

## 乘性和复加性噪声中复谐波的循环估计量的性能分析<sup>1</sup>

毛用才 保 铮

(西安电子科技大学雷达信号处理国家重点实验室 西安 710071)

**摘 要** 从通信和探测系统需要的频率估计出发,文中研究了实乘性和复加性随机噪声中复谐波的恢复问题,表明循环均值和循环相关函数可用于对不同分布的有色实乘性和复加性随机噪声中的谐波进行恢复,分别对于非零均值和零均值乘性噪声情形分析了循环估计量的性能,证明了循环估计量与一定意义下的最小二乘估计量渐近等价,并给出了循环估计量的大样本方差表达式。模拟结果验证了大样本性能分析。

**关键词** 循环估计量,性能分析,乘性随机噪声,加性随机噪声,谐波恢复

**中图分类号** TN911.7, TN957

### 1 引 言

谐波恢复是实际应用中经常碰到的问题,在信号处理中常用来进行参数估计,从一系列实测的时间序列估计出谐波频率。常用的模型设定信号为纯正弦波(或复正弦波)并附有加性噪声,这适用于一般物理实验的测量系统。通信和探测系统中也有谐波恢复(即频率估计)问题,但信号非恒定,而附有包络调制(相当于乘性噪声),如通信信号是受调制的,且通过信道(如电离层)还会有附加调制。雷达回波的多普勒频率在短的观察时间里(小于秒级,对连续波或高重复频率雷达已可获取数以千计的测量值)可视为常数,但复包络是变化的,因此用恒定包络对这类信号进行分析显然是不适宜的。

文献 [1] 中分析了实谐波信号附有乘性加性噪声时的循环估计量的性能,表明用循环估计可以获得好的性能。而对于通信和探测系统宜采用复正弦信号 [2], 本文主要分析在实乘性和复加性噪声中复谐波的循环估计量性能。

考虑在实乘性和复加性噪声中离散时间谐波信号模型:

$$x(t) = s(t)e^{j(\omega_0 t + \phi_0)} + v(t), \quad t = 0, 1, \dots, T-1. \quad (1)$$

假设:

- (A1) 频率  $\omega_0$  为在  $(0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi)$  中取值的待估确知参数;
- (A2)  $\varphi_0$  为在  $(-\pi, \pi]$  中取值的待估确知参数;
- (A3) 乘性噪声  $s(t)$  为实平稳的混合 [1] 随机过程, 其均值为  $m_{s_0} \triangleq E[s(t)]$ ;
- (A4)  $v(t)$  为与  $s(t)$  相互独立的零均值的复平稳混合随机过程。

<sup>1</sup> 1996-04-19 收到, 1997-02-17 定稿

在假设 (A1)—(A4) 下, 由累积量的多线性性可得  $x(t)$  的  $k+l$  阶累积量为

$$\begin{aligned} c_{k+l}(t, \tau) &\triangleq \text{cum}\{x^*(t), x^*(t+\tau_1), \dots, x^*(t+\tau_{k-1}), x(t+\tau_k), \dots, x(t+\tau_{k+l-1})\} \\ &= \exp\left\{j\left[\omega_0\left((l-k)t - \sum_{i=1}^{k-1}\tau_i + \sum_{i=1}^{l-1}\tau_{k+i}\right) + (l-k)\phi_0\right]\right\} \\ &\quad \times c_{(k+l)s}(t, \tau) + c_{k+l}(t, \tau). \end{aligned} \quad (2)$$

对于非零均值乘性噪声情形和零均值乘性噪声情形需要不同的估计方法, 因此需要分别进行性能分析.

## 2 非零均值乘性噪声情形

如果  $s(t)$  的均值  $m_{s_0} \neq 0$ , 则由 (1) 式可得  $x(t)$  的时变均值:

$$m_x(t) = E[x(t)] = m_{s_0} \exp[j(\omega_0 t + \phi_0)] \quad (3)$$

中含有频率和相位信息, 且  $m_x(t)$  为  $t$  的周期函数, 因此考虑其关于  $t$  的 Fourier 系数:

$$C_{1x}(\alpha) = M_{1x}(\alpha) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} m_{1x}(t) e^{-j\alpha t} = m_{s_0} e^{j\phi_0} \delta(\alpha - \omega_0), \alpha \in (-\pi, \pi] \quad (4)$$

称之为循环均值, 在实际中循环均值可由单记录数据利用

$$\hat{C}_{1x}(\alpha) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} x(t) e^{-j\alpha t} \quad (5)$$

得到相容估计<sup>[1]</sup>. 注意 (5) 式只不过是  $x(t)$  的 DFT, 因而利用 FFT 算法可进行有效计算. 一旦得到估计  $\hat{C}_{1x}(\alpha)$ , 则频率和相位估计为

$$\hat{\omega}_0 = \arg \max_{\alpha > 0} |\hat{C}_{1x}(\alpha)|, \quad \hat{\phi}_0 = \arg[\hat{C}_{1x}(\hat{\omega}_0)], \quad \hat{m}_{s_0} = \text{Re}[e^{-j\hat{\phi}_0} \hat{C}_{1x}(\hat{\omega}_0)]. \quad (6)$$

可以证明, 如果只考虑频率和相位估计, 则循环估计量 (6) 式与下面的二次匹配准则的 NLLS 估计量等价:

$$(\hat{m}_s, \hat{\phi}, \hat{\omega}) = \arg \min_{m_s, \phi, \omega} Q_T(m_s, \phi, \omega), \quad (7)$$

其中  $Q_T(m_s, \phi, \omega) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} |x(t) - m_s e^{j(\omega t + \phi)}|^2$ .

### 2.1 参数的线性化

利用 Taylor 展开式可得:

$$m_s \exp[j(\omega t + \phi)] = \exp[j(\omega_0 t + \phi_0)] \cdot [m_s + jm_{s_0} t(\omega - \omega_0) + jm_{s_0}(\phi - \phi_0)] + \text{rem}, \quad (8)$$

其中 Taylor 余项为

$$\begin{aligned} \text{rem} &= \frac{1}{2} \exp[j(\omega^* t + \phi^*)] \cdot [-m_{s^*} t^2 (\omega^* - \omega_0)^2 - m_{s^*} (\phi^* - \phi_0)^2 \\ &\quad + 2jt(m_{s^*} - m_{s_0})(\omega^* - \omega_0) + 2j(m_{s^*} - m_{s_0})(\phi^* - \phi_0) - m_{s^*} t(\omega^* - \omega_0)(\phi^* - \phi_0)], \end{aligned}$$

而  $(m_s^*, \phi^*, \omega^*)$  为连接  $(m_s, \phi, \omega)$  与  $(m_{s_0}, \phi_0, \omega_0)$  的线段上的一点. 忽略 (8) 式中的余项, 可将 (7) 式近似为

$$\begin{aligned} Q_T(m_s, \phi, \omega) &\approx \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} |x(t) - e^{j(\omega_0 t + \phi_0)} [m_s + jm_{s_0} t(\omega - \omega_0) + jm_{s_0}(\phi - \phi_0)]|^2 \\ &= \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \{x(t) - e^{j(\omega_0 t + \phi_0)} [m_s + jm_{s_0} t(\omega - \omega_0) + jm_{s_0}(\phi - \phi_0)]\} \\ &\quad \times \{x^*(t) - e^{-j(\omega_0 t + \phi_0)} [m_s - jm_{s_0} t(\omega - \omega_0) - jm_{s_0}(\phi - \phi_0)]\}. \end{aligned} \quad (9)$$

令  $\frac{\partial Q_T(m_s, \phi, \omega)}{\partial m_s} = 0$ ,  $\frac{\partial Q_T(m_s, \phi, \omega)}{\partial \phi} = 0$ ,  $\frac{\partial Q_T(m_s, \phi, \omega)}{\partial \omega} = 0$ , 由于对任意整数  $n \geq 0$ , 有<sup>[1]</sup>

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \left(\frac{t}{T}\right)^n e^{j\omega t} = \frac{1}{n+1} \delta(\omega), \quad (10)$$

可得

$$\hat{\theta} - \theta = \mathbf{m} + \mathbf{H}\mathbf{b}, \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{m_{s_0}} & -\frac{6}{m_{s_0}} \\ 0 & -\frac{6}{m_{s_0}} & \frac{12}{m_{s_0}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \text{Re}[e^{-j\phi_0} \hat{C}_{1x}(\omega_0)] \\ \text{Im}[e^{-j\phi_0} \hat{C}_{1x}(\omega_0)] \\ \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \frac{t}{T} \text{Im}[x(t) e^{-j(\omega_0 t + \phi_0)}] \end{pmatrix}, \\ \hat{\theta} - \theta &\triangleq (\hat{m}_s - m_{s_0}, \hat{\phi} - \phi_0, T(\hat{\omega} - \omega_0))^T, \quad \mathbf{m} = (-m_{s_0}, 0, 0)^T, \end{aligned} \quad (12)$$

这里  $T$  表示转置. 由 (3) 和 (11) 式, 直接验证可知  $\lim_{T \rightarrow \infty} E(\mathbf{b}) = (m_{s_0}, 0, 0)^T$ , 因此  $\lim_{T \rightarrow \infty} E(\hat{\theta} - \theta) = 0$ , 即  $\hat{\theta}$  为  $\theta$  的渐近无偏估计量.

## 2.2 NLLS 与循环估计量的渐近性质

在 (11) 式中仅  $\mathbf{b}$  为随机变量, 故  $\hat{\theta}$  的渐近协方差矩阵为

$$\Sigma_{\hat{\theta}} \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} T \text{cov}(\hat{\theta}) = \mathbf{H} [\lim_{T \rightarrow \infty} T \text{cov}(\hat{\mathbf{b}})] \mathbf{H}^T \triangleq \mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{H}^T, \quad (13)$$

$\Sigma_{\hat{\theta}}$  的推导限于篇幅省略, 其最后结果为

$$\Sigma_{\hat{\theta}} = \begin{pmatrix} S_{2x}(0) + \frac{1}{2} S_{11v}(\omega_0) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2S_{11v}(\omega_0)}{m_{s_0}^2} & -\frac{3S_{11v}(\omega_0)}{m_{s_0}^2} \\ 0 & -\frac{3S_{11v}(\omega_0)}{m_{s_0}^2} & \frac{6S_{11v}(\omega_0)}{m_{s_0}^2} \end{pmatrix}, \quad (14)$$

其中  $S_{2x}(\omega) \triangleq \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} c_{2s}(\tau) e^{-j\omega\tau}$ ,  $S_{11v}(\omega) \triangleq \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} c_{11v}(\tau) e^{-j\omega\tau}$  分别为  $s(t)$  和  $v(t)$  在频率  $\omega$  处的谱密度. (14) 式说明其渐近性能只与  $m_{s_0}$  和  $\omega_0$  有关而与  $\phi_0$  无关.

由 (14) 式还可看出由循环平稳方法得到的  $m_{s_0}$  与  $(\phi_0, \omega_0)$  估计为渐近不相关的, 然而估计  $\hat{\phi}_0$  与  $\hat{\omega}_0$  之间则是相关的. 而且 (6) 或 (7) 式的参数估计量有以下大样本方差:

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{m}_{s_0}) &\approx \frac{1}{T} [S_{2s}(0) + \frac{1}{2} S_{11v}(\omega_0)], \quad \text{var}(\hat{\phi}_0) \approx \frac{1}{T} \frac{2S_{11v}(\omega_0)}{m_{s_0}^2}, \\ \text{var}(\hat{\omega}_0) &\approx \frac{1}{T^3} \frac{6S_{11v}(\omega_0)}{m_{s_0}^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

可以证明 (12) 式中的向量  $\mathbf{b}$  为渐近正态的, 由于  $(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})$  为  $\mathbf{b}$  的线性组合, 故  $\sqrt{T}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})$  也为渐近正态的. 我们将本节结果用下一定理概述.

**定理 1** 若  $s(t)$  与  $v(t)$  满足 (A3) 且  $m_{s_0} \neq 0$ , 则循环估计量 (6) 式, 或等价地 NLLS 估计量 (7) 式为渐近无偏且在最小均方意义下是相容的, 其大样本方差由 (15) 式给出. 进一步地,  $\sqrt{T}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})$  渐近地服从正态分布  $N(\mathbf{0}, \Sigma_{\hat{\boldsymbol{\theta}}})$ , 其渐近协方差矩阵由 (14) 式给出.

### 3 零均值乘性噪声情形

如果  $m_{s_0} = 0$ , 则  $x(t)$  的均值为零, 不再含有谐波信息, 因此考虑  $x(t)$  的二阶时变累积量  $c_{02x}(t, \tau) = m_{02x}(t, \tau) = c_{2s}(\tau) \exp\{j[\omega_0(2t + \tau) + 2\phi_0]\} + c_{02v}(\tau)$ . 由于延迟  $\tau = 0$  情形更便于研究, 我们着重考虑  $c_{02x}(t, 0) = \sigma_{s_0}^2 \exp[j(2\omega_0 t + 2\phi_0)] + \gamma_{2v}^2$ , 其中  $\gamma_{2v}^2 \triangleq E[v^2(t)]$ , 且定义参数向量为  $\boldsymbol{\theta} \equiv (\sigma_{s_0}^2, \phi_0, T\omega_0)$ . 由于  $c_{02x}(t, 0)$  为  $t$  的周期函数, 故考虑相应的循环相关函数:

$$C_{02x}(\alpha; 0) \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} c_{02x}(t; 0) e^{-j\alpha t} = \sigma_{s_0}^2 \delta(\alpha - 2\omega_0) + \gamma_{2v}^2 \delta(\alpha), \alpha \in (-\pi, \pi), \quad (16)$$

其估计量为<sup>[1]</sup>

$$\hat{C}_{02x}(\alpha; 0) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} x^2(t) e^{-j\alpha t}, \quad (17)$$

只不过是  $x^2(t)$  的标准化 DFT, 因而有

$$\hat{\omega}_0 = \frac{1}{2} \arg \max_{\alpha > 0} |\hat{C}_{02x}(\alpha; 0)|, \quad \hat{\phi}_0 = \frac{1}{2} \arg[\hat{C}_{02x}(2\hat{\omega}_0; 0)], \quad \hat{\sigma}_{s_0}^2 = |\hat{C}_{02x}(2\hat{\omega}_0; 0)|. \quad (18)$$

利用非零均值情形的结论, 容易得到 (18) 式中的循环估计量与下述 NLLS 估计量的等价性:

$$(\hat{\sigma}_s^2, \hat{\phi}, \hat{\omega}) = \arg \min_{\sigma_s^2, \phi, \omega} Q_T(\sigma_s^2, \phi, \omega), \quad (19)$$

其中  $Q_T(\sigma_s^2, \phi, \omega) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} |x^2(t) - \sigma_s^2 e^{2j(\omega t + \phi)}|^2$ .

#### 3.1 参数的线性化

类似于 (9) 式, 利用 Taylor 展开式可得

$$\begin{aligned} \sigma_s^2 \exp[2j(\omega t + \phi)] &= \exp[2j(\omega_0 t + \phi_0)] \\ &\times [\sigma_s^2 + 2j\sigma_{s_0}^2 t(\omega - \omega_0) + 2j\sigma_{s_0}^2(\phi - \phi_0)] + \text{rem.} \end{aligned} \quad (20)$$

将 (20) 式忽略余项后代入 (19) 式, 求偏导并令偏导为零, 再利用 (10) 式可得

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta} = \mathbf{s} + \mathbf{H}\mathbf{b}, \quad (21)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sigma_{s_0}^2} & -\frac{3}{\sigma_{s_0}^2} \\ 0 & -\frac{3}{\sigma_{s_0}^2} & \frac{6}{\sigma_{s_0}^2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \text{Re}[e^{-2j\phi_0} \hat{C}_{02x}(2\omega_0; 0)] \\ \text{Im}[e^{-2j\phi_0} \hat{C}_{02x}(2\omega_0; 0)] \\ \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \frac{t}{T} \text{Im}[x^2(t) e^{-2j(\omega_0 t + \phi_0)}] \end{pmatrix}, \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta} &\triangleq (\hat{\sigma}_s^2 - \sigma_{s_0}^2, \hat{\phi} - \phi_0, T(\hat{\omega} - \omega_0))^T, \quad \mathbf{s} = (-\sigma_{s_0}^2, 0, 0)^T. \end{aligned} \quad (22)$$

利用 (17) 式和 (10) 式直接验证可知,  $\lim_{T \rightarrow \infty} E(\hat{\boldsymbol{b}}) = (\sigma_{s_0}^2, 0, 0)^T$ , 因此由 (22) 式可得  $\lim_{T \rightarrow \infty} E(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$ , 即  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  为  $\boldsymbol{\theta}$  的渐近无偏估计量.

### 3.2 循环估计量的渐近性质

(22) 式的渐近协方差矩阵为

$$\Sigma_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} T \text{cov}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{H} [\lim_{T \rightarrow \infty} T \text{cov}(\hat{\boldsymbol{b}})] \mathbf{H}^T \triangleq \mathbf{H} \mathbf{B} \mathbf{H}^T, \quad (23)$$

$\Sigma_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}$  的计算与非零均值情形类似, 只是由于出现四阶累积量而要复杂的多. 其推导也略去, 这里仅给出最后结果. 令  $h_1(\tau) \triangleq c_{4s}(0, \tau, \tau) + 2c_{2s}^2(\tau)$ ,  $h_2(\tau) \triangleq c_{22v}(0, \tau, \tau) + 2c_{11v}^2(\tau)$ ,  $h_3(\tau) \triangleq 4c_{2v}(\tau) + c_{11v}(\tau)$ ,  $H_k(\omega) \triangleq \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} h_k(\tau) e^{-j\omega\tau}$ ,  $k = 1, 2, 3$  和  $G(\omega) \triangleq \frac{1}{4}H_2(2\omega) + \frac{1}{4}H_3(\omega)$ , 则  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  的渐近协方差矩阵为

$$\Sigma_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = \begin{pmatrix} H_1(0) + 2G(\omega_0) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2G(\omega_0)}{\sigma_{s_0}^4} & -\frac{3G(\omega_0)}{\sigma_{s_0}^4} \\ 0 & -\frac{3G(\omega_0)}{\sigma_{s_0}^4} & \frac{6G(\omega_0)}{\sigma_{s_0}^4} \end{pmatrix}, \quad (24)$$

(24) 式的分块对角结构表明  $\sigma_{s_0}^2$  的估计量与频率和相位估计量渐近不相关, 这一结论与非零均值情形相同. 同样地,  $\Sigma_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}$  为  $\sigma_{s_0}^2$  和  $\omega_0$  的函数而与  $\phi_0$  无关. 另外, 由 (24) 式的对角元素可得到 (18) 式中的循环参数估计量具有以下大样本方差:

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{\sigma}_{s_0}^2) &\approx \frac{1}{T} [H_1(0) + 2G(\omega_0)], & \text{var}(\hat{\phi}_0) &\approx \frac{1}{T} \frac{2G(\omega_0)}{\sigma_{s_0}^4}, \\ \text{var}(\hat{\omega}_0) &\approx \frac{1}{T^3} \frac{6G(\omega_0)}{\sigma_{s_0}^4}. \end{aligned} \quad (25)$$

同样可以证明 (22) 式中的向量  $\boldsymbol{b}$  为渐近正态的, 由于  $(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})$  为  $\boldsymbol{b}$  的线性组合, 故  $\sqrt{T}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})$  也为渐近正态的. 我们将本节结果概述为下一定理.

**定理 2** 若  $s(t)$  与  $v(t)$  满足 (A3) 且  $m_{s_0} = 0$ , 则循环估计量 (18) 式, 或等价地 NLLS 估计量 (19) 式为渐近无偏且在最小均方意义下是相容的, 其大样本方差由 (25) 式给出. 进一步地,  $\sqrt{T}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})$  渐近地服从正态分布  $N(\mathbf{0}, \Sigma_{\hat{\boldsymbol{\theta}}})$ , 其渐近协方差矩阵由 (24) 式给出.

## 4 模拟结果

为验证本文的主要结果, 本节给出几个模拟结果. 在所有例子中, 随机过程  $x(t)$  均按参数为  $\omega_0 = -1$ ,  $\phi_0 = -0.4$  和  $T = 256$  的 (1) 式产生, 而有色噪声由 i. i. d. 过程通过参数为  $\beta = (1, \beta_1)$ ,  $\beta_1 = 0.5$  的 MA(1) 系统得到, 又非高斯噪声为参数  $v$  的 i. i. d. 指数分布过程通过 MA(1) 系统的输出. 我们考虑了以下四种不同类型:

情形 1  $s(t)$  为  $m_{s_0} = 1, v = 1$  的有色非高斯噪声,  $v(t)$  为  $m_v = 0, \sigma_v^2 = 1$  的复白高斯噪声.

情形 2  $s(t)$  为  $m_{s_0} = 1, \sigma_{s_0}^2 = 1$  白高斯噪声,  $v(t)$  为  $m_v = 0, v = 1$  的复指数噪声;

情形 3  $s(t)$  为  $m_{s_0} = 0, v = 0.5$  的有色非高斯噪声, 因而  $\sigma_{s_0}^2 = v^{-2}(1 + \beta_1^2) = 5$ ;  $v(t)$  为  $m_v = 0, \sigma_v^2 = 0.2$  的复白高斯噪声;

情形 4  $s(t)$  为  $m_{s_0} = 0, \sigma_{s_0}^2 = 2$  的白高斯噪声,  $v(t)$  为  $m_v = 0, \sigma_v^2 = 0.2$  的复白高斯噪声。

对于非零均值 (情形 1、2) 和零均值 (情形 3、4) 情形分别按 (5) 和 (17) 式计算, 为得到尽量准确的频率估计, 我们在 FFT 之前将可得到的数据补零到长度为  $2^{14}$ , 由此估计  $\omega_0, \phi_0$  和  $m_{s_0}$  或  $\sigma_{s_0}^2$ 。图 1(a)–1(d) 所示分别为情形 1、2 的  $|\hat{C}_{1z}(\alpha)|$ , 和情形 3、4 的  $|\hat{C}_{02z}(\alpha; 0)|$ 。可见其峰值在  $\omega_0$  和  $2\omega_0$  处。

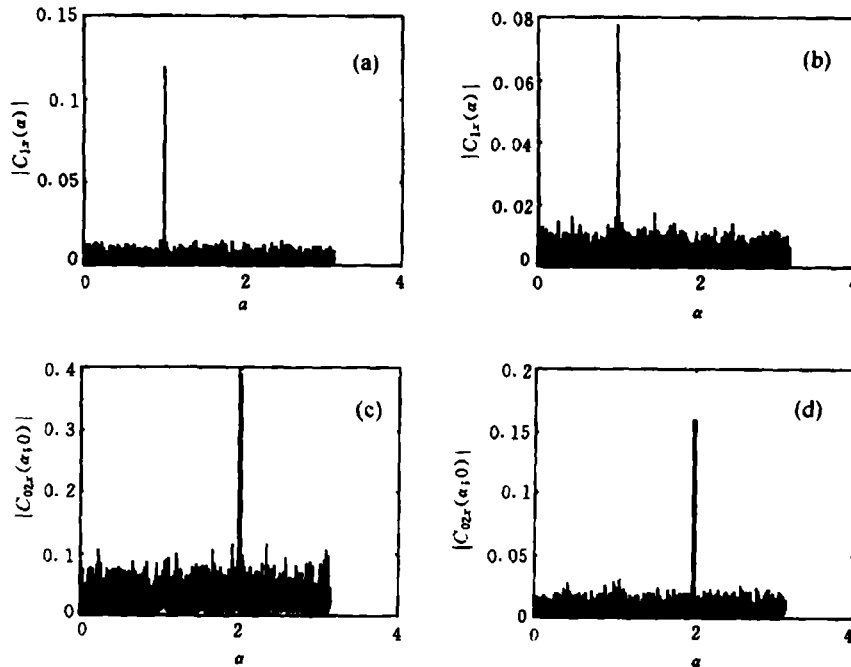


图 1 由循环均值与循环相关得到的谐波估计

## 5 结 论

本文分析了实乘性和复加性噪声中谐波模型的循环估计量性能。证明了循环估计量与一定意义下的 NLLS 估计量等价, 因而循环估计量在一定意义的最小剩余误差准则下是最优的。本文的主要工作是得到了在非零均值情形和零均值情形下循环估计量的渐近协方差矩阵。所得结果对于循环估计的应用是有益的。

## 参 考 文 献

- [1] Zhou G, Giannakis G B. Harmonics in multiplicative and additive noise: Performance analysis of cyclic estimators. IEEE Trans. on Signal Processing, 1995, SP-43(6): 1445–1460.

- [2] Van Trees H L. Detection, Estimation and Modulation Theory: Part III, Radar-Sonar Signal Processing and Gaussian Signals in Noise. New York: Wiley, 1971, Chs.9-11.

## PERFORMANCE ANALYSIS OF CYCLIC ESTIMATORS FOR HARMONICS IN MULTIPLICATIVE AND COMPLEX ADDITIVE NOISE

Mao Yongcai    Bao Zheng

(*National Key Lab. of Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an 710071*)

**Abstract** The concern here is retrieval of harmonic observed in multiplicative and complex additive noises. Cyclic mean and correlation statistics have proved to be useful for harmonic retrieval in the presence of real-valued multiplicative and complex-valued additive noise of arbitrary color and distribution. Performance analysis of cyclic estimators is carried through for both nonzero and zero mean multiplicative noises. Cyclic estimators are shown to be asymptotically equivalent to certain nonlinear least squares estimators, and large sample variance expressions of the cyclic estimators are derived. Simulations validate the large sample performance analysis.

**Key words** Cyclic estimator, Performance analysis, Multiplicative random noise, Complex-valued additive random noise, Harmonic retrieval

毛用才: 男, 1963年生, 博士, 副教授, 现主要从事非高斯信号处理及其在雷达信号处理方面的应用等研究.

保铮: 男, 1927年生, 教授, 中科院院士, 博士生导师, 现主要研究领域为信号处理和雷达系统.