

# 时延网络的奥布列什科夫逼近\*

戴 国 胜

(武汉长江航运科学研究所)

## 提 要

本文用奥布列什科夫公式来逼近时延网络,给出了解析式以及与贝塞尔逼近间的关系,并对其逼近性质和频域、时域特性作了分析,表明时延网络用奥布列什科夫逼近比用贝塞尔逼近具有更好的逼近效果。最后用实例说明。

## 一、时延网络的奥布列什科夫逼近

时延网络的贝塞尔逼近为

$$e^{-s} = \frac{B_n(0)}{B_n(s)}, \quad (1)$$

式中

$$B_n(s) = \sum_{i=0}^n \frac{(2n-i)!}{2^{n-i}(n-i)!i!} s^i. \quad (2)$$

将奥布列什科夫(Obreschkoff)公式<sup>[1]</sup>作进一步展开整理(见附录1),得到  $e^{-s}$  任意阶逼近的有理分式  $G_n^m(s)$  (下标  $n$  为分母多项式的阶次,上标  $m$  为分子多项式的阶次)和逼近误差  $R_n^m(s)$  的解析式为

$$e^{-s} = G_n^m(s) - R_n^m(s), \quad (3)$$

式中

$$G_n^m(s) = \frac{\sum_{i=0}^m \frac{(n+m-i)!}{(m-i)!i!} (-s)^i}{\sum_{i=0}^n \frac{(n+m-i)!n!}{(n-i)!m!i!} s^i} = \frac{P_n^m(-s)}{Q_n^m(s)}, \quad (4)$$

$$R_n^m(s) = \frac{\int_0^s t^n (t-s)^m e^{-t} dt}{\sum_{i=0}^n \frac{(n+m-i)!n!}{(n-i)!i!} s^i}. \quad (5)$$

不计误差  $R_n^m(s)$  时,可用(4)式对时延网络  $e^{-s}$  作分母和分子为任意阶的有理分式逼近。当然  $e^{-s}$  的某一阶的逼近式也可用帕代(Padé)逼近得到,但帕代逼近不能得到

\* 1984年3月12日收到,1985年5月29日修改定稿。

$e^{-s}$  任意阶逼近的解析式, 也不能给出误差的解析式, 故对  $e^{-s}$  来说奥氏逼近比帕代逼近更完整.

奥氏逼近有如下性质: (1) 对于一定的  $m, n$  愈大, 逼近精度愈高. (2) 对于一定的  $n, m$  愈大, 逼近精度愈高. (3)  $n + m$  愈大, 逼近精度愈高. 这些性质的实际意义是说, 在所有分母和分子的阶次不大于  $n$  的逼近式中, 逼近精度在  $m = n$  时最高,  $m = n - 1$  时次之.

由(4)式得  $m = n$  时的逼近  $G_n^n(s)$  为\*

$$G_n^n(s) = \frac{\sum_{i=0}^n \frac{(2n-i)!}{(n-i)!i!} (-s)^i}{\sum_{i=0}^n \frac{(2n-i)!}{(n-i)!i!} s^i} = \frac{Q_n^n(-s)}{Q_n^n(s)}. \quad (6)$$

$m = n - 1$  时的逼近  $G_n^{n-1}(s)$  为

$$G_n^{n-1}(s) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(2n-1-i)!}{(n-i)!i!} (n-i)(-s)^i}{\sum_{i=0}^n \frac{(2n-1-i)!}{(n-i)!i!} ns^i}. \quad (7)$$

奥氏逼近不仅数学上成立, 物理上也可用网络来实现. 由于奥氏逼近的有理分式都是不可约分的, 故所得的实现也将是最小实现网络.

## 二、奥氏逼近与贝塞尔逼近间的关系

**1. 逼近式间的关系** 令  $B_n(s) = \sum_{i=0}^n b_{n,i} s^i$  和  $Q_n^n(s) = \sum_{i=0}^n q_{n,i}^n s^i$ .

比较(2)式和(6)式的分母, 知  $Q_n^n(s)$  的每一项系数  $q_{n,i}^n$  与  $B_n(s)$  的每一项系数  $b_{n,i}$  之间有如下关系\*\*

$$q_{n,i}^n = 2^{n-1} b_{n,i}, \quad (8)$$

于是

$$\sum_{i=0}^n q_{n,i}^n s^i = \sum_{i=0}^n 2^{n-1} b_{n,i} s^i. \quad (9)$$

**2. 相似的递推关系** 我们知道三个相邻的  $B_n(s)$ ,  $B_{n-1}(s)$  和  $B_{n-2}(s)$  之间有

$$B_n(s) = (2n-1)B_{n-1}(s) + s^2 B_{n-2}(s). \quad (10)$$

奥氏逼近中三个相邻的  $Q_n^n(s)$ ,  $Q_{n-1}^{n-1}(s)$  和  $Q_{n-2}^{n-2}(s)$  之间也有相似的递推关系(证明见附录 2)

$$Q_n^n(s) = 2(2n-1)Q_{n-1}^{n-1}(s) + s^2 Q_{n-2}^{n-2}(s). \quad (11)$$

**3. 群延迟间的关系** 若将贝塞尔逼近的群延迟  $T_n(\omega)$  表达成(见文献[5] p.140)

\* 文献[2]也给类似公式, 但较繁, 且未证明.

\*\* 文献[2]也给类似公式, 但有错误.

$$T_n(\omega) = 1 - \frac{\omega^{2n}}{\sum_{i=0}^n t_{n,i} \omega^{2i}}, \quad (12)$$

式中

$$t_{n,i} = \frac{2^{2(i-n)}(2n-2i)!(2n-i)!}{[(n-i)!]^2 i!}; \quad (13)$$

那么  $m = n$  时的奥氏逼近的群延迟  $T_n^n(\omega)$  的表达式为(证明见附录 3)

$$T_n^n(\omega) = 1 - \frac{\omega^{2n}}{\sum_{i=0}^n t_{n,i}^n \omega^{2i}}, \quad (14)$$

式中

$$t_{n,i}^n = 2^{2(n-i)} t_{n,i} = \frac{(2n-2i)!(2n-i)!}{[(n-i)!]^2 i!}. \quad (15)$$

(14)式还可写成

$$T_n^n(\omega) = 1 - \frac{\omega^{2n}}{Q_n^n(\omega)Q_n^n(-\omega)}. \quad (16)$$

$m = n - 1$  时的奥氏逼近与贝塞尔逼近之间也存在一定的关系,但没有  $m = n$  时的关系简单明确。 $m = n - 1$  时奥氏逼近的群延迟  $T_2^2(\omega)$  和  $T_3^3(\omega)$  由定义求得为

$$T_2^2(\omega) = \frac{324 + 72\omega^2 + 7\omega^4}{324 + 72\omega^2 + 13\omega^4 + \omega^6},$$

$$T_3^3(\omega) = \frac{1440000 + 172800\omega^2 + 12384\omega^4 + 592\omega^6 + 17\omega^8}{1440000 + 172800\omega^2 + 12384\omega^4 + 832\omega^6 + 33\omega^8 + \omega^{10}}.$$

### 三、频域时域分析

图 1 示出了同为二阶的贝塞尔逼近  $B_2(0)/B_2(s)$ 、奥氏逼近  $G_2^2(s)$  和  $G_2^1(s)$  的群延迟曲线,以比较三种逼近的频域特性。它们的群延迟分别为

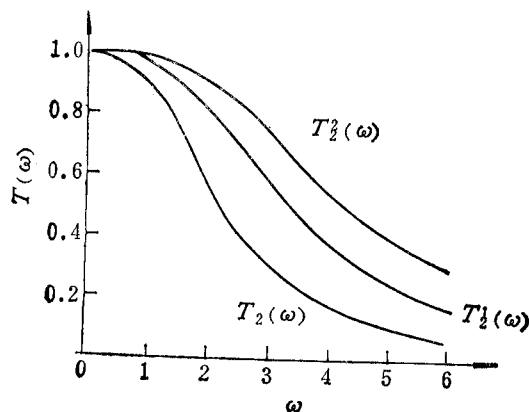


图 1 同为二阶的三种逼近式的群延迟曲线

表 1 图 1 曲线的典型数据表

群迟延 \ $\omega$	1	2	3	4	5	6
$T_2^2(\omega)$	0.994	0.923	0.757	0.568	0.415	0.308
$T_2^1(\omega)$	0.983	0.819	0.559	0.367	0.251	0.181
$T_2(\omega)$	0.923	0.568	0.308	0.182	0.119	0.083

$$T_2(\omega) = \frac{9 + 3\omega^2}{9 + 3\omega^2 + \omega^4},$$

$$T_2^2(\omega) = \frac{144 + 12\omega^2}{144 + 12\omega^2 + \omega^4},$$

$$T_2^1(\omega) = \frac{324 + 72\omega^2 + 7\omega^4}{324 + 72\omega^2 + 13\omega^4 + \omega^6}.$$

同样, 在图 2 中示出了同为二阶的三个逼近式的单位阶跃响应曲线, 以比较它们的时域特性. 它们的单位阶跃响应函数分别为

$$f_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \frac{B_2(0)}{B_2(s)} \cdot \frac{1}{s}$$

$$= 1 - 2e^{-1.5t} \sin(0.866t + 0.524),$$

$$f_2^1(t) = \mathcal{L}^{-1} G_2^1(s) \cdot \frac{1}{s}$$

$$= 1 - 6.928e^{-3t} \sin 1.414t,$$

$$f_2^2(t) = \mathcal{L}^{-1} G_2^2(s) \cdot \frac{1}{s}$$

$$= 1 - 1.732e^{-2t} \sin(1.414t + 0.615) - 2.828e^{-2t} \sin 1.414t,$$

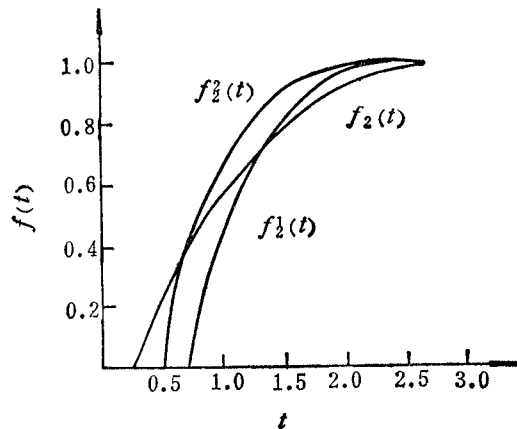


图 2 同为二阶的三种逼近式的单位阶跃响应曲线

表 2 图 2 曲线的典型数据表

响应函数 \ $t$	0.5	1	1.5	2	3
$f_2(t)$	0.228	0.561	0.796	0.923	0.999
$f_2^1(t)$	-0.0041	0.659	0.934	0.995	1.001
$f_2^2(t)$	-0.293	0.412	0.846	0.993	1.011

从这两个图中均可看出, 无论是频域还是时域,  $G_2^2(s)$  的逼近精度最高,  $G_2^1(s)$  次之,

贝塞尔逼近  $B_2(0)/B_2(s)$  最差,表明奥氏的两个逼近确实比贝塞尔逼近效果好。

### 四、实 例

例 求一实现网络,其单位脉冲响应函数为

$$f(t) = \begin{cases} 2(1-t), & 0 \leq t \leq 1; \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

解 为了说明奥氏逼近的效果,特进行了三种逼近,以作比较。

先用时间矩法求得该例的传递函数为

$$H_1(s) = \frac{4}{3} \frac{s+15}{s^2+8s+20}.$$

它的单位脉冲响应为

$$f_1(t) = \frac{4}{3} e^{-4t} \left( \cos 2t + \frac{11}{2} \sin 2t \right).$$

又由拉普拉斯变换的定义求得另一形式的传递函数为

$$H(s) = 2 \frac{s + e^{-s} - 1}{s^2}.$$

需将这个非有理传递函数化成有理传递函数才能作实现。为此将  $e^{-s}$  的  $G_2^2(s)$  逼近和二阶贝塞尔逼近  $B_2(0)/B_2(s)$  代入上式,得两种逼近的传递函数分别为

$$H_2(s) = \frac{2s+12}{s^2+6s+12}$$

和

$$H_3(s) = \frac{2s+4}{s^2+3s+3}.$$

它们的单位脉冲响应函数分别为

$$f_2(t) = 2e^{-3t}(\cos\sqrt{3}t + \sqrt{3}\sin\sqrt{3}t)$$

和

$$f_3(t) = 2e^{-\frac{3}{2}t} \left( \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right).$$

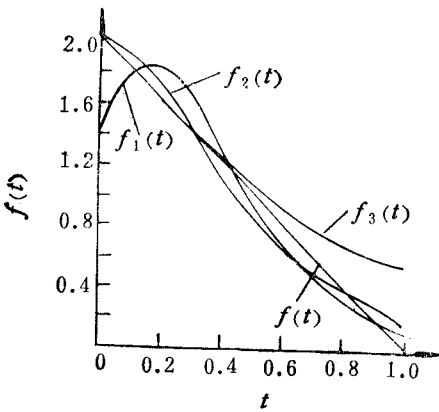


图3 响应曲线比较

$f_1(t)$  起始段误差较大,且有畸变;  $f_2(t)$  在整个区间内都有较好的逼近,曲线也比较平滑;

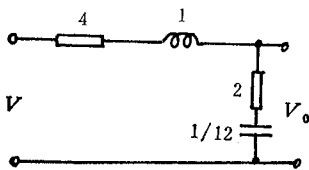


图4 无源网络实现

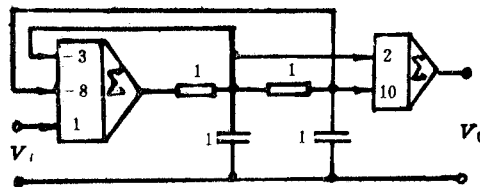


图5 有源网络实现

$f_3(t)$  虽在起始段与精确曲线重合,但其末段出现了较大偏差,即较大滞后。故  $f_2(t)$  的逼近效果最好,亦即二阶奥氏逼近效果最好。

$H_2(s)$  的网络实现如图 4 和图 5 所示。

**附录 1** (3),(4),(5)式的证明

**证明** 文献[1]已给出下式

$$e^{-s} = \frac{\sum_{i=0}^m \frac{c_m^i}{c_{n+m}^i} (-s)^i}{\sum_{i=0}^n \frac{c_n^i}{c_{n+m}^i} s^i} + \frac{(-1)^{2(n+m)-1} \int_0^s t^n (t-s)^m e^{-t} dt}{(n+m)! \sum_{i=0}^n \frac{c_n^i}{c_{n+m}^i} s^i},$$

将其展开,并整理后,得

$$\begin{aligned} e^{-s} &= \frac{\sum_{i=0}^m \frac{(n+m-i)!m!}{(m-i)!(n+m)!i!} (-s)^i}{\sum_{i=0}^n \frac{(n+m-i)!n!}{(n-i)!(n+m)!i!} s^i} \\ &\quad - \frac{\int_0^s t^n (t-s)^m e^{-t} dt}{(n+m)! \sum_{i=0}^n \frac{(n+m-i)!n!}{(n-i)!(n+m)!i!} s^i} \\ &= \frac{\sum_{i=0}^m \frac{(n+m-i)!}{(m-i)!i!} (-s)^i}{\sum_{i=0}^n \frac{(n+m-i)!n!}{(n-i)!m!i!} s^i} - \frac{\int_0^s t^n (t-s)^m e^{-t} dt}{\sum_{i=0}^n \frac{(n+m-i)!n!}{(n-i)!i!} s^i} \\ &= G_n^m(s) - R_n^m(s). \end{aligned} \quad (\text{证毕})$$

**附录 2** (11)式的证明

**证明** 将(6)式的分母代入(11)式的右边,得

$$\begin{aligned} &2(2n-1)Q_{n-1}^{n-1}(s) + s^2 Q_{n-2}^{n-2}(s) \\ &= 2(2n-1) \sum_{i=0}^{n-1} \frac{[2(n-1)-i]!}{[(n-1)-i]!i!} s^i \\ &\quad + s^2 \sum_{i=2}^n \frac{[2(n-2)-(i-2)]!}{[(n-2)-(i-2)]!(i-2)!} s^{i-2} \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{(2n-2-i)! [2(2n-1)(n-i) + i(i-1)]}{(n-i)!i!} s^i \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{(2n-2-i)!(2n-i)(2n-1-i)}{(n-i)!i!} s^i \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{(2n-i)!}{(n-i)!i!} s^i = Q_n^n(s). \end{aligned} \quad (\text{证毕})$$

附录 3 (14), (15), (16) 式的证明

证明 由贝塞尔函数的理论知,  $B_n(\omega)$  和半整数贝塞尔函数之间有如下关系

$$B_n(\omega) = e^{j\omega} \sqrt{\frac{\pi\omega}{2}} \omega^n [(-1)^n J_{-n-\frac{1}{2}}(\omega) - jJ_{n+\frac{1}{2}}(\omega)].$$

由 (8) 式有

$$Q_n^n(\omega) = 2^{n-i} B_n(\omega).$$

那么

$$Q_n^n(\omega) = e^{j\omega} \sqrt{\frac{\pi\omega}{2}} \omega^n [(-1)^n J'_{-n-\frac{1}{2}}(\omega) - jJ'_{n+\frac{1}{2}}(\omega)],$$

式中

$$J'_{-n-\frac{1}{2}}(\omega) = \sum_{i=0}^n 2^{n-i} J_{-n-\frac{1}{2}}(\omega),$$

$$J'_{n+\frac{1}{2}}(\omega) = \sum_{i=0}^n 2^{n-i} J_{n+\frac{1}{2}}(\omega).$$

$m = n$  时的奥氏逼近是最大平坦的。文献 [5] 已给出最大平坦的群延迟为

$$T_n^n(\omega) = 1 - \frac{[J'_{\frac{1}{2}}(\omega)]^2 + [J'_{-\frac{1}{2}}(\omega)]^2}{[J'_{n+\frac{1}{2}}(\omega)]^2 + [J'_{-n-\frac{1}{2}}(\omega)]^2}.$$

由贝塞尔函数的性质有

$$[J'_{\frac{1}{2}}(\omega)]^2 + [J'_{-\frac{1}{2}}(\omega)]^2 = \frac{2}{\pi\omega}$$

和

$$\begin{aligned} & [J'_{n+\frac{1}{2}}(\omega)]^2 + [J'_{-n-\frac{1}{2}}(\omega)]^2 \\ &= 2^{2(n-i)} \cdot \frac{2}{\pi\omega} \sum_{i=0}^n \frac{2^{2(i-n)} (2n-2i)! (2n-i)!}{[(n-i)!]^2 i!} \omega^{2i-2n} \\ &= \frac{2}{\pi\omega} \sum_{i=0}^n \frac{(2n-2i)! (2n-i)!}{[(n-i)!]^2 i!} \omega^{2i-2n}. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} T_n^n(\omega) &= 1 - \frac{\omega^{2n}}{\sum_{i=0}^n \frac{(2n-2i)! (2n-i)!}{[(n-i)!]^2 i!} \omega^{2i}} \\ &= 1 - \frac{\omega^{2n}}{\sum_{i=0}^n 2^{2(n-i)} t_{n,i} \omega^{2i}} \\ &= 1 - \frac{\omega^{2n}}{\sum_{i=0}^n t_{n,i}^n \omega^{2i}}. \end{aligned}$$

(证毕)

## 参 考 文 献

- [1] A. H. Хованский 著,叶乃膺译,连分式及其推广在近似分析问题上的应用,科学出版社,1962.
- [2] A. H. Marshak, D. E. Johnson and J. R. Johnson, *IEEE Trans. on CAS*, **CAS-21**(1974), 797.
- [3] D. E. Johnson, J. R. Johnson and A. Eskandar, *ibid*, **CAS-22** (1975), 645.
- [4] D. E. Johnson 著,颜绍书等译,滤波器理论导论,人民邮电出版社,1981.
- [5] 周承联,综合法滤波器的理论与计算,人民邮电出版社,1979.

## OBRESCHKOFF APPROXIMATION FOR RETARDATION NETWORK

Dai Guosheng

*(Wuhan Changjiang Shipping Science Research Institute)*

The Obreschkoff approximation for a retardation network is carried out. Some analytic formulas of the Obreschkoff approximation and the relationship between these formulas and those of the Bessel approximation are also given. The characteristic, the frequency response and the time response of the Obreschkoff approximation are analyzed. The results obtained show that the Obreschkoff approximation is more accurate than the Bessel approximation for a retardation network. In the end, a typical example is given to verify the above conclusion.