

微带传输线特性的数值分析*

蒲国胜 廖承恩

(西北电讯工程学院电磁场工程系, 西安)

摘要 本文应用混合模有限元方法分析和计算了微带传输线的各种特性, 包括特性阻抗、速度比、色散特性以及带厚的影响, 并与有关文献结果作了比较。结果表明, 有限元法是对微带传输线进行数值分析的有效方法。

关键词 微带传输线; 有限元法; 色散特性

一、引言

目前, 分析微带传输线特性的方法很多, 工程上采用较多的是 Wheeler 的改进保角变换法^[1], 此外, 还有格林函数法、谱域方法等^[2-4]。近年来, 数值计算方法发展很快, 特别是有限元法, 并被用来分析和计算微带传输线的特性^[5-7]。有限元法是基于变分原理, 通过解域剖分, 将一个二次泛函的极值问题, 等价于一组多元线性代数方程来求解。它在求解无界场域的数值计算问题中有着独特的优点。这种方法可以处理任意导体形状和不均匀介质填充的传输线, 既可以处理薄带导体情况, 也可以处理厚带导体情况。本文将有限元方法用来分析和计算微带传输线的特性, 包括特性阻抗、速度比、色散特性及带厚对色散特性的影响, 并与有关文献结果作了比较, 结果十分令人满意。

二、微带传输线的特性阻抗和速度比

图1表示微带线横截面。假设其主模为准 TEM 模, 其势函数 ϕ 满足 Laplace 方程:

$$\nabla_t^2 \phi = 0 \quad (1)$$

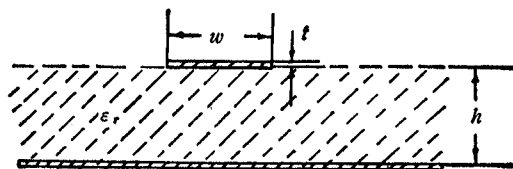


图1 微带线

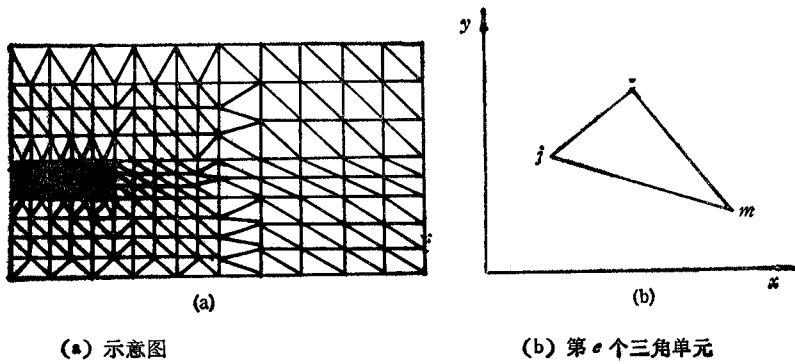


图2 场域的剖分

(1)式对应的泛函为

$$F(\phi) = \frac{1}{2} \iint_S \varepsilon (\nabla \phi)^2 dS \quad (2)$$

$$\phi|_l = \phi_0$$

式中 l 是场域 S 的边界。将场域剖分成 e_0 个三角形单元, 如图 2 所示, 则泛函(2)式可用三角单元积分的总和来表示, 即

$$(\phi) = \sum_{e=1}^{e_0} \iint_{S_e} \frac{1}{2} \varepsilon (\nabla \phi)^2 dS = \sum_{e=1}^{e_0} F_e(\phi) \quad (3)$$

选取三角单元内某点的场为该单元顶点场的线性插值, 则对第 e 个三角单元 S_e , 有

$$\phi^e(x, y) = [N_i^e, N_j^e, N_m^e] \begin{bmatrix} \phi_i^e \\ \phi_j^e \\ \phi_m^e \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中, $\phi_r^e (r = i, j, m)$ 是三角单元 S_e 相应顶点的 ϕ 值; $N_r^e (r = i, j, m)$ 是线性插值的基函数, 它满足

$$N_r^e(x_s, y_s) = \delta_{rs} = \begin{cases} 1, & r = s \\ 0, & r \neq s \end{cases}$$

将(4)式代入(3)式, 最后可得

$$[K][\phi] = [0] \quad (5)$$

式中 $[K]$ 称为三角单元的总系数矩阵。解此方程即可求得所需电位值, 进而可求得微带线单位长度电容 C_e 。微带线的特性阻抗则为

$$Z_0 = \frac{1}{v C_e} = \frac{1}{c \sqrt{C_e C_0}} \quad (6)$$

式中, c 为光速, C_0 为空气微带线单位长度电容。

三、微带线的色散特性

对各向同性和各向异性介质微带线的色散特性进行分析时, 为了提高计算精度而计算时间又不至于过长, 我们采用二次有限单元法。

在各向异性介质填充微带线中, 其介质的磁导率 $\mu = \mu_0$, 而介电常数为一对角张量

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad (7)$$

此时 Maxwell 方程可以写成

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -j\beta E_y - j\omega\mu_0 H_z \\ \frac{\partial E_x}{\partial x} &= -j\beta E_x + j\omega\mu_0 H_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -j\omega\mu_0 H_z \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} &= -j\beta H_y + j\omega\epsilon_x E_x \\ \frac{\partial H_x}{\partial x} &= -j\beta H_x - j\omega\epsilon_y E_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= j\omega\epsilon_x E_x \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

由此可得纵向场分量 E_x 和 H_x 满足如下方程^[6]:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(A_x \epsilon_x \frac{\partial E_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A_y \epsilon_y \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \right] + \frac{\beta}{\omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(A_x \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(A_y \frac{\partial H_x}{\partial x} \right) \right] = -\epsilon_x E_x \quad (9)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(A_x \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A_y \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \right] + \frac{\beta}{\omega} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(A_x \frac{\partial E_x}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(A_y \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \right] = -\mu_0 H_x \quad (10)$$

式中

$$A_x = \left(K_0 \frac{\epsilon_x}{\epsilon_0} - \beta^2 \right)^{-1}$$

$$A_y = \left(K_0 \frac{\epsilon_y}{\epsilon_0} - \beta^2 \right)^{-1}$$

$$K_0^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0$$

(9)式和(10)式对应的等价变分问题为

$$F = \iint \frac{1}{2} \left[-\epsilon_x E_x^2 - \mu_0 H_x^2 + \epsilon_x A_x \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} \right)^2 + \epsilon_y A_y \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} \right)^2 + \mu_0 A_x \left(\frac{\partial H_x}{\partial x} \right)^2 + \mu_0 A_y \left(\frac{\partial H_x}{\partial y} \right)^2 + \frac{\beta}{\omega} \left[A_x \frac{\partial E_x}{\partial x} \frac{\partial H_x}{\partial y} - A_y \frac{\partial E_x}{\partial y} \frac{\partial H_x}{\partial x} \right] \right] ds \quad (11)$$

$$\delta F = 0$$

将微带线截面区域剖分成 e_0 个三角形单元 ($e = 1, 2, \dots, e_0$), 设三角形单元内某点的场是该单元三个顶点和三个边中点场的二次插值:

$$\left. \begin{aligned} E_z^e(x, y) &= \sum_{i=1}^6 N_i^e(x, y) E_{z,i}^e, \\ H_z^e(x, y) &= \sum_{i=1}^6 N_i^e(x, y) H_{z,i}^e, \end{aligned} \right\} (x, y) \in S_e \quad (12)$$

式中 $E_{z,i}^e$ 和 $H_{z,i}^e$ 分别是单元 S_e 的第 i 个节点的 E_z 和 H_z 。在自然坐标下, 插值基函数 $N_i^e(x, y)$ 为^[9]

$$\left. \begin{aligned} N_1^e &= (1 - \xi - \eta)[2(1 - \xi - \eta) - 1] \\ N_2^e &= \xi(2\xi - 1) \\ N_3^e &= \eta(2\eta - 1) \\ N_4^e &= 4\xi\eta \\ N_5^e &= 4\eta(1 - \xi - \eta) \\ N_6^e &= 4\xi(1 - \xi - \eta) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

这样, (11) 式泛函的等价变分问题可变成求解如下矩阵方程:

$$\begin{bmatrix} K & \frac{\delta}{c} Q \\ \frac{\delta}{c} G & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_z \\ H_z \end{bmatrix} = K_0^2 \begin{bmatrix} \epsilon_r H & 0 \\ 0 & \mu_0 H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_z \\ H_z \end{bmatrix} \quad (14)$$

式中, $\delta = \beta/K_0$, $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$; 矩阵 $[K]$, $[P]$ 和 $[H]$ 为对称矩阵, $[Q]$ 和 $[G]$ 互为转置矩阵。

(14) 式为一广义代数本征值方程。由此式可以看出, 微带线的有效介电常数 $\epsilon_{eff}(f) = \sigma - (\beta/K_0)^2$ 。因此, 求解 (14) 式即可求得各向同性和各向异性介质填充微带线的有效介电常数的频率特性, 即色散特性。

四、计算结果

根据上述原理, 我们编制了计算微带传输线特性的计算机程序, 并给出了一些典型实例。计算时, 用离场源足够远的电力线作为计算用的边界, 并设此处的 $E_z = 0$, $H_z = 0$; 边界取的越远, 计算的精度越高, 但所需的工作量和计算机存贮单元也越多。为此计算时分两次进行: 第一次将场分布较弱的区域剖分得粗一些; 第二次再将感兴趣的区域细分。

1. 双带悬置微带线的特性阻抗和速度比

图 3 为双带悬置微带线。为便于比较, 计算时取 $H = 0.794\text{cm}$, $H_1 = 0.159\text{cm}$, $P = 2.540\text{cm}$ 。用有限元法计算, 只用了较少的计算时间和存贮容量(分 400—600 个节点)即达到差分法(3000—4000 个节点)所能达到的精度^[6]。计算结果如表 1 所示(节点数 $N_0 = 600$)。图 4 给出了这种结构的速度比与导体带宽的关系曲线 ($\epsilon_r = 2.65$)。

表 1 有限元与差分计算结果比较

$w(\text{cm})$	$Z_0(\Omega)$		1.00		2.05		2.65	
	有限元	差分	有限元	差分	有限元	差分	有限元	差分
0.556	61.14	61.81	58.12	58.75	57.14	57.30		
0.635	57.06	57.11	54.51	54.48	53.40	53.29		
0.715	53.50	53.07	51.49	50.79	50.44	49.74		
0.794	49.22	49.58	47.09	47.57	46.08	46.43		
0.873	47.86	46.50	44.37	44.72	43.48	43.89		

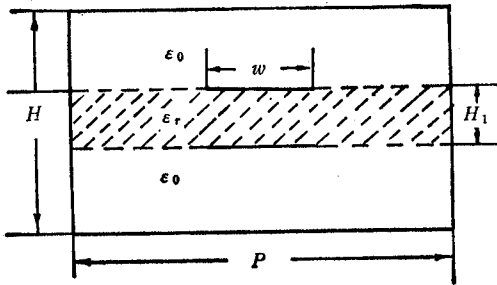


图 3 双带悬置微带线

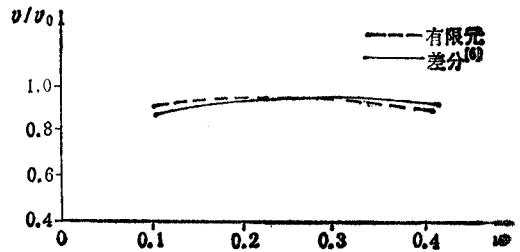


图 4 双带悬置微带速度比与导体带宽的关系曲线

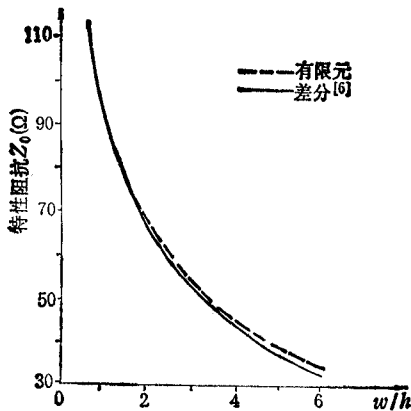


图 5 特性阻抗与形状比的关系曲线

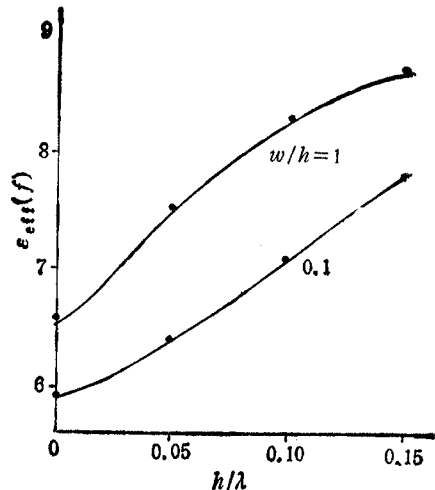


图 6 各向同性介质微带线的色散曲线
($\epsilon_{rx} = \epsilon_{ry} = \epsilon_{rz} = 9.7, h = 1.27\text{mm}$)
——文献[10]; ····本文

2. 标准微带的特性阻抗

标准微带如图 1 所示。它是一个无界场域问题。按照上述思路计算得到的微带特性阻抗曲线如图 5 所示,图中还给出了与差分方法结果比较。

3. 各向同性和各向异性介质微带线的色散特性

应用本文的二次有限单元法(所取节点数 $N_0 = 81$) 计算得到的各向同性和各向异性

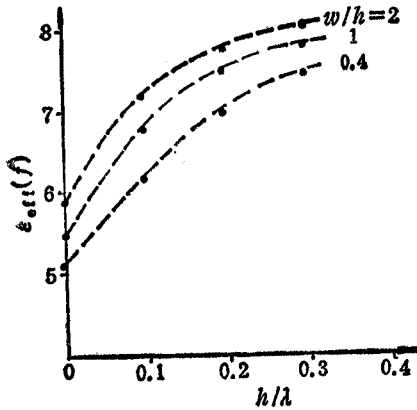


图7 各向同性介质 ($\epsilon_{rx} = \epsilon_{ry} = \epsilon_{rz} = 8.0$)
微带线的色散曲线
---本文; ...文献[10]

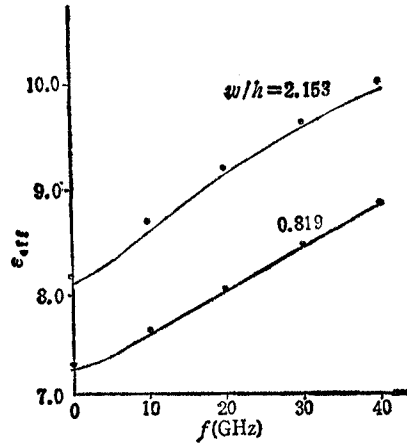


图8 各向异性介质 ($\epsilon_{rx} = \epsilon_{ry} = 9.4, \epsilon_{rz} = 11.6$)
微带线的色散特性
...本文; ——文献[3]

介质微带线的色散特性曲线如图6—图8所示,图中还给出了与文献[3]和[10]结果的比较。文献[10]采用的是谱域法。由图6和图7可以看出,两种方法的计算结果符合得较好。由图8可见,本文的结果与文献[3]混合模分析结果也符合得较好。

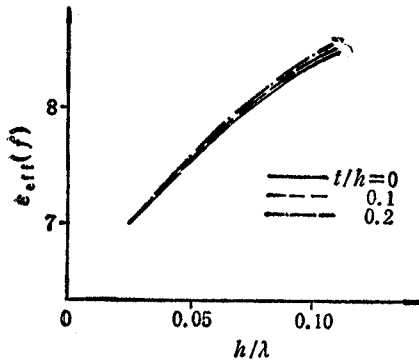


图9 带厚对微带线色散特性的影响
($\epsilon_{rx} = \epsilon_{ry} = \epsilon_{rz} = 9.7, w/h = 1.0$)

与格林函数法、谱域法等方法相比,有限元法的明显优点之一是能够处理厚导体带情况。在计算厚导体带时只需考虑导体带外面的区域,如图2(a)所示那样。图9表示用本文二次有限元方法计算得到的带厚 t 对标准微带色散特性的影响。

五、结 论

本文导出了微带传输线的有限元方程,据以计算了微带传输线的各种特性,包括特性阻抗、速度比、各向同性和各向异性介质微带线的色散特性以及带厚对色散特性的影响,并与有关文献结果作了比较。本文所介绍的方法简单、直观,在对微带传输线作分析时无需作任何假设,并可得到较满意的结果。本方法还可以用来计算微带传输线的损耗及其它参数。因此,有限元法是一种分析和计算微带传输线特性的有效方法。

参 考 文 献

[1] H. A. Wheeler, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-13**(1965)2, 172—185.
 [2] N. Alexopoulos, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-33**(1985)10, 847—881.
 [3] A-M. A. El-Sherbiny, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-29**(1981)12, 1261—1266.
 [4] 廖承恩,微波技术基础,国防工业出版社,北京,1984年,第139—188页。
 [5] P. Daly, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-19**(1971)1, 19—25.

- [6] H. E. Green, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-13**(1965)5,676—692.
[7] Z. Pantic and R. Mittra, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-34**(1986) 11, 1096—1103.
[8] N. Mabaya and P. E. Lagasse, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-29**(1981)6, 600—605.
[9] P. Silvester, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-17**(1969)4, 204—210.
[10] M. Kobayashi, F. Ando, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-35**(1987)2, 101—105.

THE NUMERICAL ANALYSIS OF THE PROPERTIES OF MICROSTRIP TRANSMISSION LINES

Pu Guosheng Liao Chengen

(Northwest telecommunication Engineering Institute, Xi'an)

Abstract A numerical analysis is presented in terms of finite element of hybrid-mode propagation characteristics in microstrip transmission lines, which include characteristics impedance, velocity ratio, dispersion characteristic and the effect of strip thickness. The results of calculation are compared with previous approximate calculations. It is shown that the finite-element method is an efficient numerical analysis for microstrip transmission lines.

Key words Microstrip transmission line; Finite element method; Dispersion characteristics