

基于非线性小波变换的图像边缘分解方法

张雷 黄廉卿

(中国科学院长春光学精密机械与物理研究所 长春 130033)

摘要: 图像边缘分解重建过程中,为解决重建后的边缘振荡问题,提出无需对小波变换跃变点两侧延拓,采用非线性变换把能量集中到低频分量上,用精细尺度上小波变换模极大值对跃变点进行奇异性检测,用较少存储空间和计算量即可有效克服重建图像边缘振荡问题。

关键词: 图像压缩, 边缘振荡, 非线性小波

中图分类号: TN919.8 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-5896(2005)05-0691-03

Nonlinear Wavelet Transform Based Image Edge Decomposition

Zhang Lei Huang Lian-qing

(Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China)

Abstract Avoiding oscillation phenomenon which occurs in analysis and reconstruction of image edges, an application without extrapolation both sides is proposed. Image energy is concentrated in low frequency by using nonlinear transform, and the exact jumps location are detected by local maximum of wavelet transform in fine scale. Non-oscillation edges of reconstructed image are received with less storage space and computing time.

Key words Image compression, Edge oscillation, Nonlinear wavelet transform

1 引言

近十年来,在图像压缩中以小波变换为主要技术的发展越来越成熟,但是实验发现小波变换的主要问题是易引起边缘重建失真^[1]。图像压缩理想情况是希望用较少的系数重建图像,对于一幅图像,平滑部分的离散小波变换大部分系数近似为零,然而接近边缘时小波系数退化较慢,能量集中性差,在图像重建时容易引起边缘失真^[1]。为解决边缘失真有两种不同的方法。一种是采用几何小波变换方法,比如 ridgelet 变换^[2], curvelet 变换^[3],这种方法对于图像细节不丰富的边缘多分辨率分解重建中有很好的效果,但对细节丰富图像,重建效果不理想。另一种方法是采用非线性小波变换方法^[4,5],该方法对于细节丰富的图像有较好的重建效果,为此本文主要讨论非线性小波变换方法。

2 非线性小波变换

在大部分图像中都包含有不连续的区域,如边缘,图像的这种不连续区域就不能用平滑基函数表达出来。对于具有丰富细节图像,采用标准小波变换后的重建图像不理想。这是因为 Heisenberg 测不准原理限制了时频能量的同时集中,因此需要找到一种折中方案,即采用非线性小波变换,构造

一个函数 f ,使得 f 的能量集中在局部时间上,其小波变换的能量也集中在某个频率域上。采用非线性 ENO-小波变换方法消除重建图像边缘振荡 (Gibb 现象)。

2.1 非线性 ENO-小波变换方法

非线性 ENO-小波变换是借鉴有效消除边缘振荡技术 (ENO)^[4]与多分辨率小波变换相结合的小波变换方法。

ENO-小波变换主要由两部分组成:一是确定跃变点;二是对跃变点逼近。假设已知跃变点的位置,我们用消除边缘振荡技术对跃变点进行逼近。在离散小波变换中,设 α 与 β 分别为信号通过正交镜像滤波器 (QMF) 后的小波系数

$$\alpha_{j,i} = \sum_{s=0}^l h_s \alpha_{j+1,2i+s}, \quad \beta_{j,i} = \sum_{s=0}^l g_s \alpha_{j+1,2i+s}, \quad \text{其中 } h, g \text{ 分别为}$$

低通滤波器、高通滤波器; α 称为低频小波系数, β 称为高频小波系数; s 是多尺度分解的层数。假设跃变点位于 $\{x(2i+l-2), x(2i+l-1)\}$ 之间,对跃变点两侧做 $(l-1)$ 次延拓,用跃变点的左侧信息进行延拓得到相应的估计值 $\hat{x}(2i+l-1), \dots, \hat{x}(2i+2l-2)$,跃变点的右侧信息进行延拓得到相应的估计值 $\bar{x}(2i+l-1), \dots, \bar{x}(2i+2l-2)$,应用小波变换可以计算左侧的小波系数 $\hat{\alpha}_{j,i}, \hat{\beta}_{j,i}$:

$$\hat{\alpha}_{j,i} = \sum_{s=0}^{l-2} h_s \alpha + h_{l-1} \hat{\alpha}_{j+1,2i+l-1} + h_l \hat{\alpha}_{j+1,2i+l} \quad (1)$$

$$\hat{\beta}_{j,i} = \sum_{s=0}^{l-2} g_s \alpha + g_{l-1} \hat{\alpha}_{j+1,2i+l-1} + g_l \hat{\alpha}_{j+1,2i+l} \quad (2)$$

同样方法可以计算出右侧的小波系数 $\bar{\alpha}_{j,i}, \bar{\beta}_{j,i}$ 。

这样在跃变点处输入信号通过低、高通滤波器后的输出的小波变换系数分别为

$$\begin{aligned} &\dots, \alpha_{j,i-1}, \hat{\alpha}_{j,i}, \hat{\alpha}_{j,i+1}, \dots \text{ 和 } \dots, \beta_{j,i-1}, \hat{\beta}_{j,i}, \hat{\beta}_{j,i+1}, \dots \\ &\dots, \bar{\alpha}_{j,i}, \bar{\alpha}_{j,i+1}, \alpha_{j,i+2}, \dots \text{ 和 } \dots, \bar{\beta}_{j,i}, \bar{\beta}_{j,i+1}, \beta_{j,i+2}, \dots \end{aligned}$$

可以看出，由于延拓保存了跃变点左侧的小波系数 $(\hat{\alpha}_{j,i}, \hat{\beta}_{j,i})$ ， $(\hat{\alpha}_{j,i+1}, \hat{\beta}_{j,i+1})$ ， \dots 和右侧的小波系数 $(\bar{\alpha}_{j,i}, \bar{\beta}_{j,i})$ ， $(\bar{\alpha}_{j,i+1}, \bar{\beta}_{j,i+1})$ ， \dots ，这样边界信号就能够有效重建，但同时发现由于延拓，在跃变点处输出信号比没有经过延拓要长 $l-1$ ，而且需要保存跃变点空间位置信息，相应地需要较大存储空间，采用这种方法虽然可以有效地降低边缘振荡，但它需要更多的存储空间和计算量。另外，采用小波变换后通过一定阈值的选取来判断跃变点位置的方法，虽然简单，但不能有效地反映图像局部奇异性。为此本文作了全新的改进，采用非延拓 ENO-小波变换方法，同样使重建图像消除边缘振荡。

2.2 非延拓 ENO-小波变换方法

2.2.1 对跃变点逼近 考虑能否不经过延拓实现边缘信号有效重建，经分析可知当边缘信号经过高通滤波器时，输出信号在高频段会有较大跳变，这是所不希望的，因为在图像压缩中希望高频信号能量尽可能小。对一幅图像来说，其低频信息刻画图像的趋势、缓慢变化的部分占有主要能量，是图像的主要部分。而高频信息则刻画图像的边缘特征、非平稳程度、或者图像的复杂度、图像的突变部分，占有能量极少。以 Haar 小波为例，在跃变点处有小波变换系数 $\dots, \alpha_{j,i-1}, \alpha_{j,i}, \alpha_{j,i+1}, \dots$ 和 $\dots, \beta_{j,i-1}, \beta_{j,i}, \beta_{j,i+1}, \dots$ 它们的能量关系假设满足如下不等式：

$$\left((\alpha_{j,i-1})^2 + (\beta_{j,i-1})^2 \right) \ll \left((\alpha_{j,i})^2 + (\beta_{j,i})^2 \right) \approx \left((\alpha_{j,i+1})^2 + (\beta_{j,i+1})^2 \right) \quad (3)$$

该式可近似写为

$$\left(|\alpha_{j,i-1}| + |\beta_{j,i-1}| \right) \ll \left(|\alpha_{j,i}| + |\beta_{j,i}| \right) \approx \left(|\alpha_{j,i+1}| + |\beta_{j,i+1}| \right) \quad (4)$$

在跃变点处高频分量的小波系数 $\beta_{j,i}$ 值较大，如果将它丢掉，会产生较大的边缘失真，故希望把它的能量集中到低频分量 $\alpha_{j,i}$ 上，而高频分量上用中值滤波器把跃变点 $\beta_{j,i}$ 滤掉^[3]。

基于该思想可以得到这样的结果：

$$\alpha_{j,i} = \frac{\alpha_{j,i}}{|\alpha_{j,i}|} \left(|\alpha_{j,i}| + |\beta_{j,i}| \right) = \alpha_{j,i} \left(1 + \left| \frac{\beta_{j,i}}{\alpha_{j,i}} \right| \right), \quad \alpha_{j,i} \neq 0 \quad (5)$$

$$\beta_{j,i} = \text{med}(\beta_{j,i-1}, \beta_{j,i}, \beta_{j,i+1}) \quad (6)$$

通过这样的变化，无需对跃变点进行延拓就能把小波变换的高频大系数 $\beta_{j,i}$ 集中到低频分量上，又保留了多分辨率的框架，而且能够取得与经过延拓小波变换同样的重建效果，因此我们把它称为非延拓有效消除边缘振荡 (Essentially Non-Oscillatory Without Extrapolation, ENOWE) 方法。以上是以滤波器模板长度为 2 的 Haar 小波变换，可以用同样方法得出模板长度 l 的小波变换。通过跃变点的低频系数 $\alpha_{j,i}$ 保留高频系数 $\beta_{j,i}$ 的方法，在重建时可以有效恢复跃变点的信息。另外由于降低了高频分量的能量，因此重建过程是稳定的。

2.2.2 跃变点的判断 小波变换具有空间局部化性质，可以用来分析奇异点和奇异度的大小，小波变换的局部极大值可以对函数局部奇异性进行分析，且具有较少的计算量。采用小波变换模极大值检测函数奇异性方法^[6]，函数 $f(x)$ 的小波变换用 $Wf(s,x)$ 表示，选择尺度函数具有一阶消失矩 $\varphi(x) = d\theta/dx$ ，这时小波变换：

$$\begin{aligned} Wf(s,x) &= f(x) * \varphi_s(x) = f(x) * (sd\theta_s/dx)(x) \\ &= sd[f(x) * \theta_s(x)]/dx \end{aligned} \quad (7)$$

在尺度 s_0 下，如果 $\partial Wf(s_0,x)/\partial x$ 在 $x=x_0$ 上有过零点我们称为局部极值点。

应用 $\partial Wf(s_0,x)/\partial x = 0$ 得到尺度函数上高频段局部极值点分别为 (x_0, x_1, x_2) 。设尺度函数的模极大值点在局部极值点 (x_0, x_1, x_2) 之中，图像跃变点通过对 $Wf(s,x)$ 的一定阈值的选取可以排除 $f(x)$ 上振荡不激烈的 x_1 点，然后确定尺度函数上模极大值就可以有效地判断函数奇异点为 (x_0, x_2) 的位置。

3 实验

(1) 首先假设具有跃变点的初始数据为 $(0, 1, 2, 10, 11, 12)$ ，用标准 Haar 小波变换，得到系数：

$$\alpha = (1/\sqrt{2}, 12/\sqrt{2}, 23/\sqrt{2}), \quad \beta = (-1/\sqrt{2}, -8/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$$

丢掉高频系数后重建数据为 $(0.5, 0.5, 6, 6, 11.5, 11.5)$ 。用传统的 ENO-Haar 小波变换^[7]得到系数为

$$\alpha = (1/\sqrt{2}, [4/\sqrt{2}]20/\sqrt{2}, 23/\sqrt{2}), \quad \beta = (-1/\sqrt{2}, 0, [0], -1/\sqrt{2})$$

其中 $[\cdot]$ 的值为延拓变换后需要额外保存的小波系数，丢掉高频系数后重建数据为 $(0.5, 0.5, 0.5, 10, 11.5, 11.5)$ 。

采用改进的方法 ENOWE-Haar 小波变换得到系数为

$$\alpha = (1/\sqrt{2}, 20/\sqrt{2}, 23/\sqrt{2}), \quad \beta = (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$$

丢掉高频系数后重建数据 $(0.5, 0.5, 0.5, 10, 11.5, 11.5)$ 与用 ENO-Haar 小波变换相同，但节省了存储空间。

$$(2) \text{ 对分段函数 } \begin{cases} f(i) = -0.05 \times i - 5, & 0 \leq i < 100; \\ f(i) = 0.6 \times i - 5, & 100 \leq i < 200; \\ f(i) = 10 \sin\left(\frac{\pi}{16} \times i\right), & 200 \leq i \leq 300; \end{cases}$$

在 100 和 200 点处有跃变点(a,b)。分别采用标准 3 阶 Daubechies 小波^[8]和 ENOWE 进行分解, 丢掉高频分量后进行重建, 如图 1(a)~图 1(f)所示。横坐标变量为 i , 单位为标量; 纵坐标为 $f(i)$, 单位为标量。

对 $f(i)$ 进行小波分解后低频分量具有大部分能量, 高频分量能量极少, 如图 1(b)所示; 在跃变点处高频分量会有突变, 如图 1(c)所示。丢掉高频后分别得到 Daubechies 小波重建和 ENOWE 重建曲线, 如图 1(d)~1(f)所示, 可以看出采用 ENOWE 方法能够有效消除重建函数的边缘振荡。

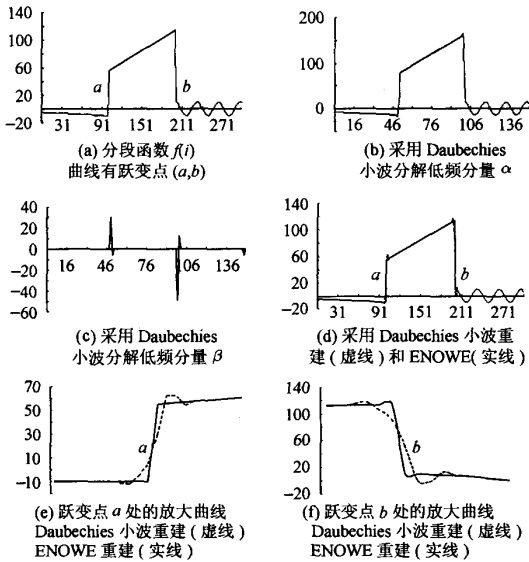


图 1 分段曲线函数 $f(i)$ 进行 Daubechies 小波和 ENOWE 的分解与重建

对于具有较多高频信息的“Barbara”图像分别进行 ENO 和 ENOWE 的 Haar 小波变换, 由于 LH_1, HH_1, HL_1 的 3 个小波子带能量极少, 因此全部抛弃, 然后对其算术编码, 并得到其压缩比 CR 及峰值信噪比 PSNR。它们的重建图像分别为图 2(b)~图 2(c)所示:



图 2 Barbara 分别进行 ENO 和 ENOWE 的重建图像

从实验结果可以看出, 二者重构图像的质量都较高, PSNR 相差不大, 为 0.3dB, 但 ENOWE 压缩比却比 ENO 高 8, 因此我们认为 ENOWE 优于 ENO。上述基于 ENOWE-Haar 小波的图像变换方法由于能有效地保持图像的重要边缘, 在压缩比大于 30 的情况下, 仍具有良好的主观视觉效果。

4 结束语

本文在非线性小波变换和消除边缘振荡技术基础上提出了新的 ENOWE 算法, 该算法与 ENO-小波算法有同样的消除边缘振荡效果, 但本算法具有如下特点:

- (1) 对跃变点的逼近上需要的计算量少, 方法简单, 占用存储空间小。
- (2) 在跃变点判别上, 采用小波变换模极大值方法有效地判断信号跃变点。

通过实验表明本算法 ENOWE 与 ENO-小波变换方法有同样的主观视觉效果, 特别是对细节较多的图像, 对于消除边缘振荡有令人满意的效果。

参考文献

- [1] Starck J L, Murtagh, F, Bijaoui A. Image processing and data analysis[J]. *Astronomy and Astrophysics Supplement Series*, 2000: 139 - 149.
- [2] Donoho D. Wedgelets: Nearly-minimax estimation of edges[J]. *Annals of Stat.*, 1999, 27(3): 859 - 897.
- [3] Candes E, Donoho D. New tight frames of curvelets and optimal representations of objects with C^2 Singularities[R]. Technical Report, Stanford University, 2002.
- [4] Chan T F. Adaptive ENO-wavelet transforms for discontinuous functions[R]. in 12th Domain Decomposition Conf, Paris, June 26 - 28, 1996, number 219 in Lecture Notes: 241 - 245.
- [5] Claypoole R L, Davis G, Sweldens W. Nonlinear wavelet transforms for image coding[R]. in Proc.31st Asilomar Conf, Pacific Grove, CA, 1997: 301 - 308.
- [6] 陈逢时. 子波变换理论及其在信号处理中的应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 1998: 165 - 173.
- [7] Zou Hao-min. Wavelet transform and PDE techniques in image compression [D]. Doctor paper, University of California, 2000.
- [8] Daubechies I, Sweldens W. Factoring wavelet transforms into lifting steps [R]. Tech. Rep. Bell Laboratories, 1996.

张雷: 男, 1972年生, 博士生, 主要从事图像压缩算法研究。
黄廉卿: 男, 1942年生, 研究员, 博士生导师, 主要从事图像压缩及 CR 影像仪研究。