

指数遗忘分布性能分析

李滔 汤建龙 杨绍全

(西安电子科技大学电子工程学院 西安 710071)

摘要: 该文分析讨论了指数遗忘变换(EFT)的信号瞬时频率表示性能。EFT采用单边指数窗口对信号进行采样和加权,因而可以利用迭代运算提高计算效率。与其他时频表示方法相比,EFT在处理较大长度的数据时具有优势,且更易于利用硬件实现。该文对EFT的瞬时频率表示偏差、均方差值的统计特性与信噪比及遗忘系数的关系进行了分析,给出了相应的仿真结果。同时为克服单边指数窗口的缺陷,提出了采用对称窗口的双边指数遗忘分布的计算形式,该方法在保持原有指数遗忘分布计算效率较高的优点的同时能够大大减小瞬时频率的表示偏差。

关键词: 信号分析, 单边指数窗口, 迭代运算, 偏差

中图分类号: TN971.1

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2005)04-0580-04

Analysis of Exponentially Forgetting Distribution

Li Tao Tang Jian-long Yang Shao-quan

(School of Electronic Engineering, Xidian Univ., Xi'an 710071, China)

Abstract The analysis of exponentially forgetting transform (EFT) is made in this paper. The application of a sliding single-sided exponential window, make it possible the iterative operation in EFT which greatly raises computation efficiency. Compared with other time-frequency distributions, EFT is especially useful in case of large data length and more suitable for hardware implementation. The relationships of bias and mean square error of EFT with SNR and forgetting coefficient are studied. And in order to overcome the drawbacks of single-sided window, a new time-frequency distribution using double-sided exponential window which is computation efficient with much bias reduction is introduced.

Key words Signal analysis, Single-sided exponential window, Iterative computation, Bias

1 前言

在时频分布中的频率总是指在某个时间上的频率,即瞬时频率,这是非参数瞬时频率估计方法中,广泛使用时频分布的峰值提取方法的依据^[1-3]。从某个角度来看,对信号瞬时频率表示准确程度的衡量可以作为评价某类时频分布形式优劣的标准之一。

以Cohen类时频分布为例,Wigner分布可在时频平面上无偏地表示线性调频信号,但是对于其他类型的信号表示是有偏的^[4-7]。同时常见的时频分布形式在计算一个时间点上的频率分布时,总是利用计算窗口对信号进行取样与加权后应用FFT进行处理。其计算复杂程度与窗口长度有关,通常窗口越宽,则频率分辨率越高,而计算量也越大。

与其他类型的计算方式相比,指数遗忘分布具有更高的计算效率,分辨率的调整也十分方便:具体表现为采用滑动的单边指数窗口的采样方式,使得迭代运算可应用于时频计

算中。同时在指数遗忘分布中时频分辨率可以通过改变遗忘系数的调节来实现。

文献^[8-10]中对指数遗忘分布进行了讨论,但没有讨论这种分布形式的精度。通过试验可以发现,采用不同的遗忘系数时,在频率表示中会出现偏差,因此在时频表示中会产生类似平移的效果,本文分析表明该偏差与信号相位的二次微分以及遗忘系数有关。本文讨论了这种频率表示偏差产生的原因及分布特性,并对频率表示的方差进行了计算。

2 指数遗忘分布

2.1 指数遗忘分布及其反变换

任何时频分布形式中,对某个时间点上频率分布的计算都是通过分析信号在该点的一个邻域内的分布情况来实现的。指数遗忘分布通过单边指数窗口对信号进行采样和加权,距离需要分析的时间点较近的信号部分在计算中起到更

大的作用, 也相应地有更大加权。从实现形式看, 这类似于对信号的历史按指数规律进行遗忘, 指数遗忘分布也因此而得名。

由于通常的实现方法都采用离散计算形式, 因此相应的指数遗忘分布定义式为:

$$X_{n,k} = \sum_{m=-\infty}^n x(m) e^{\beta(m-n)} e^{-j\frac{2\pi}{N}km} \quad (1)$$

这里 β 称为遗忘系数, 在变换中用来控制单边指数窗口的形状(或者说是遗忘的速度)。根据上面的离散形式的指数遗忘分布计算公式定义可以得到如下的结果:

$$\begin{aligned} X_{n+1,k} &= \sum_{m=-\infty}^{n+1} x(m) e^{\beta(m-n-1)} e^{-j\frac{2\pi}{N}km} \\ &= e^{-\beta} \sum_{m=-\infty}^n x(m) e^{\beta(m-n)} e^{-j\frac{2\pi}{N}km} + x_{n+1} e^{-j\frac{2\pi}{N}k(n+1)} \\ &= e^{-\beta} X_{n,k} + x_{n+1} e^{-j\frac{2\pi}{N}k(n+1)} \end{aligned} \quad (2)$$

式(2)说明在计算信号某个时间点的频率分布时, 可利用该点的函数值和前一点计算结果的线性组合来得到, 因此在指数遗忘分布中避免了FFT运算。同时由于在指数遗忘分布中仅需进行乘法和累加运算, 使得这种时频表示方式可以利用可编程阵列进行硬件实现。

3 指数遗忘分布的频率估计性能分析

时频表示方法通过分析信号在每一个时间点上的频率分布来描述信号的时变本质。理想时频分布形式应该能够使信号的能量完全沿着瞬时频率集中, 因此本文通过偏差与均方差两个参数来衡量指数遗忘分布的瞬时频率表示性能。

3.1 瞬时频率估计偏差

利用时频分布的峰值检测的信号瞬时频率估计的方法为

$$\hat{f}_i(n) = \frac{f_s}{2N} \arg \max_{\omega} X(n, \omega)$$

其中 $X(n, \omega)$ 为信号的指数遗忘分布的幅值, f_s 为采样频率, N 为分析的频率点数。

当噪声存在时信号可以表示为如下的形式: $x(n) = s(n) + \varepsilon(n)$ 。其中 $\varepsilon(n)$ 是复的白噪声, $\varepsilon(n) = \varepsilon_x(n) + j \cdot \varepsilon_y(n)$, $\varepsilon_x(n)$, $\varepsilon_y(n)$ 分别为白噪声的实部与虚部, 两者互不相关, 且具有相同的统计特性: $E[\varepsilon_x(n)] = E[\varepsilon_y(n)] = 0$, $\text{var}[\varepsilon_x(n)] = \text{var}[\varepsilon_y(n)] = \sigma^2/2$ 。

可以得到信号的指数遗忘分布模值的平方:

$$\begin{aligned} |X(n, \omega; \beta)|^2 &= \sum_{k_1=-\infty}^n \sum_{k_2=-\infty}^n [s(k_1) + \varepsilon(k_1)] \\ &\quad \cdot [s^*(k_2) + \varepsilon^*(k_2)] \cdot e^{\beta(k_1+k_2-2n)} \cdot e^{-j\omega(k_1-k_2)} \\ &= Y_1(n, \omega; \beta) + Y_2(n, \omega; \beta) \end{aligned} \quad (3)$$

上式的两项中, $Y_1(n, \omega; \beta)$ 仅与信号有关, 而 $Y_2(n, \omega; \beta)$ 是指数遗忘分布的模值中与噪声有关的项。两项的具体表达式为

$$Y_1(n, \omega; \beta) = \sum_{k_1=-\infty}^n \sum_{k_2=-\infty}^n s(k_1) \cdot s^*(k_2) \cdot e^{\beta(k_1+k_2-2n)} \cdot e^{-j\omega(k_1-k_2)} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} Y_2(n, \omega; \beta) &= \sum_{k_1=-\infty}^n \sum_{k_2=-\infty}^n [s(k_1) \cdot \varepsilon^*(k_2) + s(k_2) \cdot \varepsilon^*(k_1) \\ &\quad + \varepsilon(k_1) \cdot \varepsilon^*(k_2)] \cdot e^{\beta(k_1+k_2-2n)} \cdot e^{-j\omega(k_1-k_2)} \end{aligned} \quad (5)$$

当信号具有恒定的幅度时, $s(n) = A e^{j\phi(n)}$

$$Y_1(n, \omega; \beta) = A^2 \sum_{k_1=-\infty}^n \sum_{k_2=-\infty}^n e^{j[\phi(k_1)-\phi(k_2)]} \cdot e^{\beta(k_1+k_2-2n)} \cdot e^{-j\omega(k_1-k_2)} \quad (6)$$

从式(6)可以看到: 在实际的计算中, 遗忘系数 β 取值较大时, 可以认为由于单边指数窗口的衰减速度较快, k_1 , k_2 必然与需要分析的时间点 n 的距离较近。因此可以在时间 n 附近对信号的相位进行泰勒展开: $\phi(k_1) = \phi(n) + (k_1 - n)\phi'(n) + 0.5 \cdot (k_1 - n)^2 \phi''(n) + \dots$ 。

若有 $(k_1 - n) \rightarrow 0$, $(k_2 - n) \rightarrow 0$, 在忽略信号的相位函数中阶次高于二的项时, 可以获得如下的近似形式:

$$e^{j[\phi(k_1)-\phi(k_2)]} \approx \{1 + j\phi''(n)[(k_1 - n)^2 - (k_2 - n)^2]0.5\} e^{j(k_1-k_2)\phi'(n)} \quad (7)$$

将 $Y_1(n, \omega; \beta)$ 分解为两项, $Y_1(n, \omega; \beta) = Y_{10}(n, \omega; \beta) + Y_{11}(n, \omega; \beta)$, 它们分别表示为

$$Y_{10}(n, \omega; \beta) = A^2 \sum_{k_1=-\infty}^n \sum_{k_2=-\infty}^n e^{j(k_1-k_2)\phi'(n)} \cdot e^{\beta(k_1+k_2-2n)} \cdot e^{j\omega(k_1-k_2)} \quad (8)$$

$$Y_{11}(n, \omega; \beta) = j \cdot 0.5 \cdot A^2 \cdot \phi''(n)$$

$$\sum_{k_1=-\infty}^n \sum_{k_2=-\infty}^n e^{j(k_1-k_2)\phi'(n)} \cdot e^{\beta(k_1+k_2-2n)} \cdot e^{j\omega(k_1-k_2)} \cdot [(k_1 - n)^2 - (k_2 - n)^2] \quad (9)$$

则有 $|X(n, \omega; \beta)|^2 = Y_{10}(n, \omega; \beta) + Y_{11}(n, \omega; \beta) + Y_2(n, \omega; \beta)$

瞬时频率估计通过对指数遗忘分布的频谱极大值进行检测得到。在瞬时频率附近对指数遗忘分布模值平方的频率微分进行泰勒多项式展开:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \{|X(n, \omega; \beta)|^2\}}{\partial \omega} \right|_{\omega = \hat{\omega}_i} &= \left. \frac{\partial [Y_{10}(n, \omega; \beta)]}{\partial \omega} \right|_{\omega = \omega_i} \\ &\quad + \Delta \omega \left. \frac{\partial^2 [Y_{10}(n, \omega; \beta)]}{\partial^2 \omega} \right|_{\omega = \omega_i} + \left. \frac{\partial [Y_{11}(n, \omega; \beta)]}{\partial \omega} \right|_{\omega = \hat{\omega}_i} \\ &\quad + \left. \frac{\partial [Y_2(n, \omega; \beta)]}{\partial \omega} \right|_{\omega = \hat{\omega}_i} \end{aligned} \quad (10)$$

式(10)中, ω_i , $\hat{\omega}_i$ 分别为瞬时频率的真值与估计值。可以证明因为 $\phi'(n) = \omega_i(n)$, 有

$$\left. \frac{\partial [Y_{10}(n, \omega; \beta)]}{\partial \omega} \right|_{\omega = \omega_i} = 0 \quad (11)$$

通过数值积分计算可以得到下面的结果:

$$\left. \frac{\partial [Y_{11}(n, \omega; \beta)]}{\partial \omega} \right|_{\omega = \omega_i} = \frac{2A^2 \cdot \phi^{(2)}(n)}{\beta^3} \quad (12)$$

$$E(\partial Y_2(n, \omega_i) / \partial \omega_i) = 0 \quad (13)$$

$$\partial^2 \{Y_1(n, \omega_i)\} / \partial^2 \omega_i = -2A^2 / \beta^2 \quad (14)$$

综合上面的结果, 所以可以得到信号的瞬时频率估计偏差的期望为

$$\text{bias} = \phi''(n) / \beta \quad (15)$$

该结果表明: 利用指数遗忘分布的信号瞬时频率估计是有偏的, 其估计偏差与遗忘系数成反比, 而和相位的二次微分成正比。说明在文献[8-10]中使用的指数遗忘分布在进行信号时频表示时, 由于遗忘系数取值的不同, 会有不同的频率表示偏差出现。

3.2 指数遗忘分布的瞬时频率表示均方误差估计

考虑瞬时频率估计均方差的分布特性。

$$E[|\Delta\omega|^2] = \left(\frac{\beta^2}{-2A^2} \right)^2 \cdot E \left\{ \left[\left(\frac{\partial \{Y_2(n, \omega; \beta)\}}{\partial \omega} \right) \cdot \overline{\left(\frac{\partial \{Y_2(n, \omega; \beta)\}}{\partial \omega} \right)} \right] \right\} \Bigg|_{\omega = \hat{\omega}_i} \quad (16)$$

上式中 $\Delta\omega = \omega_i - \hat{\omega}_i$, 是由于噪声叠加带来的频率估计的误差。

将(16)式化简后可以得到

$$E \left\{ \left[\left(\frac{\partial \{Y_2(n, \omega; \beta)\}}{\partial \omega} \right) \cdot \overline{\left(\frac{\partial \{Y_2(n, \omega; \beta)\}}{\partial \omega} \right)} \right] \right\} \Bigg|_{\omega = \hat{\omega}_i} = \frac{5A^2\sigma^2}{2\beta} \quad (17)$$

将(17)式的结果代入(16)式, 可以得到利用指数遗忘分布的信号的瞬时频率估计方差:

如果令: $\text{SNR} = A^2/\sigma^2$, 则瞬时频率估计的方差可以写为与信噪比有关的表达式:

$$E[|\Delta\omega|^2] = \frac{5\beta^3}{(8\text{SNR})} \quad (18)$$

以上结果说明: 瞬时频率估计的均方差与信噪比成反比, 而与遗忘系数的三次方成正比关系。因此在瞬时频率估计时, 可以根据不同的要求, 利用前面分析得到的结论, 来选择遗忘系数以便在频率估计的偏差和方差之间得到平衡。

4 双边指数遗忘分布

由上一节的结论可以看到在指数遗忘分布中, 信号瞬时频率表示的偏差产生原因在于采用了单边的指数窗口, 因此信号的瞬时频率表示偏差同时与信号相位的二次微分与遗忘系数有关, 会产生类似瞬时频率表示漂移的现象, 这一点

在仿真实验的图5中可以看到。为了减小偏差, 本文提出了“双边指数遗忘分布”方法。

双边指数遗忘分布采用了对称的计算窗口, 可以表示为:

$$Y(t, \omega; \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-\beta|\tau-t|} \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (19)$$

双边指数遗忘分布的离散形式:

$$Y_{n,k} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) e^{-\beta|m-n|} \cdot e^{-j(2\pi/N)km} \quad (20)$$

$$Y_{n,k} = \sum_{m=-\infty}^n x(m) e^{\beta(m-n)} e^{-j(2\pi/N)km} + \sum_{m=n+1}^{\infty} x(m) e^{-\beta(m-n)} e^{-j(2\pi/N)km} \quad (21)$$

从式(21)可以看出双边指数遗忘分布计算的结果可以分为两项, 其中前一项是讨论过的传统指数遗忘分布, 而后项与前项具有相似的结构, 因此有相同的计算方法。由于采用了对称的计算窗口, 在传统的指数遗忘分布中由信号相位的二次微分带来的瞬时频率表示偏差将得到消除, 因此双边指数遗忘分布对瞬时频率有更加准确的表示。在仿真实验中, 将双边指数遗忘分布的瞬时频率表示效果进行验证。由于本文内容集中在指数遗忘分布的性能分析上, 因此对双边指数遗忘分布的具体分析将在其他的文章中作讨论。

5 仿真结果

构造一个相位的二次微分值线性增加的调频信号: $e^{j2\pi \cdot 0.2t^3}$, 采样频率 100Hz, 信号的长度为 256 点。

瞬时频率的估计偏差与遗忘系数关系如图1所示, 从上到下的5条曲线分别表示遗忘指数取 0.1、0.2、0.3、0.4、0.5 时的频率估计偏差。根据理论分析, 遗忘指数取定后信号瞬时频率的估计偏差仅与相位的二次微分值有关。如图中所示偏差随遗忘指数的增大而减小。

图2表示信噪比为 10dB, 当遗忘系数分别为 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4, 0.45, 0.5 时, 信号的瞬时频率表示偏差与遗忘系数取 0.1 时的频率估计偏差的比值。根据分析这些比值应该满足线性关系。利用 EFT 的瞬时频率估计最大问题在于由于通常情况下信号的相位结构未知, 所以估计偏差不可预测。

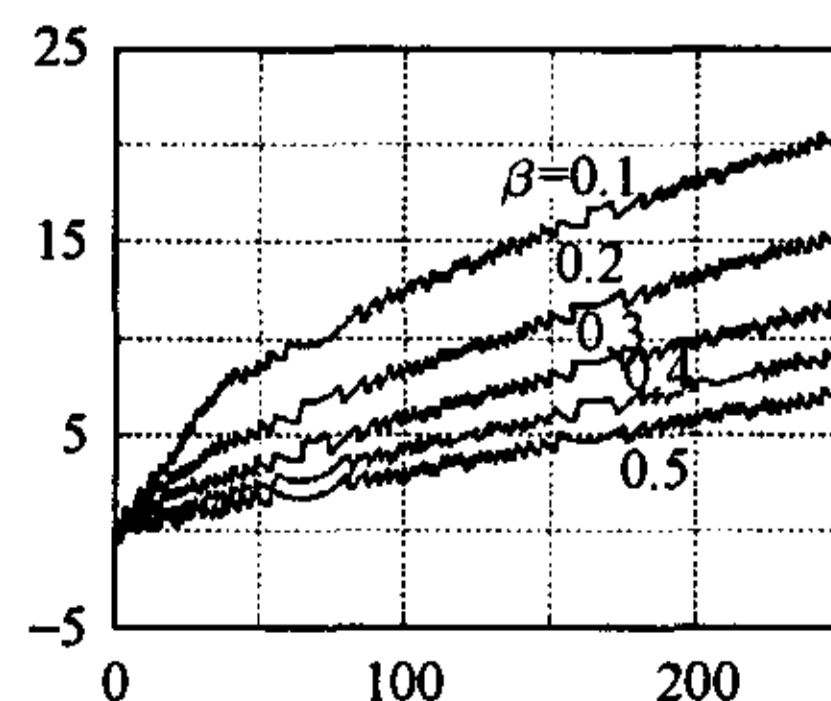


图1 频率估计偏差与遗忘指数的关系

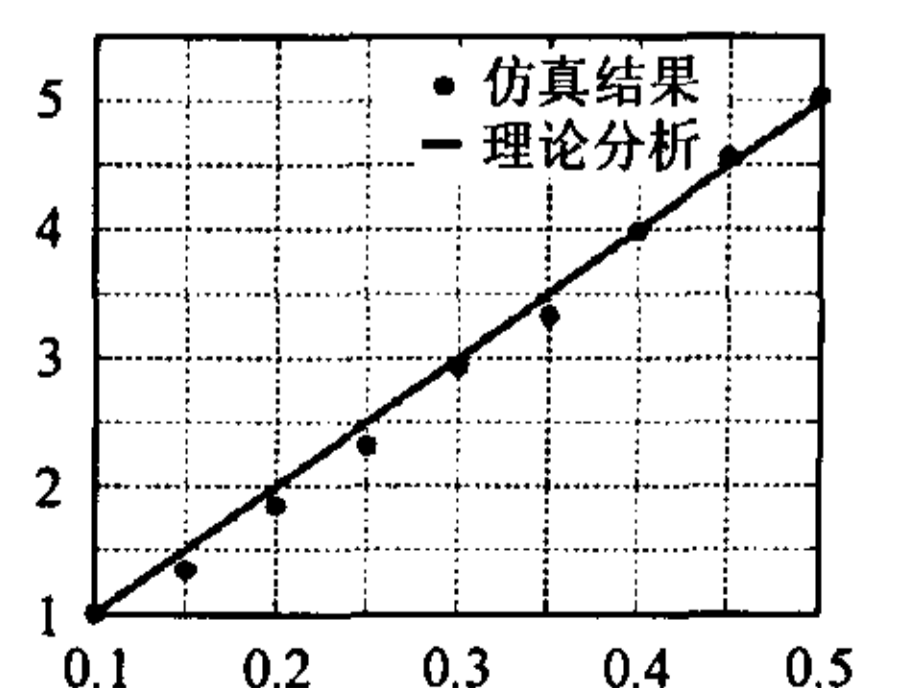


图2 取不同遗忘指数值时信号瞬时频率估计偏差的比值

图 3 表示了利用 EFT 的瞬时频率估计的均方误差与信噪比的关系, 横坐标表示信噪比, 单位为分贝; 纵坐标表示瞬时频率估计方差的对数, 图中 3 条曲线从上至下分别表示遗忘系数 $\beta = 0.4, \beta = 0.3, \beta = 0.2$ 时的估计均方差。仿真结果与分析一致。即在信噪比相同的时候, 频率估计的方差与遗忘系数之间有固定的关系。在仿真试验中: 遗忘系数为 $\beta = 0.3$ 与 $\beta = 0.2$ 时相比, 在信噪比大于 7dB 的情况下前者的频率估计方差大约是后者的 3.34 倍, 而遗忘系数 $\beta = 0.4$ 与 $\beta = 0.2$ 相比, 前者的方差大约为后者的 7.976 倍, 同时均方差的对数与信噪比近似满足线性关系。

图 4 表示在信噪比为 10dB 情况下, 利用不同遗忘系数的信号瞬时频率估计均方差的统计结果与理论分析的对比。实线代表理论结果, 圆圈表示仿真试验结果, 满足频率估计的均方差变化规律与遗忘系数的三次方成正比的关系。

在图 5 中分别利用 EFT 与本文提出的双边指数遗忘分布线性调频信号进行瞬时频率估计。与 EFT 相比, 双边指数遗忘分布能够大大减小瞬时频率的估计误差, 并且消除了 EFT 在瞬时频率表示上的“漂移”现象。

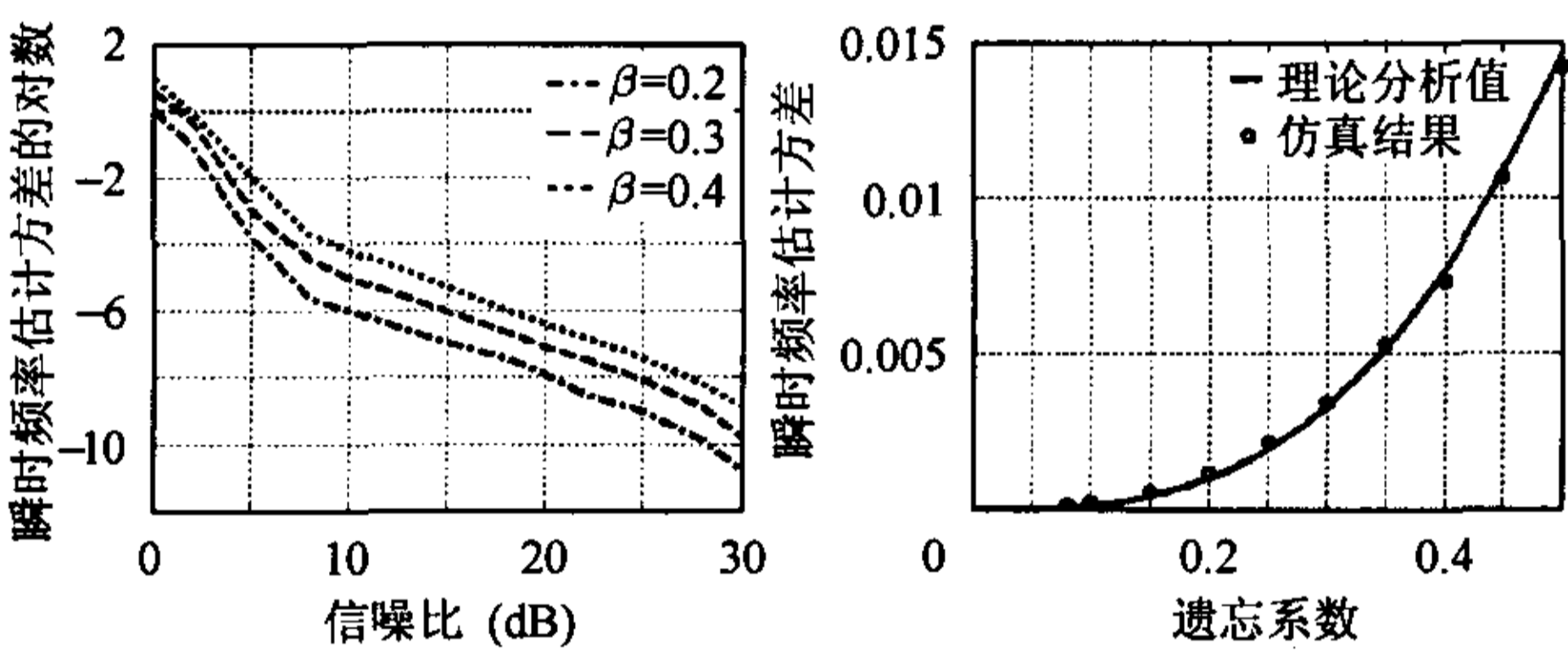
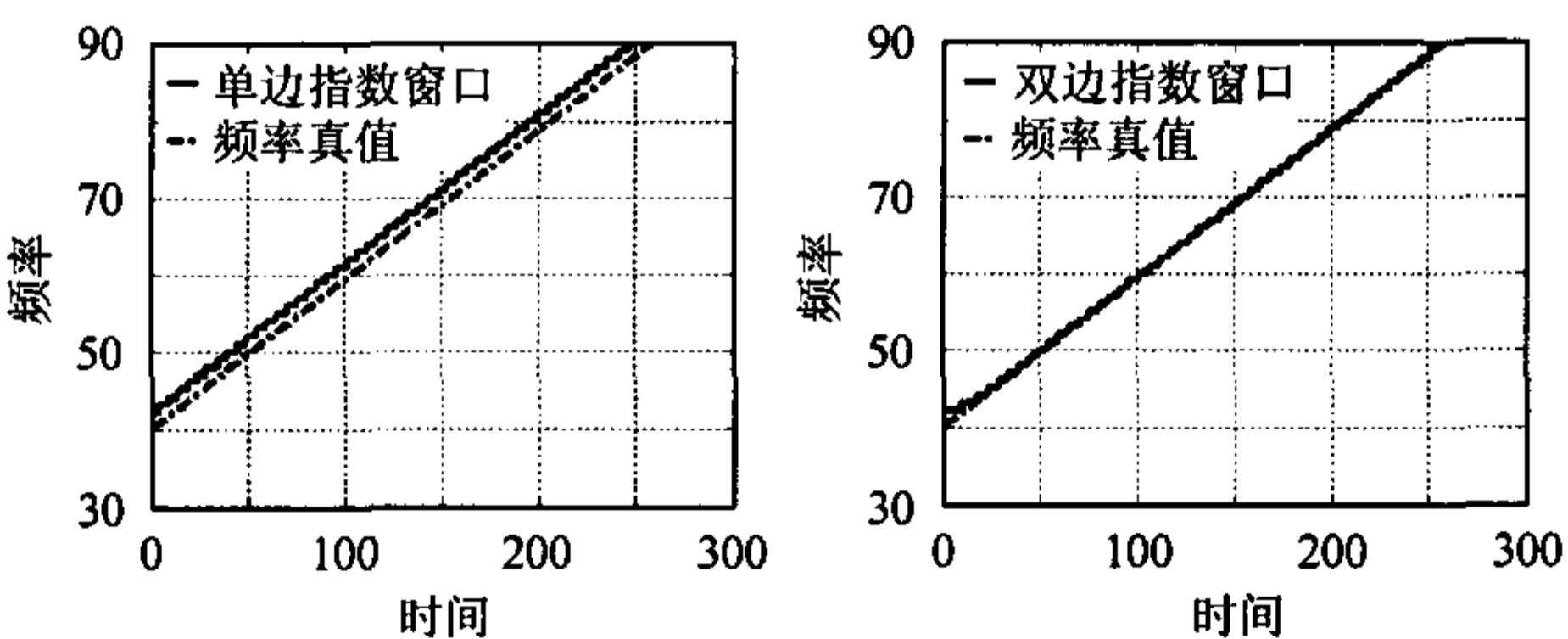


图 3 利用指数遗忘分布的信号瞬时频率估计方差与信噪比的关系

图 4 利用指数遗忘分布的信号瞬时频率估计方差与遗忘系数关系



(a) EFT 方法

(b) 双边指数遗忘分布

图 5 线性调频信号的瞬时频率估计。遗忘系数为 0.2。

6 结论

文献指出: 由于 EFT 采用单边指数形式的时域窗口, 因此可以利用迭代运算结构来提高计算效率。本文分析了 EFT 对信号时频特征的表达性能, 对其瞬时频率估计时的偏差和均方差与信噪比和遗忘系数的关系进行了分析。由于采用单

边非对称窗口, 在信号类型未知的情况下, EFT 频率表示的偏差不可预测。为克服这一缺点, 本文提出了采用双边指数窗口的时频分布算法, 通过试验可看到这种算法有效地避免了采用单边窗口时, 不同遗忘指数带来的不同的频率估计的漂移现象, 该算法同样具有较高的计算效率, 便于硬件的实现。

参 考 文 献

- [1] Rao P, Taylor F J. Estimation of instantaneous frequency using the discrete Wigner distribution. *IEEE Electronics Letters*, 1990, 26(4): 246 – 248 .
- [2] 孙圣和, 吴岩巍. WVD瞬时频率估计无偏估计研究. *电子学报*, 1996, 24(9): 102 – 105 .
- [3] Katovnik V, Stankovic L. Instantaneous frequency estimation using the Wigner distribution with varying and data-driven window length. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1998, 46(9): 2315 – 2325.
- [4] Stankovic L, Katkovic V. Algorithm for the instantaneous frequency estimation using time-frequency distributions with adaptive window width. *IEEE Signal Processing Letters*, 1998, 5(9): 224 – 227.
- [5] Stankovic L, Djurovic I. Instantaneous frequency estimation by using the Wigner distribution and linear interpolation. *Signal Processing*, 2003, 83(3): 483 – 491.
- [6] Boashash B, O'shea P. Use of the cross Wigner-Ville distribution for estimation of instantaneous frequency. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1993, 41(3): 1439 – 1445.
- [7] Lovell B C, Williamson R C. The relationship between instantaneous frequency and time-frequency representations. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1993, 41(3): 1458 – 1461.
- [8] Tomazic S, Znidar S. A fast recursive STFT algorithm. *Electrotechnical Conference, 8th, Mediterranean*, 1996, 2: 1025 – 1028.
- [9] Tomazic S. On short-time Fourier transform with single-sided exponential window. *Signal Processing*, 1996, 55(4): 141 – 148.
- [10] 陈砚圃, 张介秋, 卞正中. 一种新的联合时频分析方法. *通信学报*, 2001, 22(1): 7 – 11.

李 滔: 男, 1971年生, 博士生, 主要研究方向为阵列信号处理、时频分析、统计信号处理。

汤建龙: 男, 1979年生, 博士生, 主要研究方向为时频分析、统计信号处理。

杨绍全: 男, 1938年生, 博士生导师. 主要研究方向为阵列信号处理及电子对抗技术。