空气, 则 $\eta = 120\pi \Omega$, $\mu = 4\pi \times 10^{-7} \text{H/m}$, $\sigma = 5.8 \times 10^7 \text{S/m}$. 将前面已算出的 W 值 (对应 $t = 1.2 \text{mm}$, 2.7mm , 4.2mm) 和与之对应的

$$\iint_S \left| \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|^2 dS$$

值一并代入(25)式,即可求出相应的 Q 值。本例求出的 Q 值见表2。频率 $f=1000$ MHz时, Q 值如表3所示。

表 2

$z(\text{mm})$	1.2	2.7	4.2
$\frac{Q}{\sqrt{\omega}} \times 10^3$	9.117	17.96	22.08

表 3

$z(\text{mm})$	1.2	2.7	4.2
Q	723	1424	1750

参 考 文 献

- [1] J. Brian, F. Anibal and G. Y. Philippou, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-30** (1982), 1976.
 [2] 曾余庚、徐国华、宋国乡编著,电磁场有限单元法,科学出版社,1982年,第八章,第五章,第六章。
 [3] 冯慈章主编,电磁场,人民教育出版社,1979年,第一章。
 [4] 盛剑霓等编著,电磁场数值分析,科学出版社,1984年,第二章。
 [5] R. F. Harrington 著,孟侃译,正弦电磁场,上海科学技术出版社,1964年,第二章。

A FINITE ELEMENT METHOD USING RING UNIT WITH RECTANGULAR CROSS-SECTION TO NUMERICALLY ANALYZE THE AXIALLY SYMMETRIC ELECTROMAGNETIC FIELD

Li Wenchen

(Department of Electronics Nankai University)

In the numerical analysis of axially symmetry electromagnetic field, the finite element method using ring unit with rectangular cross-section has more advantages than other methods. The ring unit characteristic equations in relation to Laplace's, Poisson's and Helmholtz's equations are derived. Using this method, the field structure of cylindrical capacitor and the capacitance and quality factor of the end of laded coaxial cavity are successfully analyzed.