

## 基于小波域统计混合模型的图像降噪方法

易翔 王蔚然

(电子科技大学电子工程学院 成都 610054)

**摘要:** 该文提出了一种基于小波域统计混合模型的图像降噪方法。该方法首先利用尺度间模型, 将小波系数分成两类: 有意义系数和无意义系数; 然后在小波域同层模型中运用最大后验概率估计方法, 从有意义系数中恢复出原始系数。文章给出了算法的完整步骤。实验结果及分析表明了该方法的有效性。

**关键词:** 小波变换, 最大后验概率, 混合模型, 图像降噪

中图分类号: TN919.8 文献标识码: A 文章编号: 1009-5896(2005)11-1722-04

## Method of Image Denoising Based on Statistical Mixture Model in Wavelet Domain

Yi Xiang Wang Wei-ran

(School of Electronic Engineering, UEST of China, Chengdu 610054, China)

**Abstract** In this paper, a novel image denoising method based on statistical mixture model in wavelet domain is proposed. Firstly, the wavelet coefficients are classified as significant and insignificant coefficients by using interscale statistical model. Secondly, Maximum *A Posteriori* (MAP) estimator based on intrascale statistical model is used to restore the noisy wavelet image coefficients. A complete algorithm is presented to implement this idea. Experimental results and analysis are given to demonstrate the validity and effectiveness of the proposed method.

**Key words** Wavelet transform, Maximum *A Posteriori* (MAP), Mixture model, Image denoising

### 1 引言

小波变换作为一种强有力的分析工具, 在很多领域得到了广泛应用。将小波系数分布模型化, 对于信号分析和处理极其有益。一个好的模型应该具有以下特点: (1)模型能描述小波系数的近似分布特征; (2)模型参数能从观测值中得到。在图像去噪背景下, 统计模型方法可以分成两类: (1)尺度空间内模型方法, 代表性的是根据广义高斯分布(Generalized Gaussian Distributed, GGD)模型和最小Bayes代价原则提出的Bayes Shrink阈值法<sup>[1]</sup>; (2)尺度空间之间的模型方法, 通过寻找不同分解层次上父子系数的相关性来进行滤波, 其代表为Crouse等人<sup>[2]</sup>提出的基于隐马尔科夫树模型(Hidden Markov Tree, HMT)的降噪方法。在图像压缩应用中, 零树(Zerotree)编码模型<sup>[3]</sup>是一种尺度层间模型的典型代表, 它通过利用上下层小波系数之间的内在相似性, 来分辨重要小波系数, 然后只对重要系数进行编码以此达到压缩图像的目的。

两类模型各有特点, Liu等人<sup>[4]</sup>用信息论的方法指出小波系数在同层(Intrascale)的关联程度较层间(Interscale)的更高。但是层间模型的树结构可以方便有效地提取重要的小波系数。因此, 我们结合两类模型的特点, 利用小波变换域同层

和上下层小波系数的关系, 提出了一种新的自适应图像降噪思路: 首先用尺度层间模型进行小波系数定性分析(系数分类), 即将小波系数划分成两类: 有意义系数和无意义系数; 然后用层内模型对有意义的小波系数估计进行定量恢复(系数收缩), 即根据同层分布统计模型, 运用最大后验概率(Maximum *A Posteriori*, MAP)估计恢复出有用信号的小波系数。

### 2 小波域统计混合模型

#### 2.1 尺度间模型(Interscale model)

根据自然图像小波系数的分布规律, 我们假设了一个简单的层间系数分布模型:

$$P(w_{m+1}, w_m) = 2/(\pi\sigma_{m+1}\sigma_m) \exp\left[-2\sqrt{(w_{m+1}/\sigma_{m+1})^2 + (w_m/\sigma_m)^2}\right] \quad (1)$$

式中 $w_{m+1}$ ,  $w_m$ 分别为小波树上的父、子节点系数,  $\sigma_{m+1}$ ,  $\sigma_m$ 分别为父、子节点系数的标准方差。这个层间模型具有以下特点: (1)具有类广义高斯函数的形式, 这与小波系数集是

稀疏集的特性相符合(即信号的小波系数幅值绝大多数都很

小, 仅有为数很少的一部分很大); (2)当父系数幅度很小时, 子系数幅值小的概率就很大, 这与零树编码思想一致; (3)从式(1)看出父系数分布与子系数分布不是统计独立的, 这表明父子系数分布具有一定程度的关联性; (4)模型中的待定参数  $\sigma_{m+1}$ ,  $\sigma_m$ , 可以方便地从观测值中得到。

图 1(a)给出了 Lena 图像的 LH1 和 LH2 层间父子小波系数联合分布直方图。与假设模型对比可以看出, 我们假设的经验模型同实际情况大致吻合, 与实际上下层系数的联合分布规律是一致的, 这个实例验证了假设模型的合理性。

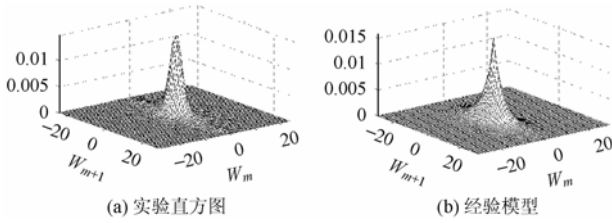


图 1 层间系数分布的实验结果与层间模型的对比

### 2.2 基于尺度间模型的系数分类

在小波变换域上不同尺度层间跨层(Interscale)之间的小波系数存在某种关联, 图像小波系数的树结构形式见图 2。Lewis和Knowles在零树(Zerotree)编码思想中<sup>[3]</sup>, 提出了这样一个假设: 在小波树上, 小波系数的父节点数值很小时, 其子系数也很小。这样就可以将小波系数划分成两类: 有意义系数Wsig类和无意义系数Wisig类。算法描述为

```

Choose a significance threshold  $T$ .
Compare  $|w_{m+1}|$  to  $T$ .
If  $|w_{m+1}| > T$ , put  $w_m$  into Wsig;
Else, put  $w_m$  into Wisig.
    
```

这种思想使零值编码得到了较高的压缩比。但是在图像去噪的应用背景下, 小波系数受到噪声的污染, 仅靠比较父节点系数大小来决定小波系数的分类, 显然会带来很大的误差。并且门限  $T$  的选择也有一定的困难。针对这一问题, 我们结合 2.1 节所提出的尺度间模型, 提出了一个在 Gaussian 白噪声干扰情况下新的小波系数分类准则。令  $w'_{m+1}$ ,  $w'_m$  分别为小

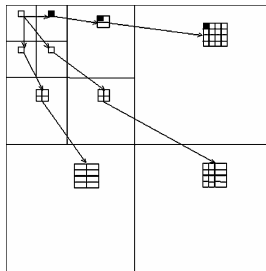


图 2 小波系数的跨尺度空间树结构

波树上的父、子节点含噪的观测系数值。定义一个判断函数  $f$ :

$$f(w'_{m+1}, w'_m) \triangleq \sqrt{(\sigma_{m+1}w'_{m+1})^2 + (\sigma_m w'_m)^2} - 2\sigma_n^2 \quad (2)$$

则新准则为

```

Calculate  $f(w'_{m+1}, w'_m)$ .
Compare  $f(w'_{m+1}, w'_m)$  to 0.
If  $f(w'_{m+1}, w'_m) > 0$ , put  $w_m$  into Wsig;
Else, put  $w_m$  into Wisig.
    
```

该新分类准则的依据如下: 考虑以下噪声模型:

$W' = W + N$ ; 其中  $W' = [w'_{m+1}, w'_m]^T$ ,  $W = [w_{m+1}, w_m]^T$ ,  $N = [n_1, n_2]^T$ , 在 Gaussian 白噪声干扰的情况下,  $p(N) = \frac{1}{2\pi|\mathbf{R}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}N^T \mathbf{R}^{-1}N\right)$ , 协方差矩阵  $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sigma_n^2 & 0 \\ 0 & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$ 。另式

(1)改写为向量形式为:  $p(W) = \frac{2}{\pi|\mathbf{B}|^{1/2}} \exp[-2(W^T \mathbf{B}^{-1}W)^{1/2}]$ ,

其中  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \sigma_{m+1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_m^2 \end{bmatrix}$ 。

由最大后验概率 MAP 估计理论可知,  $\hat{W} = \arg \max_w \{P(W/W')\}$ 。根据贝叶斯定理(Bayes law), 用先验概率密度计算无噪声的小波系数后验概率密度, 得到 MAP 等价形式为

$$\begin{aligned} \hat{W} &= \arg \max_w \{\lg P(W' - W) + \lg P(W)\} \\ &= \arg \max_w \left\{ \left[ -\frac{1}{2}(W' - W)^T \mathbf{R}^{-1}(W' - W) \right] \right. \\ &\quad \left. \left[ -2(W^T \mathbf{B}^{-1}W)^{1/2} \right] \right\} \quad (3) \end{aligned}$$

由此式可得到以下方程, 并注意到  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{B}$  为对角阵:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{-1}[W' - \hat{W}] - \frac{2\mathbf{B}^{-1}\hat{W}}{(\hat{W}^T \mathbf{B}^{-1}\hat{W})^{1/2}} &= 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{m+1}\hat{w}_{m+1} - \sigma_{m+1}w'_{m+1} = -2\sigma_n^2 \cdot \frac{\hat{w}_{m+1}}{\sigma_{m+1}} / \sqrt{\frac{\hat{w}_{m+1}^2}{\sigma_{m+1}^2} + \frac{\hat{w}_m^2}{\sigma_m^2}} \\ \sigma_m \hat{w}_m - \sigma_m w'_m = -2\sigma_n^2 \cdot \frac{\hat{w}_m}{\sigma_m} / \sqrt{\frac{\hat{w}_{m+1}^2}{\sigma_{m+1}^2} + \frac{\hat{w}_m^2}{\sigma_m^2}} \end{cases} \quad (4) \end{aligned}$$

此方程的解没有明确的解析式, 但从式(4)分析得到:  $\hat{w}_m$  与  $w'_m$  同号,  $\hat{w}_{m+1}$  与  $w'_{m+1}$  同号, 并且  $|\hat{w}_{m+1}| \leq |w'_{m+1}|$ ;  $|\hat{w}_m| \leq |w'_m|$ 。将式(4)进一步整理可得

$$(\sigma_{m+1}\hat{w}_{m+1} - \sigma_{m+1}w'_{m+1})^2 + (\sigma_m \hat{w}_m - \sigma_m w'_m)^2 = 4\sigma_n^4 \quad (5)$$

如果  $(\sigma_{m+1}w'_{m+1})^2 + (\sigma_m w'_m)^2 < 4\sigma_n^4$ , 即  $f(w'_{m+1}, w'_m) < 0$ , 式(5)无解, 则  $\hat{w}_{m+1} = 0$ ,  $\hat{w}_m = 0$ 。因此我们可以用此条件作为含噪情况下小波系数分类的标准, 这样就得到了一个与噪声能量有关的自适应判决公式(2)。

通过尺度层间模型, 得到了两类小波系数。由于小波系

数集满足稀疏特性，故在去噪时，对无意义小波系数直接置零；对于有意义小波系数，在尺度内模型上运用 MAP 估计，恢复出原图像的小波系数。

2.3 尺度内模型(Intracscale model)

广义高斯分布(GGD)<sup>[5]</sup>是对层内小波系数分布很好的近似。

$$p(w) = \frac{\nu\eta(\nu)}{2T(1/\nu)\sigma} \exp[-(\eta(\nu)|w|/\sigma)^\nu] \quad (6)$$

其中  $\nu$  为形状因子， $T(x) = \int_0^x u^{x-1} \exp(-u) du$  为伽马函数， $\eta(\nu) \triangleq \sqrt{T(3/\nu)/T(1/\nu)}$ ， $\sigma$  为标准方差。一般自然图像小波系数分布的形状因子  $\nu$  为 0.5~1。为了计算方便和便于估计模型参数(减少一个待估计的参数，提高了处理的速度)，选择  $\nu=1$  时， $P(w)$ 退化为拉普拉斯(Laplace)分布。采用 MAP 估计可得到小波收缩函数，

$$\begin{aligned} \hat{w} &= \text{sgn}(w') \cdot \max(|w'| - \sqrt{2}\sigma_n^2/\sigma, 0) \\ &= \text{SoftTh}(w', \sqrt{2}\sigma_n^2/\sigma) \end{aligned} \quad (7)$$

从本质上看，上式其实就是一个软阈值(Soft Thresholding)收缩函数。对同一分解层次上的有意义小波系数用式(7)进行系数收缩，就得到原始图像小波系数的估计。

3 图像降噪算法的步骤

基于小波域混合模型图像算法的步骤如下：

- (1) 将待处理图像进行多级小波分解；
- (2) 估计噪声系数的标准方差  $\sigma_n$  和混合模型的参数  $\sigma_{m+1}$ ， $\sigma_m$ ；
- (3) 用尺度间模型对小波系数进行分类，对无意义的小波系数直接置零处理，对有意义的小波系数运用层内模型得到的收缩函数进行恢复，具体算法描述为

```

Loop for each wavelet scale m
{
  Loop for each pixel point (i, j)
  {
    Estimate  $\sigma_n$ ,  $\sigma_{m+1}(i, j)$ ,  $\sigma_m(i, j)$ 
    Computer  $f(w'_{m+1}(i, j), w'_m(i, j))$ 
  }
}
    
```

```

If  $f(w'_{m+1}(i, j), w'_m(i, j)) \leq 0$ ,  $\hat{w}_m(i, j) = 0$ ;
Else  $\hat{w}_m(i, j) = \text{SoftTh}(w'_m(i, j), \sqrt{2}\sigma_n^2/\sigma_m(i, j))$ 
} End loop i, j
} End loop m
    
```

(4) 用新系数进行逆小波变换，得到降噪图像。

4 数值实验及结论

我们采用Lena(512×512)标准图像进行实验。分别采用以下方法：通用阈值法(VisuShrink)<sup>[6]</sup>；Stein无偏风险估计(Unbiased Risk Estimate)阈值法(SureShrink)<sup>[7]</sup>；Bayes风险最小的阈值法(BayesShrink)<sup>[1]</sup>；HMT<sup>[2]</sup>和复数隐马尔科夫模型方法(CHMT)<sup>[8]</sup>；基于复数小波变换(Complex Wavelet Transform, CWT)<sup>[9,10]</sup>的双变量小波收缩法(BiShrink)<sup>[11]</sup>；以及本文提出的离散小波变换统计混合模型方法(MixShrink)和复数小波变化域混合模型图像去噪方法(CMixShrink)。图像降噪性能采用峰值信噪比(PSNR)来衡量。图3是本文方法对含噪Lena图像降噪效果。表1是不同噪声方差的情况下，各方法对Lena测试图像滤波得到的峰值信噪比。



图3 基于 DWT 和 CWT 混合模型的图像降噪效果

实验结果表明：(1)本方法去噪效果明显，人眼能直观感觉图像质量的改善。从表1还可看出图像噪声水平较大时，本文提出的 MixShrink 和 CMixShrink 均优于同类方法。(2)我们还发现基于复数小波变换 CWT 的方法较 DWT 方法的降噪效果有明显提高。这主要是因为 DWT 没有平移不变性，而 CWT 利用其有限的冗余度实现了近似平移不变性，因此基于 CWT 的算法降噪效果更好。(3)另外最重要的一点的是，由于 CWT 具有平移不变性，使得小波系数的奇异表现在相

表1 Lena 图像的降噪结果

噪声方差	PSNR of noisy image	基于 DWT 的方法					基于 CWT 的方法		
		VisuShrink	SureShrink	BayesShrink	HMT	MixShrink	BiShrink	CHMT	CMixShrink
$\sigma=15$	24.6068	28.8147	29.4531	31.5777	31.4245	32.3903	33.5795	32.4943	33.7434
$\sigma=25$	20.1699	26.5447	27.542	29.383	29.0213	30.1188	31.354	30.1962	31.5489
$\sigma=35$	17.2473	25.2485	26.5652	27.9971	27.5603	28.6268	29.852	28.707	30.1023
$\sigma=45$	15.0644	24.2453	25.873	26.997	26.533	27.538	28.7225	27.6274	29.0004

同“树枝上”(可近似认为),即小波系数上下尺度间父子关系更明确,这样使我们提出尺度间模型的假设条件成立。由此本文所提出的统计混合模型更适合于 CWT 变换域。通过数值实验结果也可看出 CMixShrink 方法降噪效果最好。

### 参 考 文 献

- [1] Chang S, Yu B, Vetterli M. Adaptive wavelet thresholding for image denoising and compression. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2000, 9(9): 1532 – 1546.
- [2] Crouse M S, Nowak R D. Wavelet-based signal processing using hidden Markov models. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1998, 46(4): 886 – 902.
- [3] Lewis A S, Knowles G. Image compressing using the 2-d wavelet transform. *IEEE Trans. on Image Processing*, 1992, 1(2): 224 – 250.
- [4] Liu J, Moulin P. Information-theoretic analysis of interscale and intrascale dependencies between image wavelet coefficients. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2001, 10(11): 1647 – 1658.
- [5] Simoncelli E P, Adelson E H. Noise removal via Bayesian wavelet coring. In Proc. IEEE Int. Conf. on Image Processing, Lausanne, Switzerland, 1996, 1: 379 – 382.
- [6] Donoho D L, Johnstone I M. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage. *Biometrika*, 1994, 81(3): 425 – 455.
- [7] Donoho D L, Johnstone I M. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage. *Journal of American Statistical Assoc.*, 1995, 90(432): 1200 – 1224.
- [8] Romberg J K, Choi H, Baraniuk R G. Hidden Markov tree modeling of complex wavelet transforms. In Proc. IEEE ICASSP '00, Istanbul, Turkey, 2000: 674 – 693.
- [9] Kingsbury N G. The dual-tree complex wavelet transform: a new efficient tool for image restoration and enhancement. In Proc. EUSIPCO 98, Island of Rhodes, Greek, 1998: 319 – 322.
- [10] Kingsbury N G. A dual-tree complex wavelet transform with improved orthogonality and symmetry properties. In Proc. IEEE Int. Conf. on Image Processing, Vancouver, Canada, 2000, 2: 375 – 378.
- [11] Sendur I, Selesnick I W. Bivariate shrinkage function for wavelet-based denoising exploiting interscale dependency. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2002, 50(11): 2744 – 2756.

易 翔: 男, 1975 年生, 博士生, 研究方向为信号与图像处理、信息隐藏、数字水印、信道编码、计算机仿真等。

王蔚然: 女, 1939 年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为信息获取、传输、处理与多媒体界面、激光成像系统与技术、信息安全、分布式防火墙等。