第28卷第3期 电子与信息学报 Vol.28No.3
2006年3月 Journal of Electronics & Information Technology Mar. 2006

信号最优极化滤波及性能分析

徐振海 王雪松 施龙飞 肖顺平 庄钊文
(国防科技大学电子科学与工程学院 长沙 410073)

摘 要 研究了信号最优极化滤波问题，以信号干扰噪声比(SINR)为目标函数建立了带非线性约束的优化模型，利用变量代换将其转化为无约束的优化问题，利用极值必要条件将优化问题转化为一元二次方程求根问题，导出了最大SINR和最优接收极化的解析表达式。性能分析表明：信号和干扰极化状态差异越大，滤波性能越好，完全极化干扰容易被抑制，而部分极化干扰效果好。

关键词 信号处理，极化，滤波，信号干扰噪声比，最优化

中图分类号：TN957.51 **文献标识码**：A **文章编号**：1009-5896(2006)03-0498-04

Optimal Polarization Filtering and Its Performance Analysis

Xu Zhen-hai Wang Xue-song Shi Long-fei Xiao Shun-ping Zhuang Zhao-wen
(*School of Electronics Sci. and Eng, National University of Defense Technology, Changsha* 410073, *China*)

Abstract The optimal polarization filtering is investigated, which can be described as optimization with a nonlinear restriction. The nonlinear restriction is removed through an intermediary variable. According to the extremum necessary condition, the optimization is further transformed into problem of rooting a unitary quadratic equation. Consequently, the maximal SINR is the bigger root of the unitary quadratic equation and the optimal receiving polarization is obtained. The filtering performance is improved with the difference increasing in polarization domains between the desired signal and interference. The completely polarized interference can be suppressed easily and the partially polarized interference is difficult. to be suppressed.

Key words Signal Processing, Polarization, Filtering, Signal to Interference plus Noise Ratio (SINR), Optimization

1 引言

极化滤波[1]可以归结为干扰背景中期望信号的最佳接收问题，信号干扰噪声比(SINR)是最常见的衡量信号接收质量的指标，SINR综合考虑了电磁环境和信号特征等因素。SINR极化滤波实质上是一个带非线性约束的数学优化问题[2]，迄今为止，尚未见到该最优化问题的完整解法。文献[3]研究了完全极化和单干扰源条件下的SINR优化问题，给出了最佳接收极化的解析公式。针对实际中更常见的多辐射源和部分极化情况，文献[4]对SINR极化滤波进行了更具一般性的研究，并提出了启发性的求解思路。文献[5]利用拉格朗日乘子法和参量矩阵的反对称性，将非线性最优化问题巧妙地转化为二次代数方程求根问题，得到了最优化问题两个备选解的解析表达式。在文献[6,7]中，Yang研究了雷达目标极化增强问题，分别给出最优接收极化的解析表达式和数值解法。

本文利用变量代换方法将带非线性约束的优化问题转化为无约束的优化问题，利用极值必要条件将优化问题转化为一元二次方程求根问题，得到最大SINR和最优接收极化的解析表达式，然后分析了极化滤波器的性能。

2 SINR 优化模型

设在接收天线波束内同时存在期望信号和干扰信号，期望信号和干扰矢量的Stokes矢量分别为：$\boldsymbol{J}_S=\left[g_{S0}\quad \boldsymbol{g}_S^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{J}_I=\left[g_{I0}\quad \boldsymbol{g}_I^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$，并且 $g_{S0}\ge\|\boldsymbol{g}_S\|^2$，$g_{I0}\ge\|\boldsymbol{g}_I\|^2$，对于完全极化情形等式成立[1]。雷达接收天线的Stokes矢量为：$\boldsymbol{J}_R=\left[1\quad \boldsymbol{g}_R^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$，满足单位增益完全极化约束[1]，即 $\|\boldsymbol{g}_R\|=1$。其中：上标"T"表示转置，"$\|\cdot\|$"表示向量范数。此时期望信号接收功率为

$$P_S=\frac{1}{2}\boldsymbol{J}_R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_S=\frac{1}{2}\left(g_{S0}+\boldsymbol{g}_R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_S\right) \tag{1}$$

干扰信号接收功率为

$$P_I=\frac{1}{2}\boldsymbol{J}_R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_I=\frac{1}{2}\left(g_{I0}+\boldsymbol{g}_R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_I\right) \tag{2}$$

2004-09-03 收到，2005-01-04 改回

热噪声功率为 $P_N = N_0/2$，因此极化滤波器输出SINR为

$$\mathrm{SINR} = \frac{g_{S0} + \boldsymbol{g}_R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_S}{N_0 + g_{I0} + \boldsymbol{g}_R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_I} \tag{3}$$

由上式可看出，SINR是接收极化$\boldsymbol{g}_R$的函数，适当调整$\boldsymbol{g}_R$可使SINR达到最大。结合单位增益约束，可用一个带非线性约束的优化模型来描述：

$$\max_{\boldsymbol{g}_R \in R^3} \quad \mathrm{SINR} = \frac{g_{S0} + \boldsymbol{g}_R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_S}{N_0 + g_{I0} + \boldsymbol{g}_R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_I}, \qquad \text{s.t.} \quad \|\boldsymbol{g}_R\| = 1 \tag{4}$$

3　最优极化滤波

为推导方便，令 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}_R$，$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{g}_S$，$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{g}_I$，$a = g_{S0}$，$b = g_{I0} + N_0$，则上述问题可以重新写为

$$\max_{\boldsymbol{x} \in R^3} f(\boldsymbol{x}) = \frac{a + \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}{b + \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}, \qquad \text{s.t.} \quad \|\boldsymbol{x}\| = 1 \tag{5}$$

该目标函数实际上暗含了分母不为零假设，否则分母等于零，此时函数无极值。对于该问题，由于热噪声的存在，$N_0 + g_{I0} > \|\boldsymbol{g}_I\|$，即 $b > \|\boldsymbol{\beta}\|$，所以对于任意的 $\|\boldsymbol{x}\| = 1$，$b + \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \neq 0$ 恒成立。

令 $\boldsymbol{x} = \dfrac{\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{y}\|}$，且 $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$，将带约束的优化问题转化为无约束的优化问题

$$\max_{\substack{\boldsymbol{y} \in R^3 \\ \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}}} f(\boldsymbol{y}) = \frac{a\|\boldsymbol{y}\| + \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}}{b\|\boldsymbol{y}\| + \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}} \tag{6}$$

利用极值必要条件，将目标函数对向量求梯度，并令梯度向量为零：

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{y}} = \frac{\left(b\|\boldsymbol{y}\| + \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\right)\left(a\dfrac{\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{y}\|} + \boldsymbol{\alpha}\right) - \left(b\dfrac{\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{y}\|} + \boldsymbol{\beta}\right)\left(a\|\boldsymbol{y}\| + \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\right)}{\left(b\|\boldsymbol{y}\| + \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\right)^2} = \boldsymbol{0} \tag{7}$$

化简得到

$$\left(b\|\boldsymbol{y}\| + \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\right)\left(a\frac{\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{y}\|} + \boldsymbol{\alpha}\right) = \left(b\frac{\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{y}\|} + \boldsymbol{\beta}\right)\left(a\|\boldsymbol{y}\| + \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\right) \tag{8}$$

上式两边同除以 $\|\boldsymbol{y}\|$，并将 $\boldsymbol{x} = \dfrac{\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{y}\|}$ 再代入上式，得到

$$\left(b + \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\right)\left(a\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\alpha}\right) = \left(b\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\beta}\right)\left(a + \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\right) \tag{9}$$

两边同除以 $\left(b + \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\right)$ 得到

$$a\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\alpha} = \left(b\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\beta}\right)\frac{a + \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}{b + \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}} = M\left(b\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\beta}\right) \tag{10}$$

其中 $M = \dfrac{a + \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}{b + \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}$ 恰好是所要求的最大值(其实也可以是最小值，本文考虑最大值情形)。将上式化简得

$$\boldsymbol{x} = \frac{M\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}}{a - bM} \tag{11}$$

由于 $\|\boldsymbol{x}\| = 1$，所以

$$\left(a - bM\right)^2 = \left(M\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}\right)^{\mathrm{T}}\left(M\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}\right) \tag{12}$$

上式进一步化简得到

$$\left(b^2 - \|\boldsymbol{\beta}\|^2\right)M^2 - 2\left(ab - \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\right)M + \left(a^2 - \|\boldsymbol{\alpha}\|^2\right) = 0 \tag{13}$$

这是简单的一元二次方程，可以容易求得它的两个根，目标函数的最大值取较大的那个根。最大值为

$$M = \frac{ab - \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} + \sqrt{\left(ab - \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\right)^2 - \left(a^2 - \|\boldsymbol{\alpha}\|^2\right)\left(b^2 - \|\boldsymbol{\beta}\|^2\right)}}{b^2 - \|\boldsymbol{\beta}\|^2} \tag{14}$$

将原来的值代入上式得到，最大SINR为

$$\mathrm{SINR}_{max} = \left\{g_{S0}\left(g_{I0} + N_0\right) - \boldsymbol{g}_S^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_I + \left[\left(g_{S0}\left(g_{I0} + N_0\right) - \boldsymbol{g}_S^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_I\right)^2 - \left(g_{S0}{}^2 - \|\boldsymbol{g}_S\|^2\right)\left(\left(g_{I0} + N_0\right)^2 - \|\boldsymbol{g}_I\|^2\right)\right]^{1/2}\right\} \Big/ \left(\left(g_{I0} + N_0\right)^2 - \|\boldsymbol{g}_I\|^2\right) \tag{15}$$

最优接收极化为

$$\boldsymbol{g}_{R,\mathrm{opt}} = \frac{\mathrm{SINR}_{\max}\boldsymbol{g}_I - \boldsymbol{g}_S}{g_{S0} - \left(g_{I0} + N_0\right)\mathrm{SINR}_{\max}} \tag{16}$$

只要给出信号和干扰的Stokes矢量以及白噪声强度，根据式(15)和式(16)即可得到输出最大SINR和最优接收极化矢量。本文的方法既适用于完全极化情形又适用于部分极化情形，和文献[3－5]相比，本文的方法比较简便。

4　滤波性能分析

部分极化波可以分解为完全极化波和完全未极化波的叠加，信号极化度为完全极化分量的能量与总能量的比。期望信号和干扰信号的极化度分别为：$D_S = \|\boldsymbol{g}_S\|/g_{S0}$，$D_I = \|\boldsymbol{g}_I\|/g_{I0}$，显然 $0 \le D_S \le 1$，$0 \le D_I \le 1$。定义信号和干扰的极化匹配系数为其完全极化分量的归一化内积，即 $M_P = \boldsymbol{g}_S^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_I/\left(\|\boldsymbol{g}_S\|\|\boldsymbol{g}_I\|\right)$，显然，$-1 \le M_P \le 1$。极化匹配系数衡量信号和干扰的极化状态差异，极化状态差异越大，极化匹配系数越小。将它们代入式(15)得到

$$\mathrm{SINR}_{\max}=\left\{\mathrm{SNR}\left[\left(1-D_S D_I M_P\right)\mathrm{INR}+1+\left[\left(\left(1-D_S D_I M_P\right)\cdot\mathrm{INR}+1\right)-\left(1-D_S^2\right)\left(\left(1-D_I^2\right)\mathrm{INR}^2+2\mathrm{INR}+1\right)\right]^{1/2}\right\}\Big/\left[\left(1-D_I^2\right)\mathrm{INR}^2+2\mathrm{INR}+1\right] \tag{17}$$

其中信噪比定义为 $\mathrm{SNR}=g_{S0}/N_0$，干噪比为 $\mathrm{INR}=g_{I0}/N_0$。

可以看出：$\mathrm{SINR}_{\max}$ 是信噪比SNR，干噪比INR，期望信号极化度 D_S，干扰信号极化度 D_I，以及极化匹配系数 M_P 的多元函数，对极化匹配系数求偏导得到

$$\frac{\partial\mathrm{SINR}_{\max}}{\partial M_P}=-\frac{\mathrm{SNR}\cdot\mathrm{INR}D_S D_I}{\left(1-D_I^2\right)\mathrm{INR}^2+2\mathrm{INR}+1}\cdot\left\{1+\left[\left(1-D_S D_I M_P\right)\mathrm{INR}+1\right]\Big/\left[\left(\left(1-D_S D_I M_P\right)\mathrm{INR}+1\right)^2-\left(1-D_s^2\right)\left(1-D_I^2\right)+2\mathrm{INR}+1\right]^{1/2}\right\}<0 \tag{18}$$

容易看出 $\mathrm{SINR}_{\max}$ 对极化匹配系数 M_P 的偏导数恒小于0，因此，滤波器性能随着信号和干扰的极化差异变大而改善。

4.1 干扰为完全极化

当干扰信号为完全极化时，即 $D_I=1$，此时

$$\mathrm{SINR}_{\max}=\mathrm{SNR}\left\{\frac{\left(1-D_S M_P\right)\mathrm{INR}+1}{2\mathrm{INR}+1}+\frac{\sqrt{\left[\left(1-D_S M_P\right)\mathrm{INR}+1\right]^2-\left(1-D_S^2\right)\left(2\mathrm{INR}+1\right)}}{2\mathrm{INR}+1}\right\} \tag{19}$$

当干扰信号很强时，即 $\mathrm{INR}>>1$，此时

$$\lim_{\mathrm{INR}\to+\infty}\mathrm{SINR}_{\max}=\mathrm{SNR}\left(1-D_S M_P\right) \tag{20}$$

从式(20)可以看出，当干扰强度趋于无穷大时，最大SINR趋于恒定值，为信噪比的常数倍，与干扰强度无关，说明干扰信号可以被完全抑制。

图1(a)，图1(b)分别给出了最大SINR与干噪比INR的关系曲线，其中：$\mathrm{SNR}=0\mathrm{dB}$。从图中可以看出，随着干噪比的增加，极化滤波器的性能下降，并趋于恒定值。比较可以看出，极化差异越大，滤波性能越好。

4.2 干扰为部分极化

当干扰信号为部分极化情形时，即 $D_I\neq 1$，此时

$$\mathrm{SINR}_{\max}=\mathrm{SIR}\left\{\left[\left(1-D_S D_I M_P\right)\mathrm{INR}+1+\left[\left(\left(1-D_S D_I M_P\right)\mathrm{INR}+1\right)^2-\left(1-D_s^2\right)\left(\left(1-D_I^2\right)\mathrm{INR}^2+2\mathrm{INR}+1\right)\right]^{1/2}\right]\Big/\left[\left(1-D_I^2\right)\mathrm{INR}+2+\frac{1}{\mathrm{INR}}\right]\right\} \tag{21}$$

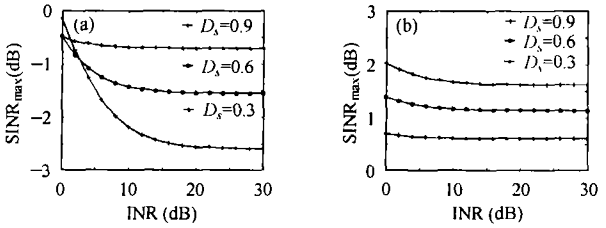

图1 完全极化干扰条件下最大SINR与干噪比INR的关系曲线

(a)M_P= 0.5 (b)M_P= – 0.5

当干扰信号很强时，即 $\mathrm{INR}>>1$，此时

$$\lim_{\mathrm{INR}\to+\infty}\mathrm{SINR}_{\max}=\mathrm{SIR}\frac{1-D_I D_S M_P+\sqrt{\left(1-D_I D_S M_P\right)^2-\left(1-D_S^2\right)\left(1-D_I^2\right)}}{1-D_I^2} \tag{22}$$

从式(22)可以看出，当干扰强度趋于无穷大时，最大SINR迅速下降，为信干比SIR的常数倍，说明干扰严重影响着滤波器的性能，干扰不能被完全抑制，干扰效果较好。

图2(a)，图2(b)分别给出了最大SINR与干噪比INR的关系曲线。其中：$\mathrm{SNR}=0\mathrm{dB}$，$D_S=1$。从图中可以看出，随着干噪比的增加，极化滤波器的性能迅速下降，下降速度与信干比相同。

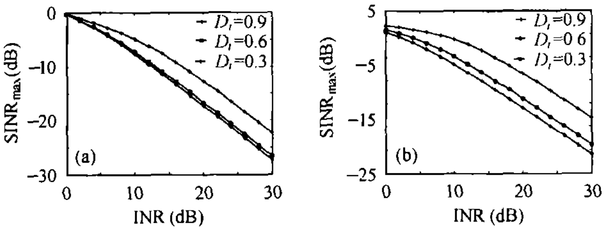

图2 部分极化干扰条件下最大SINR与干噪比INR的关系曲线

(a) M_P= 0.5 (b) M_P= – 0.5

5 结束语

本文研究了信号最优极化滤波问题，并分析了滤波器的性能。极化滤波实际上是一个带约束非线性最优化问题。本文利用变量代换方法将带非线性约束的优化问题转化为无约束的优化问题，利用极值必要条件将优化问题转化为一元二次方程求根问题，导出最大SINR和最优接收极化的解析表达式。既适用于完全极化情形又适用于部分极化情形，与前人工作相比，结果完全一致，并且本文的方法比较简单。通过分析可知，信号和干扰极化状态差异越大，滤波性能越好；完全极化的干扰容易被抑制，部分极化干扰效果好。

参 考 文 献

[1] 庄钊文，肖顺平，王雪松. 雷达极化信息处理及应用. 北京：

国防工业出版社，1999：291 − 359.

[2] Stapor D P. Optimal receive antenna polarization in the presence of interference and noise. *IEEE Trans. on AP*, 1995, 43(5): 473 − 477.

[3] 王雪松，庄钊文，肖顺平等. 极化信号的优化接收理论：完全极化情形. 电子学报，1998，26(6)：42 − 46.

[4] 王雪松，庄钊文，肖顺平. 极化信号的优化接收理论：部分极化情形. 电子科学学刊，1998，20(4)：468 − 473.

[5] 王雪松，徐振海，代大海等. 干扰环境下部分极化信号的最佳滤波. 电子与信息学报，2004，26(4)：593 − 597.

[6] 徐振海，王雪松，肖顺平等. 干扰环境中信号最优极化滤波. 第九届国内雷达学术年会，烟台，2004：517 − 519.

[7] J. Yang, Y. Yamaguchi, *et al.*. The formulae of the characteristic polarization states in the co-pol channel and the optimal polarization state for contrast enhancement. *IEICE Trans. on Comm.*, 1997, E80-B(10): 1570 − 1575.

[8] J. Yang, Y. Yamaguchi, et al. Numerical methods for solving the optimal problem of contrast enhancement. *IEEE Trans. on GRS*, 2000, 38(2): 965 − 971.

徐振海：　男，1977 年生，博士，讲师，研究方向为极化信息处理、阵列信号处理.

王雪松：　男，1972 年生，博士，教授，研究方向为极化信息处理、雷达目标识别.

施龙飞：　男，1978 年生，博士生，研究方向为极化信息处理、雷达目标识别.

肖顺平：　男，1964 年生，博士，教授，研究方向为综合电子战、极化信息处理.

庄钊文：　男，1958 年生，博士，教授，研究方向为雷达目标识别、极化信息处理.