多 h CPFSK 信号的最小平方欧氏距离

何　平
（西安电子科技大学信息工程系　西安　710071）

摘要　本文详细讨论了二进制多 h 连续相位移频键控(CPFSK) 信号的最小平方欧几里德距离(MSED),提出了决定 MSED 的信号隔离度的概念. 为了获得最大的 MSED,则应使信号隔离度 N_f 尽可能大，所以本文在理论上系统地推导了信号隔离度取最大值时所应满足的充分和必要条件. 最后，本文还讨论并给出了 2-h CPFSK 信号的隔离度及其 MSED 的精确求解公式.

关键词　最小平方欧几里德距离,信号隔离度,多 h 相位编码,调制指数

1 引　言

连续相位移频键控（CPFSK）已在各种通信系统中得到了广泛的应用,其中,多 h 相位编码则因其能得到最大的最小平方欧几里德距离（MSED）而得到极大的重视. 目前许多文献[1-4]分析了各种多 h 编码方案及其最佳取值，本文则在理论上讨论了二进制多 h CPFSK 信号的 MSED 的最佳化问题.

二进制 CPFSK 信号的一般形式为

$$s(t, a) = \sqrt{2E_b/T}\cos[2\pi f_c t + \varphi(t,a)]; \tag{1}$$

$$\varphi(t, a) = 2\pi h_n a_n \int_{nT}^{t} g(t-nT)\mathrm{d}t + \varphi_n,\ nT \leqslant t \leqslant (n+1)T; \tag{2}$$

其中 E_b 为比特能量；T 为比特间隔；f_c 为载频；h_n 为调制指数；$a=\{a_n\}$ 为信号序列，$a_n=\pm 1$;$g(t)$ 为频率脉冲,一般 $g(t)$为矩形,即

$$g(t) = \begin{cases} 1/(2T), & 0 \leqslant t \leqslant T; \\ 0, & \text{其它 } t. \end{cases} \tag{3}$$

此时

$$\varphi(t,a) = (\pi a_n h_n/T)(t-nT) + \varphi_n,\quad nT \leqslant t \leqslant (n+1)T. \tag{4}$$

由于 CPFSK 信号的相位连续性导致了信号的相位具有很强的相关性，故而在接收端可采用 Viterbi 算法进行最大似然译码. 在加性白高斯噪声（AWGN）信道中,当接收信噪比较高时,误码率 P_e 的近似公式为[1]

$$P_e \approx Q(\sqrt{d_{\min}^2 E_b/N_0}), \tag{5}$$

1992-11-09 收到,1993-03-29 定稿

何　平　男,1962 年生，博士生,讲师,现从事数字通信方面(数字调制和解调、自适应信号检测、编码、短波通信和卫星通信)的教学和研究工作.

$$Q(x) \triangleq \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-t^2/2)\mathrm{d}t, \tag{6}$$

$d^2_{\min}$ 为归一化 MSED，N_0 为加性白高斯噪声的单边功率谱密度。显然 $d^2_{\min}$ 越大，P_e 越小，故应使 $d^2_{\min}$ 尽可能大。

2 最小平方欧氏距离

任两个信号 $s(t,a)$ 和 $s(t,b)$间的平方欧几里德距离（SED）的定义为

$$D^2(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} [s(t,a) - s(t,b)]^2 \mathrm{d}t. \tag{7}$$

将(1)式和(4)式代入上式可求得

$$D^2(a,b) = \sum_{m=1}^{N} D^2_m(a,b); \tag{8}$$

$$D^2_m(a,b) = \begin{cases} 2E_b \left[1 - \dfrac{\sin\left(\pi \sum\limits_{i=1}^{m} e_{n+i}h_{n+i}\right) - \sin\left(\pi \sum\limits_{i=1}^{m-1} e_{n+i}h_{n+i}\right)}{\pi e_{n+m}h_{n+m}}\right], & e_{n+m} \neq 0; \\ 2E_b \left[1 - \cos\left(\pi \sum\limits_{i=1}^{m-1} e_{n+i}h_{n+i}\right)\right], & e_{n+m} = 0; \end{cases} \tag{9}$$

$$e_{n+m} = a_{n+m} - b_{n+m}. \tag{10}$$

上式表示信号序列 $a=\{a_n\}$ 和 $b=\{b_n\}$ 是一对长为N的节点差错序列，即 a 和 b 于 $t=nT$ 时刻相位路径分开；在经历了N个码元后又于 $t=(n+N)T$ 时刻第一次重合。归一化最小 MSED 为

$$d^2_{\min} = \min_{a\neq b}[D^2(a,b)/(2E_b)] = D^2_{\min}/(2E_b). \tag{11}$$

定义 1 任两个信号 $s(t,a)$ 和 $s(t,b)$的隔离度 $N_t(a,b)$ 定义为

$$N_t(a,b) = \min_n N_n(a,b), \quad (n \text{ 为正整数}), \tag{12}$$

其中 $N_n(a,b)$ 为某一时刻 $t=nT$ 时的相位未合并路径的码元间隔数，即若 $s(t,a)$ 和 $s(t,b)$ 在 $t=(n+i)T$ 时刻的相位差为

$$\Delta\varphi_i = \varphi[(n+i)T, a] - \varphi[(n+i)T, b], \tag{13}$$

则 $N_n(a,b)$ 为满足条件

$$\Delta\varphi_0 = \Delta\varphi_N = 0, \ (\text{模 } 2\pi), \tag{14}$$

$$\Delta\varphi_i \neq 0, \quad (\text{模 } 2\pi), \ (i = 1,2,\cdots,N-1) \tag{15}$$

的N。

定义 2 多 h CPFSK 信号的隔离度 N_t 定义为

$$N_t = \min_{a\neq b} N_t(a,b). \tag{16}$$

由 MSED 的求解公式(8)式至(11)式可见，$d^2_{\min}$ 的值受 N_t 和调制指数 h_n 的影响。(8)式中，$N \geqslant N_t$。显然要使 $d^2_{\min}$ 尽可能大，首先应使 N_t 尽可能大；然后再适当选择 h_n，使 $d^2_{\min}$ 最佳。对调制指数 h_n 为恒定常数的 CPFSK 信号，如 MSK，容易发现当 h_n

不为整数时 $N_t = 2$。而对多 h CPFSK 信号，调制指数 h_n 则为多个值；一般在 k 个不同的数值 $(h_{01}, h_{02}, \cdots, h_{0k})$ 中循环取值，即若在 nT 时刻后有

$$h_n = h_{01}, \tag{17}$$

则在 $(n+i)T$ 时刻后有

$$h_{n+i} = h_{0i+1}, \quad (i = 1, 2, \cdots, k-1), \tag{18}$$

并且

$$h_{n+mk+i} = h_{n+i}, \tag{19}$$

其中 k 称为循环周期，一般取 2, 3, 4 这几个整数，n 和 m 均为整数。

定理 1　如多 h CPFSK 信号的调制指数 h_n 的循环周期为 k，则信号隔离度 $N_t \leqslant k+1$。

证明　不失一般性，假设在 $t = nT$ 时刻，信号 $s(t, a)$ 和 $s(t, b)$ 的相位差为 0，即

$$\Delta\varphi_0 = \varphi(nT, a) - \varphi(nT, b) = 0, \tag{20}$$

并且有 $h_n = h_{01}$，则在 $t = (n+i)T$ 时刻，利用(13)式和(4)式可得

$$\Delta\varphi_i = \sum_{m=0}^{i-1} \pi e_{n+m} h_{n+m}, \ (i = 1, 2, \cdots). \tag{21}$$

由(17)～(19)式，上式变为

$$\Delta\varphi_i = \sum_{m=0}^{i-1} \pi e_{n+m} h_{0m+1}, \ (i \leqslant k), \tag{22}$$

其中 $e_{n+m} = a_{n+m} - b_{n+m}$。而当 $i = k+1$ 时，

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_{k+1} &= \sum_{m=0}^{k} \pi e_{n+m} h_{n+m} = \sum_{m=0}^{k-1} \pi e_{n+m} h_{n+m} + \pi e_{n+k} h_{n+k} \\ &= \sum_{m=0}^{k-1} \pi e_{n+m} h_{0m+1} + \pi e_{n+k} h_n \\ &= \sum_{m=0}^{k-1} \pi e_{n+m} h_{0m+1} + \pi e_{n+k} h_{01}. \end{aligned} \tag{23}$$

由 N_t 的定义，设信号 $s(t, a)$ 和 $s(t, b)$ 满足

$$a_n - b_n = b_{n+k} - a_{n+k}, \tag{24}$$

$$a_{n+m} - b_{n+m} = 0, \ (m = 1, 2, \cdots, k-1), \tag{25}$$

则

$$\Delta\varphi_{k+1} = \pi e_n h_{01} + \pi e_{n+k} h_{01} = 0. \tag{26}$$

因(26)式对任意的调制指数组合 $(h_{01}, h_{02}, \cdots, h_{0k})$ 均成立，所以必有 $N_t \leqslant k+1$。

定理 2　对循环周期为 k 的多 h CPFSK 信号，隔离度 $N_t = k+1$ 的充分和必要条件为任给一组不全为零的 $\{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_k);\ \varepsilon_i = 0, \pm 2,\ i = 1, 2, \cdots, k\}$，有

$$\sum_{i=1}^{k} \pi \varepsilon_i h_{0i} \neq 0, \ (\text{模 } 2\pi). \tag{27}$$

证明　首先证明充分性，用反证法。假设任给一组不全为 0 的 $\{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_k);\ \varepsilon_i = 0, \pm 2,\ i = 1, 2, \cdots, k\}$，有(27)式成立，且 $N_t < k+1$，则由定义 1 和定义 2 可知，

信号 $s(t,a)$ 和 $s(t,b)$ 由(13)式确定的相位差 $\Delta\varphi_i$ 满足

$$\Delta\varphi_0 = \Delta\varphi_{N_s} = 0.$$

由(4)式有

$$\sum_{m=0}^{N_s-1} \pi e_{n+m} h_{n+m} = 0,\ (\text{模 } 2\pi), \tag{28}$$

e_{n+m} 仍由(10)式确定．不失一般性，仍设

$$h_n = h_{01},$$

则上式可变为

$$\sum_{m=0}^{N_s-1} \pi e_{n+m} h_{0m+1} = 0,\ (\text{模 } 2\pi), \tag{29}$$

并且

$$\sum_{m=0}^{i} \pi e_{n+m} h_{0m+1} \neq 0,\ (\text{模 } 2\pi),\ i = 0,1,\cdots,N_s - 2. \tag{30}$$

所以必有 $e_n \neq 0$ 和 $e_{n+N_s-1} \neq 0$ (模 2π)，显然 $e_{n+m} = 0$ 或 ± 2．令 $\varepsilon_1 = e_n, \varepsilon_2 = e_{n+1}, \cdots, \varepsilon_{N_s} = e_{n+N_s-1}$，且 $\varepsilon_{N_s+1} = \varepsilon_{N_s+2} = \cdots = \varepsilon_k = 0$，可见存在一组不全为零的 $\{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_k);\ \varepsilon_i = 0, \pm 2,\ i = 1,2,\cdots,k\}$，使

$$\sum_{m=1}^{k} \pi\varepsilon_m h_{0m} = 0,\ (\text{模 } 2\pi) \tag{31}$$

成立，与假设矛盾，故必有 $N_s = k + 1$．

必要性的证明完全可类似得到，不再重复．

以上的讨论对多 h 相位编码的调制指数 $(h_{01}, h_{02}, \cdots, h_{0k})$ 的取值范围无限制．理论上，$h_{0i}(i = 1,2,\cdots,k)$ 可取任意互不相同的正数，但在多 h 相位编码中，接收端 Viterbi 译码算法的复杂度随相位状态数成线性增长关系，若 h_{0i} 为无理数时，其相位状态数将为无限大．所以实际上，通常选取 h_{0i} 为有理数，即

$$h_{0i} = p_i/q,\ (i = 1,2,\cdots,k), \tag{32}$$

q 和 p_i 均为正整数．同时考虑到频带利用率，还限制

$$h_{0i} < 1,\ (i = 1,2,\cdots,k). \tag{33}$$

3 2-h CPFSK 信号的隔离度和 MSED $d^2_{\min}$

当 $k = 2$ 时，h_n 仅在两个值 (h_{01}, h_{02}) 中循环取值，由定理1、定理2和条件(33)式，容易分析出信号的隔离度 N_s 满足

$$2 \leqslant N_s \leqslant 3. \tag{34}$$

此时，对 2-h CPFSK 信号可得如下推论

推论1 2-h CPFSK 信号隔离度 $N_s = 3$ 的充分和必要条件为

$$h_{01} + h_{02} \neq 1, \tag{35}$$

其中 $h_{0i} < 1,\ (i = 1,2)$.

由推论 1 和公式(7)～(11)式，可求出 2-h CPFSK 信号的 MSED，式中 $N \geqslant N_t = 3$. 显然要精确给出 MSED 的严格数学表达式很困难，因为这需验证所有间隔为 $N \geqslant N_t$ 的可能的相位未合并路径的局部 MSED，这是一个非常繁琐的工作. 对二进制 2-h CPFSK 信号和 $N_t = 3$ 时，通过验证发现，当 h_{01} 和 h_{02} 在(0.5，0.65)间取值时，由 $N = 4$ 所得的局部 MSED 小于 $N = N_t = 3$ 时的局部 MSED；而当 h_{01} 在 0.5 附近，h_{02} 在 0.715 附近取值(反之亦然)时，才可能使 $N = 5$ 的局部 MSED 小于 $N = 3$ 的局部 MSED. 当 $N = 6$ 时，验证发现，无论 h_{01} 和 h_{02} 为何值，所求的局部 MSED 均大于 $N \leqslant 5$ 时的局部 MSED. 同样可对 $N \geqslant 7$ 的情况作出类似的验证，故而可得如下结论.

推论 2　信号隔离度 $N_t = 3$ 时的 2-h CPFSK 信号的 MSED 由 $N \leqslant 5$ 的相位未合并路径所得的局部 MSED 确定，即若

$$D_N^2 = \min_{a \neq b}\left\{\sum_{m=1}^{N} D_m^2(a,b)\right\},\ N = 3,4,5 \tag{36}$$

为局部 MSED，则

$$D_{\min}^2 = \min_N \{D_N^2\},\ N = 3,4,5, \tag{37}$$

其中 D_N^2 由(8)～(10)式给出. 归一化 MSED $d_{\min}^2$，则得

$$d_{\min}^2 = \min_N \{d_N^2\},\quad N = 3,4,5; \tag{38}$$

$$d_N^2 = D_N^2/(2E_b); \tag{39}$$

d_N^2 为归一化局部 MSED. 公式中，$d_{\min}^2$ 和 d_N^2 均为调制指数 h_{01} 和 h_{02} 的函数.

由上述分析可知，2-h CPFSK 信号的 MSED 主要由 $N = N_t = 3$ 的局部 MSED 确定，故有必要给出 $N = 3$ 时 d_3^2 的计算公式. 显然造成 $N = 3$ 的 (h_{01}, h_{02}) 组合有多种，其结论如下：

(1) 当 $2h_{01} \pm h_{02}$ 和 $2h_{02} \pm h_{01}$ 均不为整数时，

$$\begin{aligned} d_3^2 = \min\Big\{ & 2\left[1 - \frac{\sin(2\pi h_{01})}{2\pi h_{01}}\right] + \left[1 - \cos(2\pi h_{01})\right], \\ & 2\left[1 - \frac{\sin(2\pi h_{02})}{2\pi h_{02}}\right] + [1 - (\cos(2\pi h_{02})]\Big\}; \end{aligned} \tag{40}$$

(2) 仅当 $2h_{01} \pm h_{02}$ 为整数时，

$$\begin{aligned} d_3^2 = \min\Big\{ & 2\left[1 - \frac{\sin(2\pi h_{01})}{2\pi h_{01}}\right] + \min\left[(1 - \cos(2\pi h_{01})), \left(1 \pm \frac{2\sin(2\pi h_{01})}{2\pi h_{02}}\right)\right], \\ & 2\left[1 - \frac{\sin(2\pi h_{02})}{2\pi h_{02}}\right] + [1 - \cos(2\pi h_{02})]\Big\}; \end{aligned} \tag{41}$$

(3) 仅当 $2h_{02} \pm h_{01}$ 为整数时，

$$\begin{aligned} d_3^2 = \min\Big\{ & 2\left[1 - \frac{\sin(2\pi h_{01})}{2\pi h_{01}}\right] + [1 - \cos(2\pi h_{01})], 2\left[1 - \frac{\sin(2\pi h_{02})}{2\pi h_{02}}\right] \\ & + \min\left[(1 - \cos(2\pi h_{02}), \left(1 \pm \frac{2\sin(2\pi h_{02})}{2\pi h_{01}}\right)\right]\Big\}; \end{aligned} \tag{42}$$

$2h_{01} \pm h_{02}$ 和 $2h_{02} \pm h_{01}$ 仅在个别取值点上才可能同时为整数，故略.

由(40)～(42)式可见,d_3^2中项$2[1-\sin(2\pi h_{0i})/(2\pi h_{0i})]+[1-\cos(2\pi h_{0i})]$,$(i=1,2)$占很重要的地位;$2h_{01}\pm h_{02}$和$2h_{02}\pm h_{01}$为整数仅会使$N=3$的局部 MSED 下降,故应设法避免;同时还应合理选择h_{01}和h_{02},使d_3^2尽可能大. 当然,要使$d_{\min}^2$尽可能大,还需使d_4^2和d_5^2同时尽可能大.

以上对信号隔离度$N_t=3$时 2-h CPFSK 信号的 MSED 作了分析,并给出了部分公式. 而对$N_t=2$的情况,不难由推论1得出如下结论.

推论3 2-h CPFSK 信号隔离度$N_t=2$的充分和必要条件为

$$h_{01}+h_{02}=1, \tag{43}$$

$h_{01}<1$, $h_{02}<1$. 且其 MSED 为

$$d_{\min}^2=\min\left\{\left[1-\frac{\sin(2\pi h_{01})}{2\pi h_{01}}\right]+\left[1-\frac{\sin(2\pi h_{02})}{2\pi h_{02}}\right],2\left[1-\frac{\sin(2\pi h_{01})}{2\pi h_{01}}\right]\right.$$
$$\left.+[1-\cos(2\pi h_{01})],\ 2\left[1-\frac{\sin(2\pi h_{02})}{2\pi h_{02}}\right]+[1-\cos(2\pi h_{02})]\right\}. \tag{44}$$

此推论中(43)式是显然的,且(44)式的验证也较容易,故在此不作详细推导.

4 应用举例

多 h CPFSK 信号的 MSED 是确定其误码性能的一个重要参数. 由前面的分析研究可知, MSED 是调制指数h_n和隔离度N_t的函数. 对二进制 2-h CPFSK 信号, 前面已讨论了N_t的取值,并给出了 MSED 的计算公式; 下面结合具体调制指数组合(h_{01}, h_{02}),来说明上述公式的应用.

例 假设调制指数为$h_{01}=4/9$,$h_{02}=6/9$, 因$h_{01}+h_{02}=10/9$, 由推论1可得$N_t=3$,其归一化 MSED 为

$$d_{\min}^2=\min\{d_3^2,\ d_4^2,\ d_5^2\}.$$

因$2h_{01}\pm h_{02}$和$2h_{02}\pm h_{01}$均不为整数,所以由(40)式可计算得

$$d_3^2=\min\{3.69,\ 3.91\}=3.69.$$

仔细分析二进制 2-h CPFSK 信号的相位树可知,仅当信号差e_{n+m}满足$e_n=-e_{n+2}$, $e_{n+1}=-e_{n+3}$或$2h_{01}\pm 2h_{02}$为整数时,才有$N=4$的相位未合并路径, 由所设调制指数已知$2h_{01}\pm 2h_{02}$不为整数,故$N=4$的局部 MSED 为

$$d_4^2=\min\left\{\left[1-\frac{\sin(2\pi h_{01})}{2\pi h_{01}}\right]+\left[1-\frac{\sin(2\pi h_{02})}{2\pi h_{02}}\right]\right.$$
$$+\left[1-\frac{\sin[2\pi(h_{01}\pm h_{02})]-\sin(2\pi h_{01})}{\pm 2\pi h_{02}}\right]$$
$$\left.+\left[1-\frac{\sin[2\pi(h_{01}\pm h_{02})]\mp\sin(2\pi h_{02})}{2\pi h_{01}}\right]\right\}$$
$$=\min\{3.47,4.43\}=3.47.$$

$N=5$的局部 MSED d_5^2经验证大于d_3^2和d_4^2中的最小值,所以归一化 MSED 为

$$d_{\min}^2=\min\{d_3^2,\ d_4^2\}=\min\{3.69,3.47\}=3.47.$$

理论分析可知 MSK 的信号隔离度 $N_t=2$，且归一化 MSED 为 $d^2_{MSK}=2.0$。与上述二进制 2-h CPFSK 信号的 d^2_{min} 相比较可见，d^2_{min} 为 d^2_{MSK} 的 1.735 倍。由(5)，(6)式可知，这相当于 2-h CPFSK 信号的接收信噪比为 MSK 信号的 1.735 倍（约增加了 2.39 dB），显然误码性能大为提高。

若例中调制指数 $h_{02}=5/9$，而 h_{01} 不变，则因 $h_{01}+h_{02}=1$，由推论 3 可得 $N_t=2$，其归一化 MSED 可由(44)式计算得

$$d^2_{min}=\min\{1.98,3.69,4.14\}=1.98.$$

此时 d^2_{min} 与 d^2_{MSK} 近似相等，这不难理解，因二者的 N_t 均为 2。

通过以上例子可见，信号隔离度 N_t 不同时，所计算的 d^2_{min} 相差很大。显然 N_t 应越大越好，当然还应合理选择调制指数的值。

5 结　论

本文引入了多 h CPFSK 信号隔离度 N_t 的概念。经分析表明，当隔离度 N_t 较大时，可使信号的 MSED 尽可能大。针对二进制 2-h CPFSK 信号，本文详细讨论并验证了 $N_t=3$ 时的 MSED 由 $N\leqslant 5$ 的局部 MSED 确定，并给出了 $N_t=2$ 时 MSED 的精确求解公式。由于 2-h CPFSK 是常用的信号，为此本文通过具体举例，给出了应用以上理论和公式的计算过程。结果表明，上述理论和计算公式对 MSED d^2_{min} 的计算和调制指数的最佳选择具有重要的指导意义。

参　考　文　献

[1] Aulin T, Sundberg C E. IEEE Trans. on COM, 1981, COM-29(3): 196—209.
[2] Anderson J B, Taylor D P. IEEE Trans. on IT, 1978, IT-24(6): 703—712.
[3] Aulin T, Sundberg C E. IEEE Trans. on COM, 1982, COM-30(7): 1721—1729.
[4] Holubowicz W. IEEE Trans. on COM, 1990, COM-38(11): 1929—1931.

THE MINIMUM SQUARED EUCLIDEAN DISTANCE OF MULTI-*h* CPFSK SIGNAL

He Ping
(*Xidian University, Xi'an* 710071)

Abstract The minimum squared Euclidean distance (MSED) of 2-ary multi-h continuous-phase frequency-shift keying (CPFSK) signal is presented. The signal segregation degree (SSD) has been put forward to determine MSED of CPFSK. In order to maximizing MSED, SSD should be as large as possible. The full and essential conditions of maximizing SSD N_t are derived. Finally, SSD N_t and the exact formulae for the MSED of 2-ary 2-h CPFSK are also presented.

Key words Minimum squared Euclidean distance, Signal segregation degree, Multi-h phase codes, Modulation index