第9卷 第2期
1987 年 3 月

电子科学学刊
JOURNAL OF ELECTRONICS

Vol. 9, No. 2
Mar., 1987

在有色高斯噪声中离散时间检测和估计的性能分析*

刘 渝
(南京航空学院电子工程系)

提 要

本文研究了在确定的观察时间内，在有色高斯噪声中离散时间检测和估计的性能与样本数之间的关系. 指出相邻样本之间相关系数在 0.1—0.2 范围内,广义信噪比就能相当接近极限值 $S^2(T)$. 在讨论二阶相关噪声时指出，由二阶微分方程描写的高斯过程的样本序列一般不是 AR(2) 模型,但是当样本间隔$\Delta\to 0$时,却可用 AR(2) 模型近似描写序列,因此求极限信噪比时,可以较简便地采用 AR(2) 模型. 最后指出最大似然估计与似然比检验之间和两者的性能测度之间的联系.

在有色高斯噪声中进行信号检测或参数估计，在理论上用卡享南一洛维级数展开已圆满解决,但在具体实现时却异常困难,需要解积分方程. 本文从离散角度考虑相应的检测和估计,并进行了性能分析.

在处理实际问题时,对信号的观察时间总是有限的,因此我们对测量的信号进行处理时,由于存在噪声干扰,性能也是有极限的，不可能无限精确. 对一个实际的连续过程进行采样,总涉及到采样时间间隔,也就是在测量时间T内总共采多少个样本? 显然样本越多检测和估计的性能越好,然而本文感兴趣的是能否在保持一定的性能前提下,样本尽可能少,从而使处理变得简单.

(一)

考虑如下假设检验

$$\left.\begin{aligned} H_0&: x_i = n_i, i = 1, 2, \cdots, L, \\ H_1&: x_i = \theta s_i + n_i, \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

其中 s_i 是确定的信号样本; θ 是对信号的加权,现假定 $\theta = 1$，仍不失一般性. n_i 是一个平稳高斯过程的样本，$E(n_i) = 0$，$E(n_i^2) = \sigma_n^2$.

对于 (1) 式定义的检测问题,相应的最佳检测器的检验统计量

$$T(\boldsymbol{X}_L) = \boldsymbol{S}_L^T R_L^{-1} \boldsymbol{X}_L, \tag{2}$$

* 1985 年 4 月 4 日收到, 1985 年 9 月 23 日修改定稿.

其中 $\boldsymbol{X}_L=(x_1, x_2, \cdots, x_L)^T$, $\boldsymbol{S}_L=(s_1, s_2, \cdots, s_L)^T$, R_L 是噪声序列 $(n_1, n_2, \cdots, n_L)$ 的协方差矩阵.

现定义广义信噪比 $S^2[T(\boldsymbol{X}_L)]$（下简称信噪比）

$$S^2[T(\boldsymbol{X}_L)]=\frac{\{E_1[T(\boldsymbol{X}_L)]-E_0[T(\boldsymbol{X}_L)]\}^2}{D_0[T(\boldsymbol{X}_L)]}$$

$$=\boldsymbol{S}_L^T R_L^{-1}\boldsymbol{S}_L. \tag{3}$$

定理1 原来有 L_1 个样本，现又增加 L_2 个样本，那么 $S^2[T(\boldsymbol{X}_{L_1+L_2})]\geqslant S^2[T(\boldsymbol{X}_{L_1})]$. 当且仅当 $\boldsymbol{S}_{L_2}=R_{21}R_{11}^{-1}\boldsymbol{S}_{L_1}$ 时，等式成立.

证明

$$R_{L_1+L_2}^{-1}=\begin{pmatrix}R_{11} & R_{12}\\ R_{21} & R_{22}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}R_{11}^{-1}+R_{11}^{-1}R_{21}^T\tilde{R}_{22}^{-1}R_{21}R_{11}^{-1} & -R_{11}^{-1}R_{21}^T\tilde{R}_{22}^{-1}\\ -\tilde{R}_{22}^{-1}R_{21}R_{11}^{-1} & \tilde{R}_{22}^{-1}\end{pmatrix},$$

其中 $\tilde{R}_{22}=R_{22}-R_{21}R_{11}^{-1}R_{12}$, $R_{11}=R_{L_1}$, $R_{22}=R_{L_2}$.

那么

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}_{L_1+L_2}^T R_{L_1+L_2}^{-1}\boldsymbol{S}_{L_1+L_2}&=\boldsymbol{S}_{L_1}^T R_{11}^{-1}\boldsymbol{S}_{L_1}+\boldsymbol{S}_{L_1}^T R_{11}^{-1}R_{21}^T\tilde{R}_{22}^{-1}R_{21}R_{11}^{-1}\boldsymbol{S}_{L_1}\\&\quad-\boldsymbol{S}_{L_1}^T R_{11}^{-1}R_{21}^T\tilde{R}_{22}^{-1}\boldsymbol{S}_{L_2}-\boldsymbol{S}_{L_2}^T\tilde{R}_{22}^{-1}R_{21}R_{11}^{-1}\boldsymbol{S}_{L_1}+\boldsymbol{S}_{L_2}^T\tilde{R}_{22}^{-1}\boldsymbol{S}_{L_2}\\&=\boldsymbol{S}_{L_1}^T R_{11}^{-1}\boldsymbol{S}_{L_1}+(R_{21}R_{11}^{-1}\boldsymbol{S}_{L_1}-\boldsymbol{S}_{L_2})^T\tilde{R}_{22}^{-1}(R_{21}R_{11}^{-1}\boldsymbol{S}_{L_1}-\boldsymbol{S}_{L_2})\\&\geqslant\boldsymbol{S}_{L_1}R_{11}^{-1}\boldsymbol{S}_{L_1}.\qquad(\text{因 }\tilde{R}_{22}^{-1}\text{ 是正定阵.})\end{aligned}$$

显然当且仅当 $\boldsymbol{S}_{L_2}=R_{21}R_{11}^{-1}\boldsymbol{S}_{L_1}$ 时等式成立.

人们自然会关心，在确定的观察时间 T 内，广义信噪比是否会随着样本数的无限增加而无限增大？如不是，那么在 T 时间内取多少个样本较为合适？下面我们对几种典型噪声过程进行讨论.

（二）

假如(1)式中的噪声序列 $\{n_i\}$ 可用自回归模型 AR(p) 描写，即

$$n_t-\phi_1 n_{t-1}-\cdots-\phi_p n_{t-p}=a_t, \tag{4}$$

其中 $\{a_t\}$ 是 *i.i.d.* 高斯序列，$E(a_t)=0$, $D(a_t)=\sigma_a^2$. 那么在 H_0 假设下，似然函数 $\Lambda_0(\sigma_a^2; \phi_1, \cdots\phi_p; \boldsymbol{X}_L)$（下面简写成 Λ_0）等于

$$\Lambda_0=(2\pi\sigma_a^2)^{-\frac{1}{2}}(\det M_p)^{\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_a^2}\left[\boldsymbol{X}_p^T M_p\boldsymbol{X}_p+\sum_{t=p+1}^{L}a_t^2\right]\right\}\cdots, \tag{5}$$

其中

$$M_p^{-1}=E(\boldsymbol{X}_p\boldsymbol{X}_p^T)/\sigma_a^2, \tag{6}$$

$$L\geqslant p.$$

在 H_1 假设下，似然函数 Λ_1 等于

$$\begin{aligned}\Lambda_1=(2\pi\sigma_a^2)^{-\frac{L}{2}}(\det M_p)^{\frac{1}{2}}\exp\Bigg\{-\frac{1}{2\sigma_a^2}\Bigg[&\sum_{t=p+1}^{L}\Big(-\sum_{i=0}^{p}\phi_i(x_{t-i}-S_{t-i})\Big)^2\\&+(\boldsymbol{X}_p-\boldsymbol{S}_p)^T M_p(\boldsymbol{X}_p-\boldsymbol{S}_p)\Bigg]\Bigg\},\end{aligned} \tag{7}$$

其中 $\phi_0=-1$.

于是可求出相应的似然比检验统计量 $T(\boldsymbol{X}_L)$,

$$T(\boldsymbol{X}_L)=\boldsymbol{S}_p^T M_p \boldsymbol{X}_p+\sum_{t=p+1}^{L}\left(\sum_{j=0}^{p}\phi_j s_{t-j}\right)\left(\sum_{j=0}^{p}\phi_j x_{t-j}\right). \tag{8}$$

广义信噪比为

$$\begin{aligned}S^2[T(\boldsymbol{X}_L)]&=\frac{1}{\sigma_a^2}\left[\boldsymbol{S}_p^T M_p \boldsymbol{S}_p+\sum_{t=p+1}^{L}\left(\sum_{j=0}^{p}\phi_j S_{t-j}\right)^2\right]\\&=\frac{1}{\left(-\sum_{j=0}^{p}\phi_j\rho_j\right)\sigma_n^2}\left[\boldsymbol{S}_p^T M_p \boldsymbol{S}_p+\sum_{t=p+1}^{L}\left(\sum_{j=0}^{p}\phi_j S_{t-j}\right)^2\right],\end{aligned} \tag{9}$$

其中 $\rho_j=E(n_t n_{t-j})/E(n_t^2)$，是序列 $\{n_j\}$ 的自相关系数.

把 (8)、(9) 式与 (2)、(3) 式相比，虽然表达形式不那么简洁，但是通常 L 比 p 大得多，而求 L 阶矩阵的逆阵却是相当繁的. 所以如果 $\{n_i\}$ 可用自回归模型描写的话，在计算时采用 (8)、(9) 式要方便得多.

(三)

噪声过程 $N(t)$ 由一阶常微分方程描写时，即

$$N'(t)+\alpha N(t)=\varepsilon(t), \tag{10}$$

其中 $\alpha>0$，$\varepsilon(t)$ 是零均值白高斯过程. 那么 $N(t)$ 是一阶高斯-马尔可夫过程，它的自相关系数为 $e^{-\alpha|\tau|}$. 由马尔可夫过程的性质知，它的任意采样序列均是一阶高斯-马尔可夫序列，因此可用一阶自回归模型描写:

$$n_i-\phi_i n_{i-1}=a_i, \tag{11}$$

其中 $\phi_i=e^{-\alpha\Delta_i}$，$\Delta_i=t_i-t_{i-1}$. $\{a_i\}$ 是独立高斯序列，如是均匀间隔采样，$\{a_i\}$ 是 $i.i.d.$，$\{n_i\}$ 是平稳时间序列，$\phi_i\equiv\phi_1=e^{-\alpha\Delta}$，$\Delta$ 是采样间隔.

所以当噪声由 (10) 式描写时，相应的检验统计量可写成下面形式:

$$T(\boldsymbol{X}_L)=s_1x_1+\sum_{i=2}^{L}\frac{1}{1-\phi_i^2}(s_i-\phi_i s_{i-1})(x_i-\phi_i x_{i-1}). \tag{12}$$

广义信噪比为

$$S^2[T(\boldsymbol{X}_L)]=\frac{1}{\sigma_n^2}\left[s_1^2+\sum_{i=2}^{L}\frac{1}{1-\phi_i^2}(s_i-\phi_i s_{i-1})^2\right]. \tag{13}$$

在观察时间 T 内增加样本，当 $L\to\infty$，$\Delta_i\to 0$，$\phi_i\approx 1-\alpha\Delta_i$，$(i=1,2,\cdots)$ 时，

$$\lim_{\substack{L\to\infty\\ \Delta i\to 0}} S^2[T(\boldsymbol{X}_L)]=S^2(T),$$

$$S^2(T)=\frac{s^2(0)}{\sigma_n^2}+\frac{1}{\sigma_n^2}\lim_{\substack{L\to\infty\\ \Delta i\to 0}}\sum_{i=2}^{L}\frac{1}{2\alpha\Delta_i}\{s_i-(1-\alpha\Delta_i)[s_i-(s_i-s_{i-1})]\}^2$$

$$= \frac{s^2(0)}{\sigma_n^2} + \frac{\alpha}{2\sigma_n^2}\int_0^T \left[s(t) + \frac{s'(t)}{\alpha}\right]^2 dt. \tag{14}$$

由定理1知对于任意 L，$S^2[T(\boldsymbol{X}_L)] < S^2(T)$. 显然 $S^2(T)$ 是观察时间T的单调增函数.

如果信号是常数,即 $s(t) \equiv s$，那么

$$S^2[T(\boldsymbol{X}_L)] = \frac{s^2}{\sigma_n^2}\left[1 + \sum_{i=2}^{L}\frac{1-\phi_i}{1+\phi_i}\right], \tag{15}$$

$$S^2(T) = \frac{s^2}{\sigma_n^2}\left(1 + \frac{\alpha T}{2}\right). \tag{16}$$

如是均匀采样间隔,那么

$$S^2[T(\boldsymbol{X}_L)] = \frac{s^2}{\sigma_n^2}\left[1 + (L-1)\frac{1-\phi_1}{1+\phi_1}\right]. \tag{17}$$

定理2 当信号是常数,样本数又确定时,均匀间隔采样,将使信噪比达到最大.

证明 设采样时刻分别是 $t_1, t_2, \cdots, t_L$, $t_L - t_1 = T$, $\prod_{i=2}^{L}\phi_i = e^{-\alpha T} = \gamma$, 由(15)式知

$$S^2[T(\boldsymbol{X}_L)] = \frac{s^2}{\sigma_n^2}\left[1 + \sum_{i=2}^{L}\frac{1-\phi_i}{1+\phi_i}\right]$$

$$= \frac{s^2}{\sigma_n^2}\left[(2-L) + \sum_{i=2}^{L}\frac{2}{1+\phi_i}\right].$$

由几何平均小于、等于算术平均可得下面不等式

$$\sum_{i=2}^{L}\frac{1}{1+\phi_i} \leqslant \sum_{i=2}^{L}\frac{1}{1+\gamma^{1/(L-1)}}. \tag{18}$$

因此均匀间隔采样将使信噪比达到最大.

对于常数信号,均匀间隔采样是最佳采样设计.

定理3 信号是常数时，在确定的观察时间T内,进行均匀间隔采样，那么信噪比是样本数L的严格增函数.

证明 因为 $\phi_1^{L-1} = e^{-\alpha T} = \gamma$，所以

$$S^2[T(\boldsymbol{X}_L)] = \frac{s^2}{\sigma_n^2}\left[1 + (L-1)\frac{1-\gamma^{1/(L-1)}}{1+\gamma^{1/(L-1)}}\right].$$

令

$$f(x) = x\frac{1-\gamma^{1/x}}{1+\gamma^{1/x}},$$

可证明 $f'(x) > 0$，所以 $f(x)$ 是严格增函数,因此

$$f(L) > f(L-1) \Rightarrow S^2[T(\boldsymbol{X}_{L+1})] > S^2[T(\boldsymbol{X}_L)].$$

从(16)式可看到，在一阶高斯-马尔可夫噪声中检测常数信号，广义信噪比的极限 $S^2(T)$ 取决于观察区间 $[0,T]$ 两端点之间的相关系数 ($\rho = e^{-\alpha T}$) 的对数.

对于时变信号，由 (14) 式可得下面表达式：

$$S^2(T)=\frac{1}{2\sigma_n^2}\left[s^2(0)+s^2(T)+\alpha\int_0^T s^2(t)dt+\frac{1}{\alpha}\int_0^T s'^2(t)dt\right].$$

如果 $[s^2(0)+s^2(T)]/2$ 不小于信号平均功率，在信号能量相同条件下，时变信号提供的信噪比将大于常数信号所提供的信噪比．尤其当信号变化率很大时，信噪比可达到很大．

我们自然要关心广义信噪比与样本数之间的关系，表 1 列出了信号是常数时 $S^2[T(X_L)]$ 与 L 之间的关系．

表 1　$S^2[T(X_L)]$ 与 L 之间的关系

γ \ L	2	4	8	16	32	64	∞
0.001	1.998	3.454	4.179	4.394	4.440	4.450	4.454
0.01	1.980	2.938	3.223	3.285	3.298	3.302	3.303
0.1	1.818	2.098	2.140	2.149	2.1512		2.1513
0.2	1.667	1.785	1.799	1.8039			1.8047
0.9	1.0476	1.05267					1.05268

注：γ 是观察区间端点之间的相关系数，L 是观察时间 T 内的均匀采样数，信号是常数，$(s^2/\sigma_n^2)=1$.

表 1 的数据告诉我们，当相邻样本的相关系数在 0.1—0.2 之间时，广义信噪比就可达到极限值的 0.85—0.925，这已相当接近极限值．也就是说如把相邻样本之间的相关系数控制在 0.1，则信噪比损失小于 1dB．因此采样点没有必要太密(相对于相关系数而言)，如果允许的观察时间足够长的话，也就是极限信噪比有富裕，那么把采样点间隔适当拉开会有好处，这能使处理简化，又能保证一定的精度．我们还应看到，工程中经常假设噪声样本之间是互相独立的，这是以牺牲信噪比为代价的．

现引入样本效率的概念：

$$\eta=S^2[T(\boldsymbol{X}_L)]/L. \tag{19}$$

显然相关越强，效率越低．因此工程上必须选择一个较合适的样本效率．

对于时变信号，由于信号可能取各种复杂形式，不可能有上面简单明瞭的关系，但常数信号的有关结论仍有参考价值．

从 (14)、(16) 式可看到，如 $T\to 0$ 时，我们在观察区间 $[0,T]$ 内只须选取一个样本即可，过多的样本所增加的信噪比将是非常小的．

（四）

现考虑噪声过程 $N(t)$ 被一个二阶常微分方程描写(下称二阶噪声)，即

$$N''(t)+\alpha_1N'(t)+\alpha_2N(t)=\varepsilon(t). \tag{20}$$

如特征方程 $z^2+\alpha_1z+\alpha_2=0$ 有相异实根 c_1、c_2，那么 $N(t)$ 的自相关系数 $\rho(\tau)$ 为：

$$\rho(\tau)=\frac{1}{c_2-c_1}\left(c_2e^{c_1|\tau|}-c_1e^{c_2|\tau|}\right). \tag{21}$$

如 c_1、c_2 均小于零，那么 $N(t)$ 是平稳过程．显然

$$c_1 + c_2 = -\alpha_1, \tag{22}$$

$$c_1 c_2 = \alpha_2. \tag{23}$$

我们知道由一阶常微分方程 (10) 式描写的随机过程是一阶马尔可夫过程，它的样本序列是 AR(1) 序列．而由 (20) 式描写的随机过程的样本序列一般不是 AR(2) 序列，下面将证明这一点，由 (21) 式知二阶噪声的样本序列的自相关系数：

$$\rho_k = \frac{1}{c_2 - c_1}(c_2 e^{c_1 k\Delta} - c_1 e^{c_2 k\Delta}) \triangleq d_1\lambda_1^k + d_2\lambda_2^k, \tag{24}$$

其中 $d_1 = \dfrac{c_2}{c_2 - c_1}$, $d_2 = -\dfrac{c_1}{c_2 - c_1}$, $\lambda_1 = e^{c_1\Delta}$, $\lambda_2 = e^{c_2\Delta}$.

定理 4 时间序列 $\{x_t\}$ 的自相关系数 $\rho_k = d_1\lambda_1^k + d_2\lambda_2^k$，它是 AR(2) 序列的充要条件是 $\rho_1 = (\lambda_1 + \lambda_2)/(1 + \lambda_1\lambda_2)$.

证明 时间序列的特征由它的自相关系数完全确定．$\{x_t\}$ 的自相关系数

$$\rho_k = d_1\lambda_1^k + d_2\lambda_2^k$$

表示它是一个 ARMA(2, 1) 序列．而 AR(2) 是 ARMA(2, 1) 的特例，即滑动平均参数 $\theta_1 = 0$, AR(2) 与 ARMA(2, 1) 的自相关系数的递推表达式的差别仅表现在 ρ_1 的表达式不一样．对于 AR(2) 模型，$\rho_1 = \phi_1\rho_0 + \phi_2\rho_1$（意味着 $\theta_1 = 0$）．所以 $\rho_1 = \phi_1/(1 - \phi_2) = \lambda_1\lambda_2/(1 + \lambda_1\lambda_2)$，必要性得证．

现在证充分性．因 $\rho_k = d_1\lambda_1^k + d_2\lambda_2^k$，所以 λ_1、λ_2 一定是序列的特征值，因此 $\lambda_1 + \lambda_2 = \phi_1$, $\lambda_1\lambda_2 = -\phi_2$．如果 $\rho_1 = (\lambda_1 + \lambda_2)/(1 + \lambda_1\lambda_2) = \phi_1/(1 - \phi_2)$，那么有 $\rho_1 = \phi_1\rho_0 + \phi_2\rho_1$．所以序列$\{x_t\}$ 是 AR(2) 模型，充分性得证．

显然 (24) 式描写的自相关系数 ρ_k，对一般的均匀采样间隔 Δ，不能保证 $\rho_1 = (\lambda_1 + \lambda_2)/(1 + \lambda_1\lambda_2)$，因此样本序列不是 AR(2)，而是 ARMA(2, 1)，所以 (11) 式中的噪声 $\{n_i\}$ 如是二阶噪声的样本序列，一般不能用 AR(2) 模型描写，相应的检验统计量和广义信噪比没有前节处理一阶噪声那么容易，要求逆矩阵 R_L^{-1}，当 L 很大时，计算很繁，因此减少测量样本数更显必要．

在观察时间 T 内，当样本数无穷增加时，极限噪声比如何求？作者发现当采样间隔 $\Delta \to 0$ 时，二阶噪声序列可近似用 AR(2) 模型描写，将 ρ_1、λ_1、λ_2 作泰勒展开，取一阶近似，便可证明 $\rho_1 \doteq (\lambda_1 + \lambda_2)/(1 + \lambda_1\lambda_2)$．相应的自回归系数：

$$\phi_1 = 2 - \alpha_1\Delta + \left(\frac{1}{2}\alpha_1^2 - \alpha_2\right)\Delta^2 + O(\Delta^3), \tag{25}$$

$$\phi_2 = -1 + \alpha_1\Delta - \frac{1}{2}\alpha_1^2\Delta^2 + O(\Delta^3). \tag{26}$$

表 2 给出了二阶噪声的样本序列的自回归系数 ϕ_1、ϕ_2 和滑动平均参数 θ_1 与采样间隔 Δ 的关系．

从表 2 可看到，当采样间隔 $\Delta \to 0$ 时，或相邻样本之间的相关系数 $\rho \to 1$ 时，二阶噪声序列相应的自回归系数 $\theta_1 \to 0$．于是序列 $\{n_i\}$ 可用 AR(2) 近似描写，给计算 $S^2(T)$

表 2(a)

$1/\Delta$	1	3	7	15	31	63	$2^{20}-1$
ρ_1	0.05	0.52	0.85	0.96	0.988	0.997	$1-10^{-11}$
ϕ_1	0.002	0.4	1.0	1.4	1.7	1.85	
$-\phi_2$	5×10^{-5}	0.04	0.24	0.51	0.72	0.85	
$-\theta_1$	8.5×10^{-4}	0.027	0.015	3.3×10^{-3}	5×10^{-4}	7×10^{-5}	$\lvert\theta_1\rvert<10^{-15}$

注: $\alpha_1=10$, $\alpha_2=24$, ρ_1 是相邻样本的自相关系数.

表 2(b)

$1/\Delta$	2	4	6	8	12	18	63	255	$2^{20}-1$
ρ_1	1.4×10^{-4}	0.02	0.094	0.2	0.4	0.61	0.96	0.996	$1-10^{-9}$
ϕ_1	0	7.3×10^{-4}	4.2×10^{-2}	0.11	0.27	0.52	1.35	1.81	
$-\phi_2$	0	0	2.4×10^{-4}	0.002	0.015	0.06	0.45	0.82	
$-\theta_1$	8×10^{-9}	1.4×10^{-4}	2.6×10^{-3}	0.009	0.023	0.028	4.8×10^{-3}	1.3×10^{-4}	2.3×10^{-15}

注: $\alpha_1=50$, $\alpha_2=600$, ρ_1 是相邻样本的自相关系数.

带来方便. 取 $p=2$, 由 (9) 式得

$$S^2[T(\boldsymbol{X}_L)]=\frac{1}{\sigma_a^2}\left[(s_1,\ s_2)\begin{pmatrix}\rho_0 & \rho_1\\ \rho_1 & \rho_0\end{pmatrix}^{-1}\frac{\sigma_a^2}{\sigma_n^2}\begin{pmatrix}s_1\\ s_2\end{pmatrix}+\sum_{t=3}^{L}(s_t-\phi_1 s_{t-1}-\phi_2 s_{t-2})^2\right].$$

因为 $\rho_1=\phi_1/(1-\phi_2)$, $\rho_2=\phi_1^2/(1-\phi_2)+\phi_2$, $\sigma_a^2=(1-\phi_1\rho_1-\phi_2\rho_2)\sigma_n^2$, 所以

$$S^2[T(\boldsymbol{X}_L)]=\frac{1-\phi_2}{(1+\phi_2)(1-\phi_1-\phi_2)(1+\phi_1-\phi_2)\sigma_n^2}\cdot\left[(1-\phi_2)^2(s_1^2+s_2^2)-2\phi_1(1+\phi_2)s_1s_2+\sum_{t=3}^{L}(s_t-\phi_1 s_{t-1}-\phi_2 s_{t-2})^2\right]. \tag{27}$$

由 (25)、(26) 式知

$$\lim_{\Delta\to0}(1+\phi_2)=\alpha_1\Delta,\quad \lim_{\Delta\to0}(1-\phi_1-\phi_2)=\alpha_2\Delta^2,$$

$$\lim_{\Delta\to0}(1-\phi_2)=2,\quad \lim_{\Delta\to0}(1+\phi_1-\phi_2)=4.$$

将上述结果代入 (27) 式,有

$$S^2(T)=\lim_{\substack{L\to\infty\\ \Delta\to0}}S^2[T(\boldsymbol{X}_L)]$$

$$=\frac{1}{\sigma_n^2}\left\{\left[s^2(0)+\frac{s'^2(0)}{\alpha_2}\right]+\frac{1}{2}\int_0^T\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left[s(t)+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}s'(t)\right]^2dt\right. \tag{28}$$

如果 $s(t)\equiv s$, 那么

$$S^2(T)=\frac{s^2}{\sigma_n^2}\left[1+\frac{\alpha_2}{2\alpha_1}T\right]. \tag{29}$$

表3给出了在二阶噪声中检测常数信号时，广义信噪比与样本数之间的关系.

表 3(a)

L	ρ_1	ρ_2	ϕ_1	$-\phi_2$	$S^2[T(\boldsymbol{X}_L)]$
2	0.050		0.021	4.5×10^{-5}	1.905
3	0.306	0.050	0.185	0.0067	2.116
4	0.520	0.172	0.399	0.0357	2.123
5	0.657	0.306	0.591	0.0821	2.187
∞					2.2

注: $\alpha_1=10$, $\alpha_2=24$, $T=1$, $S^2(T)=2.2$.

表3 (b)

L	ρ_1	ρ_2	ϕ_1	$-\phi_2$	$S^2[T(\boldsymbol{X}_L)]$
5	0.019	1.4×10^{-4}	0.0073	3.7×10^{-6}	4.85
7	0.094	0.0037	0.042	2.4×10^{-4}	6.01
9	0.20	0.019	0.11	0.0019	6.53
16	0.52	0.17	0.40	0.036	6.96
∞					7

注: $\alpha_1=50$, $\alpha_2=600$, $T=1$, $S^2(T)=7$.

从表3可看到与在一阶噪声中一样，一般相邻样本之间的相关系数在0.1—0.2范围，就能保证信噪比达到极限信噪比的0.8—0.9，也就是说至多损失0.5—1dB信噪比.

综合表2、表3的数据，还可看到，如信噪比富裕的话，可增大样本间隔，于是ϕ_1、ϕ_2和θ_1都很小，因此$\{n_i\}$可近似为AR(1)或统计独立模型，给处理带来方便.

从(28)式可看到，当$T\to0$时，在观察区间$[0,T]$内，只需取两个样本，而当信号的变化速率相对于噪声带宽很小时，只需一个样本就可. 显然这些结论对信号设计和样本设计都有参考价值.

(五)

前面讨论了在确定的观察时间T内，在有色高斯噪声中检测信号，广义信噪比与采样数之间的关系，现在我们考虑如下的参数估计问题:

$$x_i=\theta s_i+n_i,\quad i=1,2,\cdots,L, \tag{30}$$

其中θ是待估参数，s_i是确知的信号，$\{n_i\}$是平稳高斯序列，$E(n_i)=0$. 似然函数为

$$\Lambda(\boldsymbol{X}_L|\theta)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{L}{2}}|R_L|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{X}_L-\theta\boldsymbol{S}_L)^T R_L^{-1}(\boldsymbol{X}_L-\theta\boldsymbol{S}_L)\right\}. \tag{31}$$

参数θ的最大似然估计$\hat{\theta}_{ML}$,

$$\theta_{ML}=\frac{S_L^T R_L^{-1} X_L}{S_L^T R_L^{-1} S_L}, \tag{32}$$

方差

$$D(\hat{\theta}_{ML})=(S_L^T R_L^{-1} S_L)^{-1}. \tag{33}$$

我们看到(1)式定义的假设检验和(30)式定义的参数估计，两者之间有密切的联系。最大似然估计 $\hat{\theta}_{ML}$ 与(2)式确定的最佳检验的检验统计量 $T(X_L)$ 具有相同的结构，仅差一常数因子，而 $\hat{\theta}_{ML}$ 的方差就等于检测中的广义信噪比的倒数，因此前面关于检测问题中的有关结论，在处理估计问题时同样适用。

(六)

本文研究了在有色高斯噪声中信号检测和参数估计的性能与样本数之间的关系，虽然前面讨论的噪声过程是一阶、二阶噪声，然而有关结论对高阶噪声过程同样是适用的。在确定的观察时间内，采样间隔Δ没必要取得太小．这样做，可以减少样本数使计算简化，另外还可看到，当相邻样本之间的相关系数变小，样本序列 $\{n_i\}$ 所对应的 ARMA 模型的参数也变小，小到一定程度，可以近似降阶，以至可近似把一个高阶噪声过程的样本序列当作 AR(1) 模型处理，当然这必须在保证合适的性能前提下进行。

参　考　文　献

[1] H. L. Van Trees, Detection, Estimation and Modulation Theory, part 1, New York, Wiley, 1968.
[2] A. D. Whalen 著，刘其培，迟惠生译，"噪声中信号的检测"，科学出版社，1977年.
[3] W. D. Wood and J. B. Thomas, *Information Sciences*, 20(1981), 13.
[4] S. Cambanis and E. Masry, *IEEE Trans. on IT*, IT-29(1983), 83.
[5] A. Papoulis, Probability, Radom Variables and Stochastic Processes, McGraw-Hill, Inc., 1965.
[6] A Gelb, Applied Optimal Estimation, The M. I. T. Press, 1974.
[7] I. S. Meditch, Stochastic Optimal Linear Estmation and Control, 1969.

THE PERFORMANCE ANALYSIS OF DISCRETE-TIME DETECTION AND ESTIMATION IN COLOUR GAUSSIAN NOISE

Liu Yu

(Nanjing Aeronautical Institute)

The relation between the sample number and the performances of signal detection and paramater estimation in correlative Gaussian noise in fixed time T is investigated. It is pointed out that when the autocorrelation coefficient between the neighbour samples in the range of 0.1—0.2, the general SNR $S^2[T(X_L)]$ will approach to the limit of SNR $S^2(T)$. It is also pointed out that the sample sequences of the solution of a second order differential equation generally is not an AR(2) model. But when the sample interval $\Delta\to 0$, the sample sequences can be described by AR(2). Therefore, $S^2(T)$ can be easily calculated. Finally, the relation between likelihood ratio detection and the maximum likelihood estimation is discussed.