第10卷 第1期 电子科学学刊 Vol.10, No.1
1988年1月 JOURNAL OF ELECTRONICS Jan., 1988

均匀随机媒质中传播的波
——有不同波数的 m-n 阶矩方程的解[*][**]

王贞松
(中国科学院电子学研究所,北京)

摘要　在研究随机媒质中传播的波的一些有关问题时，常常需要求解波的矩方程．具有不同波数的 m-n 阶矩方程是一个抛物近似的偏微分波动方程。本文应用格林函数方法将偏微分方程变为积分方程，并用迭代法求得了该积分方程的解．同时，又应用接连散射的方法求解了具有不同波数的 m-n 阶矩方程，两种方法所得的结果完全相同．文中对解的物理含义作了说明，并讨论了用于波传播研究中的一些问题。

关键词　波的传播；均匀随机媒质；多重散射；Markov 过程；前向小角度散射

1. 引言

无线电波在电离层和大气中传播时，受到电离层中的不规则体(如"突发 E_s 层"，"电离层气泡"等)的散射．光波在大气中传播时，受到大气中湍流引起的折射率不均匀体的散射．声波在湍流海洋中传播时同样会受到湍流的散射．当散射体的特征尺度比波长大得多，而折射率变化又较小时，对波的散射的研究只要考虑标量的波动方程就可以了．这时波的散射角度很小，波仍主要是向前传播的波．本文研究波在各个散射体个体上的散射是弱的，但由于传播距离较长，多重散射又是十分重要时的情况．

考虑以下两个假设成立时的情况：第一，波传播时幅度 $u(x, y, z)$ 变化很小，即 $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ 很小，可忽略．这是抛物型近似可适用的条件．这时波动方程可改写为：

$$\frac{\partial}{\partial z} u(z, \boldsymbol{\rho}, k) + \frac{1}{2ik} \nabla_\rho^2 u(z, \boldsymbol{\rho}, k) + \frac{1}{2i} \beta k n_1^2(z, \boldsymbol{\rho}) u(z, \boldsymbol{\rho}, k) = 0 \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{\rho}$ 是与 z 轴垂直的平面上的二维矢量，$\nabla_\rho^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$，$k$ 是媒质中的波数，n_1 是物理量的涨落．n_1，β 由波和媒质决定．对于大气中光波，$\beta = 1$，n_1 是折射率的涨落．对于电离层中的无线电波，$\beta = -\frac{4\pi e^2}{mc^2 k^2}$，$n_1$ 是电子密度涨落．对于水中的声波，$\beta = -2$，n_1 是声速函数的涨落．第二，我们假定 Markov 近似适用，且湍流是稳定的，即

$$\langle n_1^2(z, \boldsymbol{\rho}) n_1^2(z', \boldsymbol{\rho}') \rangle = \delta(z - z') A(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}') \tag{2a}$$

---

* 1986年5月2日收到，1987年7月24日修改定稿．
** 中国科学院科学基金资助课题．

$$A(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}')=\int_{-\infty}^{z}\langle n_1^2(z,\boldsymbol{\rho})n_1^2(z',\boldsymbol{\rho}')\rangle dz' \tag{2b}$$

式中〈—〉表示平均值．这些近似在研究无线电波穿越电离层，光波在大气中的传播和声波在海洋湍流中的传播时都适用．方程 (1) 是有随机参数的微分方程，原则上可用 Feyman 路积分方法求解[1,2]．但在研究一些有关随机媒质中波传播问题时，如知道波的矩更方便，这时需求解矩方程．具有不同波数的 m-n 阶矩方程可写为[3,4]

$$\frac{\partial\Gamma_{mn}}{\partial z}-\frac{i}{2}\left[\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{k_{2l-1}}\nabla_{s_l}^2-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{k_{2j}}\nabla_{t_j}^2\right]\Gamma_{mn}+\frac{1}{8}F_{mn}\Gamma_{mn}=0 \tag{3}$$

式中 $\Gamma_{mn}(z,\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2,\cdots,\boldsymbol{s}_m,\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2,\cdots,\boldsymbol{t}_n)=\langle u_{s_1}u_{s_2}\cdots u_{s_m}u_{t_1}^t\cdots u_{t_n}^t\rangle$，波沿 z 方向传播，$\boldsymbol{s}_l$，$\boldsymbol{t}_j$ 是在垂直于 z 的平面内的二维矢径，$\nabla_{s_l}^2$，$\nabla_{t_j}^2$ 是二维拉普拉斯算符，u_{sl} 是在 $(z,\boldsymbol{s}_l)$ 处的波场，$u_{t_j}^t$ 是在 $(z,\boldsymbol{t}_j)$ 处波场的复共轭量．

$$\begin{aligned}F_{mn}=&\sum_{l=1}^{m}\sum_{p=1}^{m}\beta_{2l-1}k_{2l-1}\beta_{2p-1}k_{2p-1}A(\boldsymbol{s}_l-\boldsymbol{s}_p)\\&-\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\beta_{2l-1}k_{2l-1}\beta_{2j}k_{2j}[A(\boldsymbol{s}_l-\boldsymbol{t}_j)+A(\boldsymbol{t}_j-\boldsymbol{s}_l)]\\&+\sum_{q=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\beta_{2q}k_{2q}\beta_{2j}k_{2j}A(\boldsymbol{t}_q-\boldsymbol{t}_j)\end{aligned} \tag{4}$$

式中 β_{2l-1} 是在 $\boldsymbol{s}_l$ 处的 β，β_{2j} 是在 $\boldsymbol{t}_j$ 处的 β．文献 [4] 构造了一个矩空间，求解了方程 (3) 的变形的矩方程．本文用格林函数方法和接连散射方法来直接求解矩方程 (3)，并应用它的解讨论在随机媒质中传播的波的一些问题．

2. m-n 阶矩 Γ_{mn} 的积分方程及其解

为了求解抛物近似的矩方程 (3)，我们首先考虑下列问题：

$$\begin{cases}Lu(z,\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\cdots,\boldsymbol{\rho}_N)=\varphi(z,\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\cdots,\boldsymbol{\rho}_N),\ (z>0)\\u(0,\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\cdots,\boldsymbol{\rho}_N)=\psi(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\cdots,\boldsymbol{\rho}_N)\end{cases} \tag{5}$$

式中 L 是线性微分算子，定义为

$$L=\frac{\partial}{\partial z}-a_1^2\nabla_1^2-a_2^2\nabla_2^2-\cdots-a_N^2\nabla_N^2$$

方程 (5) 的解由如下两个问题的解组成[5]

$$u=u^{\mathrm{I}}+u^{\mathrm{II}}$$

问题 I　$\begin{cases}Lu^{\mathrm{I}}=\varphi(z,\boldsymbol{\rho}_1\cdots\boldsymbol{\rho}_N),\ (z>0)\\u^{\mathrm{I}}(0,\boldsymbol{\rho}_1,\cdots,\boldsymbol{\rho}_N)=0\end{cases}$

问题 II　$\begin{cases}Lu^{\mathrm{II}}=0,\ (z>0)\\u^{\mathrm{II}}(0,\boldsymbol{\rho}_1\cdots\boldsymbol{\rho}_N)=\psi(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\cdots,\boldsymbol{\rho}_N)\end{cases}$

这两个问题可以用下述的无界空间的基本解格林函数来求解[5]．

问题 I　　问题 I 格林函数是

$$\begin{cases}LG^{\mathrm{I}}(z,\boldsymbol{\rho}_1,\cdots,\boldsymbol{\rho}_N|z',\boldsymbol{\rho}_1',\cdots,\boldsymbol{\rho}_N')=\delta(z-z')\delta(\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_1'),\cdots,\delta(\boldsymbol{\rho}_N-\boldsymbol{\rho}_N'),(z>0)\\G^{\mathrm{I}}(0,\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\cdots,\boldsymbol{\rho}_N)=0\end{cases} \tag{7}$$

$$G^{\mathrm{I}}(z,\boldsymbol{\rho}_1,\cdots,\boldsymbol{\rho}_N|z',\boldsymbol{\rho}_1',\cdots,\boldsymbol{\rho}_N')=\prod_{j=1}^{N}\left[\frac{1}{2a_j\sqrt{\pi(z-z')}}\right]^2$$
$$\times\exp\left[-\sum_{j=1}^{N}\frac{(\boldsymbol{\rho}_j-\boldsymbol{\rho}_j')^2}{2a_j^2(z-z')}\right],\ (z>z') \tag{8}$$

由此可以得到问题 I 的解为

$$u^{\mathrm{I}}=\int_0^z dz'\int_{-\infty}^{\infty}G^{\mathrm{I}}(z,\boldsymbol{\rho}_1,\cdots,\boldsymbol{\rho}_N|z',\boldsymbol{\rho}_1',\cdots,\boldsymbol{\rho}_N')\varphi(z',\boldsymbol{\rho}_1',\cdots,\boldsymbol{\rho}_N')\prod_{j=1}^{N}d\boldsymbol{\rho}_j' \tag{9}$$

问题 II 问题 II 的格林函数是

$$\begin{cases}LG^{\mathrm{II}}(z,\boldsymbol{\rho}_1,\cdots,\boldsymbol{\rho}_N|0,\boldsymbol{\rho}_1',\cdots,\boldsymbol{\rho}_N')=0\\ G^{\mathrm{II}}(0,\boldsymbol{\rho}_1,\cdots,\boldsymbol{\rho}_N|0,\boldsymbol{\rho}_1',\cdots,\boldsymbol{\rho}_N')=\delta(\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_1')\delta(\boldsymbol{\rho}_2-\boldsymbol{\rho}_2')\cdots\delta(\boldsymbol{\rho}_N-\boldsymbol{\rho}_N')\end{cases} \tag{10}$$

$$G^{\mathrm{II}}(z,\boldsymbol{\rho}_1,\cdots,\boldsymbol{\rho}_N|0,\boldsymbol{\rho}_1',\cdots,\boldsymbol{\rho}_N')=\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{2a_j\sqrt{\pi z}}\right)^2$$
$$\times\exp\left[-\sum_{j=1}^{N}\frac{(\boldsymbol{\rho}_j-\boldsymbol{\rho}_j')^2}{4a_j^2 z}\right],\ (z>0) \tag{11}$$

这样我们得到问题 II 的解为

$$u^{\mathrm{II}}=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\boldsymbol{\rho}_1',\cdots,\boldsymbol{\rho}_N')G^{\mathrm{II}}(z,\boldsymbol{\rho}_1,\cdots,\boldsymbol{\rho}_N|0,\boldsymbol{\rho}_1',\cdots,\boldsymbol{\rho}_N')\prod_{j=1}^{N}d\boldsymbol{\rho}_j' \tag{12}$$

至此我们已解决了方程 (5) 的柯西问题,它的解是

$$u=u^{\mathrm{I}}+u^{\mathrm{II}},$$

即

$$u=\int_0^z dz'\int_{-\infty}^{\infty}G^{\mathrm{I}}(z,\boldsymbol{\rho}_1,\cdots,\boldsymbol{\rho}_N|z',\boldsymbol{\rho}_1',\cdots,\boldsymbol{\rho}_N')\varphi(z',\boldsymbol{\rho}_1',\cdots,\boldsymbol{\rho}_N')\prod_{j=1}^{N}d\boldsymbol{\rho}_j'$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}G^{\mathrm{II}}(z,\boldsymbol{\rho}_1,\cdots,\boldsymbol{\rho}_N|0,\boldsymbol{\rho}_1',\cdots,\boldsymbol{\rho}_N')\phi(\boldsymbol{\rho}_1',\cdots,\boldsymbol{\rho}_N')\prod_{j=1}^{N}d\boldsymbol{\rho}_j' \tag{13}$$

现在回到方程 (3),在我们的问题中,$-\frac{1}{8}F_{mn}\Gamma_{mn}$ 相当于方程 (5) 中的 φ; $\frac{i}{2k_1},\cdots,\frac{i}{2k_{2m-1}},\frac{-i}{2k_2},\cdots,\frac{-i}{2k_{2n}}$ 相当于 $a_1^2,a_2^2,\cdots,a_N^2$; $z=0$ 时的 Γ_{mn} 可作为 (5) 式中的 ϕ。这样,按照 (13) 式我们便可将方程 (3) 化成如下积分方程:

$$\Gamma_{mn}=(-1)^m\left(\frac{i}{2\pi z}\right)^{m+n}\prod_{l=1}^{m}k_{2l-1}\prod_{j=1}^{n}k_{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma_{mn}(0,\boldsymbol{s}_1',\cdots,\boldsymbol{s}_m',\boldsymbol{t}_1',\cdots,\boldsymbol{t}_n')$$
$$\times\exp\left[\sum_{l=1}^{m}ik_{2l-1}\frac{(\boldsymbol{s}_l-\boldsymbol{s}_l')^2}{2z}-\sum_{j=1}^{n}ik_{2j}\frac{(\boldsymbol{t}_j-\boldsymbol{t}_j')^2}{2z}\right]$$
$$\times\prod_{l=1}^{m}d\boldsymbol{s}_l'\prod_{j=1}^{n}d\boldsymbol{t}_j'-\frac{(-1)^m}{8}\left(\frac{i}{2\pi}\right)^{m+n}\prod_{l=1}^{m}k_{2l-1}\prod_{j=1}^{n}k_{2j}$$
$$\times\int_0^z dz'\int_{-\infty}^{\infty}F_{mn}(\boldsymbol{s}_1',\cdots,\boldsymbol{s}_m',\boldsymbol{t}_1',\cdots,\boldsymbol{t}_n')$$
$$\times\Gamma_{mn}(z',\boldsymbol{s}_1',\cdots,\boldsymbol{s}_m',\boldsymbol{t}_1',\cdots,\boldsymbol{t}_n')\left(\frac{1}{z-z'}\right)^{m+n}$$

$$\times \exp\left[\sum_{l=1}^{m} ik_{2l-1}\frac{(\boldsymbol{s}_l-\boldsymbol{s}_l')^2}{2(z-z')}-\sum_{j=1}^{n} ik_{2j}\frac{(\boldsymbol{t}_j-\boldsymbol{t}_j')^2}{2(z-z')}\right]\prod_{l=1}^{m} d\boldsymbol{s}_l'\prod_{j=1}^{n} d\boldsymbol{t}_j' \tag{14}$$

积分方程 (14) 是波在有随机不均匀体的媒质中传播时的矩的积分方程，这一方程与相干波被随机颗粒散射时的 Foldy-Twersky 积分方程十分相似，它包括了所有的前向多重散射效应。

积分方程 (14) 的解可写为[6]

$$\Gamma_{mn}=\sum_{p=0}^{\infty}\Gamma_{mn}^{(p)} \tag{15}$$

各个 $\Gamma_{mn}^{(p)}$ 可用迭代法求得

$$\Gamma_{mn}^{(0)}=(-1)^m\left(\frac{i}{2\pi z}\right)^{m+n}\prod_{l=1}^{m}k_{2l-1}\prod_{j=1}^{n}k_{2j}\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma_{mn}(0,\boldsymbol{s}_1',\cdots,\boldsymbol{s}_m',\boldsymbol{t}_1',\cdots,\boldsymbol{t}_n')$$

$$\times \exp\left[\sum_{l=1}^{m} ik_{2l-1}\frac{(\boldsymbol{s}_l-\boldsymbol{s}_l')^2}{2z}-\sum_{j=1}^{n} ik_{2j}\frac{(\boldsymbol{t}_j-\boldsymbol{t}_j')^2}{2z}\right]\prod_{l=1}^{m} d\boldsymbol{s}_l'\prod_{j=1}^{n} d\boldsymbol{t}_j' \tag{16}$$

$$\Gamma_{mn}^{(1)}=-\frac{(-1)^m}{8}\left(\frac{i}{2\pi}\right)^{m+n}\prod_{l=1}^{m}k_{2l-1}\prod_{j=1}^{n}k_{2j}\int_0^z dz'\int_{-\infty}^{\infty}F_{mn}(\boldsymbol{s}_1',\cdots,\boldsymbol{s}_m',\boldsymbol{t}_1',\cdots,\boldsymbol{t}_n')$$

$$\times\Gamma_{mn}^{(0)}(z',\boldsymbol{s}_1',\cdots,\boldsymbol{s}_m',\boldsymbol{t}_1',\cdots,\boldsymbol{t}_n')\left(\frac{1}{z-z'}\right)^{m+n}$$

$$\times \exp\left[\sum_{l=1}^{m} ik_{2l-1}\frac{(\boldsymbol{s}_l-\boldsymbol{s}_l')^2}{2(z-z')}-\sum_{j=1}^{n} ik_{2j}\frac{(\boldsymbol{t}_j-\boldsymbol{t}_j')^2}{2(z-z')}\right]\prod_{l=1}^{m} d\boldsymbol{s}_l'\prod_{j=1}^{n} d\boldsymbol{t}_j' \tag{17}$$

. . . .

$$\Gamma_{mn}^{(p)}=-\frac{(-1)^m}{8}\left(\frac{i}{2\pi}\right)^{m+n}\prod_{l=1}^{m}k_{2l-1}\prod_{j=1}^{n}k_{2j}\int_0^z dz'\int_{-\infty}^{\infty}F_{mn}(\boldsymbol{s}_1',\cdots,\boldsymbol{s}_m',\boldsymbol{t}_1',\cdots,\boldsymbol{t}_n')$$

$$\times\Gamma_{mn}^{(p-1)}(z',\boldsymbol{s}_1',\cdots,\boldsymbol{s}_m',\boldsymbol{t}_1',\cdots,\boldsymbol{t}_n')\left(\frac{1}{z-z'}\right)^{m+n}$$

$$\times \exp\left[\sum_{l=1}^{m} ik_{2l-1}\frac{(\boldsymbol{s}_l-\boldsymbol{s}_l')^2}{2(z-z')}-\sum_{j=1}^{n} ik_{2j}\frac{(\boldsymbol{t}_j-\boldsymbol{t}_j')^2}{2(z-z')}\right]\prod_{l=1}^{m} d\boldsymbol{s}_l'\prod_{j=1}^{n} d\boldsymbol{t}_j' \tag{18}$$

这样我们就求得了 m-n 阶矩方程 (3) 的解。

3. 用接连散射方法求解 m-n 阶矩方程

B. J. Uscinski 曾用连接散射方法来求解与随机媒质中波的传播有关的积分微分方程，他运用此法求解了同一波数的四阶矩 (Γ_{22}) 方程[7,8]。在这里我们将用此方法来求解有不同波数不同横坐标的 m-n 阶矩方程 (3)。

首先，我们导出 m-n 阶矩的积分微分方程。我们作如下 Fourier 变换：

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_{mn}(z,\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\kappa}_1,\cdots,\boldsymbol{\kappa}_n)&=\mathrm{FT}(\Gamma_{mn})\\&=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2(m+n)}\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma_{mn}(z,\boldsymbol{s}_1,\cdots,\boldsymbol{s}_m,\boldsymbol{t}_1,\cdots,\boldsymbol{t}_n)\\&\quad\times\exp[-i(\boldsymbol{\alpha}_1\cdot\boldsymbol{s}_1+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m\cdot\boldsymbol{s}_m+\boldsymbol{\kappa}_1\cdot\boldsymbol{t}_1+\cdots+\boldsymbol{\kappa}_n\cdot\boldsymbol{t}_n)]\\&\quad\times\prod_{l=1}^{m}d\boldsymbol{s}_l\prod_{j=1}^{n}d\boldsymbol{t}_j\end{aligned}$$

$$\bar{F}_{mn} = \mathrm{FT}(F_{mn})$$

这样方程(3)变为:

$$\frac{\partial \bar{\Gamma}_{mn}}{\partial z} + \frac{i}{2}\left(\frac{\alpha_1^2}{k_1} + \cdots + \frac{\alpha_m^2}{k_{2m-1}} - \frac{\kappa_1^2}{k_2} - \cdots - \frac{\kappa_n^2}{k_{2n}}\right)\bar{\Gamma}_{mn}$$
$$= -\frac{1}{8}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}_{mn}(\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_1', \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m - \boldsymbol{\alpha}_m', \boldsymbol{\kappa}_1 - \boldsymbol{\kappa}_1', \cdots, \boldsymbol{\kappa}_n - \boldsymbol{\kappa}_n')$$
$$\times \bar{\Gamma}_{mn}(z, \boldsymbol{\alpha}_1', \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m', \boldsymbol{\kappa}_1', \cdots, \boldsymbol{\kappa}_n') \prod_{l=1}^{m} d\boldsymbol{\alpha}_l' \prod_{j=1}^{n} d\boldsymbol{\kappa}_j' \tag{19}$$

这就是我们需要的积分微分方程.

我们将 $\bar{\Gamma}_{mn}$ 写成级数的形式

$$\bar{\Gamma}_{mn} = \sum_{p=0}^{\infty} \bar{\Gamma}_{mn}^{(p)} \tag{20}$$

将(20)式代入(19)式,得到联系 $\bar{\Gamma}_{mn}^{(p)}$ 和 $\bar{\Gamma}_{mn}^{(p-1)}$ 的方程.

$$\frac{\partial}{\partial z}\bar{\Gamma}_{mn}^{(p)} = -\frac{i}{2}\left(\frac{\alpha_1^2}{k_1} + \cdots + \frac{\alpha_m^2}{k_{2m-1}} - \frac{k_1^2}{k_2} - \cdots - \frac{k_n^2}{k_{2n}}\right)\bar{\Gamma}_{mn}^{(p)}$$
$$-\frac{1}{8}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}_{mn}(\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_1', \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m - \boldsymbol{\alpha}_m', \boldsymbol{\kappa}_1 - \boldsymbol{\kappa}_1', \cdots, \boldsymbol{\kappa}_n - \boldsymbol{\kappa}_n')$$
$$\times \bar{\Gamma}_{mn}^{(p-1)}(z, \boldsymbol{\alpha}_1', \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m', \boldsymbol{\kappa}_1', \cdots, \boldsymbol{\kappa}_n') \prod_{l=1}^{m} d\boldsymbol{\alpha}_l' \prod_{j=1}^{n} d\boldsymbol{\kappa}_j' \tag{21}$$

方程(21)是 $\bar{\Gamma}_{mn}^{(p)}$ 的一阶线性微分方程,很容易求解,得

$$\bar{\Gamma}_{mn}^{(p)} = \exp\left[-\frac{i}{2}z\left(\frac{\alpha_1^2}{k_1} + \cdots + \frac{\alpha_m^2}{k_{2m-1}} - \frac{\kappa_1^2}{k_2} - \cdots - \frac{\kappa_n^2}{k_{2n}}\right)\right]$$
$$\times\left\{C^{(p)} + \int_0^z dz'\left[-\frac{1}{8}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{F}_{mn}(\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_1', \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m - \boldsymbol{\alpha}_m',\right.\right.$$
$$\boldsymbol{\kappa}_1 - \boldsymbol{\kappa}_1', \cdots, \boldsymbol{\kappa}_n - \boldsymbol{\kappa}_n')\cdot\bar{\Gamma}_{mn}^{(p-1)}(z', \boldsymbol{\alpha}_1', \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m', \boldsymbol{\kappa}_1', \cdots, \boldsymbol{\kappa}_n')$$
$$\times\left.\prod_{l=1}^{m} d\boldsymbol{\alpha}_l' \prod_{j=1}^{n} d\boldsymbol{\kappa}_j'\right]\cdot\exp\left[\frac{i}{2}z'\left(\frac{\alpha_1^2}{k_1} + \cdots + \frac{\alpha_m^2}{k_{2m-1}}\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-\frac{\kappa_1^2}{k_2} - \cdots - \frac{k_n^2}{k_{2n}}\right)\right]\right\} \tag{22}$$

式中的积分常数 $C^{(p)}$ 可由 $z=0$ 处的条件决定. 因

$$\bar{\Gamma}_{mn}^{(0)} = \bar{\Gamma}_{mn}(0, \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\kappa}_1, \cdots, \boldsymbol{\kappa}_n)$$
$$\bar{\Gamma}_{mn}^{(p)} = \bar{\Gamma}_{mn}^{(p)}(0, \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\kappa}_1, \cdots, \boldsymbol{\kappa}_n) = 0, \quad (p \geqslant 1)$$

所以

$$C^{(0)} = \bar{\Gamma}_{mn}(0, \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\kappa}_1, \cdots, \boldsymbol{\kappa}_n)$$
$$C^{(p)} = 0$$

我们可以从 $\bar{\Gamma}_{mn}^{(0)}$ 开始定出(20)式的各项

$$\bar{\Gamma}_{mn}^{(0)} = \exp\left[-\frac{i}{2}z\left(\frac{\alpha_1^2}{k_1} + \cdots + \frac{\alpha_m^2}{k_{2m-1}} - \frac{\kappa_1^2}{k_2} - \cdots - \frac{\kappa_n^2}{k_{2n}}\right)\right]$$
$$\times\bar{\Gamma}_{mn}(0, \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\kappa}_1, \cdots, \boldsymbol{\kappa}_n)$$

....

$$\bar{\Gamma}_{mn}^{(p)} = -\frac{1}{8}\exp\left[-\frac{i}{2}z\left(\frac{\alpha_1^2}{k_1}+\cdots+\frac{\alpha_m^2}{k_{2m-1}}-\frac{\kappa_1^2}{k_2}-\cdots-\frac{\kappa_n^2}{k_{2n}}\right)\right]$$

$$\times\int_0^z dz'\int_{-\infty}^{\infty}\bar{F}_{mn}(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_1',\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m-\boldsymbol{\alpha}_m',\boldsymbol{\kappa}_1-\boldsymbol{\kappa}_1',\cdots,\boldsymbol{\kappa}_n-\boldsymbol{\kappa}_n')$$

$$\times\bar{\Gamma}_{mn}^{(p-1)}(z',\boldsymbol{\alpha}_1',\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m',\boldsymbol{\kappa}_1',\cdots,\boldsymbol{\kappa}_n')\prod_{l=1}^{m}d\boldsymbol{\alpha}_l'\prod_{j=1}^{n}d\boldsymbol{\kappa}_j'$$

$$\times\exp\left[\frac{i}{2}z'\left(\frac{\alpha_1^2}{k_1}+\cdots+\frac{\alpha_m^2}{k_{2m-1}}-\frac{\kappa_1^2}{k_2}-\cdots-\frac{\kappa_n^2}{k_{2n}}\right)\right] \tag{24}$$

这样我们就得到了方程 (3) 的相空间中的解

$$\bar{\Gamma}_{mn} = \sum_{p=0}^{\infty}\bar{\Gamma}_{mn}^{(p)}(z,\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\kappa}_1,\cdots,\boldsymbol{\kappa}_n) \tag{25}$$

对 (25) 式作 Fourier 反变换就可得到实空间的解。因

$$\Gamma_{mn}^{(0)}|_z = \int_{-\infty}^{\infty}\bar{\Gamma}_{mn}(0,\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\kappa}_1,\cdots,\boldsymbol{\kappa}_n)$$

$$\times\exp[i(\boldsymbol{\alpha}_1\cdot\boldsymbol{s}_1+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m\cdot\boldsymbol{s}_m+\boldsymbol{\kappa}_1\cdot\boldsymbol{t}_1$$

$$+\cdots+\boldsymbol{\kappa}_n\cdot\boldsymbol{t}_n)]\prod_{l=1}^{m}d\boldsymbol{\alpha}_l\prod_{j=1}^{n}d\boldsymbol{\kappa}_j \tag{26}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{i}{2}z\left(\frac{\alpha_1^2}{k_1}+\cdots+\frac{\alpha_m^2}{k_{2m-1}}-\frac{\kappa_1^2}{k_2}-\cdots-\frac{\kappa_n^2}{k_{2n}}\right)\right]$$

$$\times\exp[i(\boldsymbol{\alpha}_1\cdot\boldsymbol{s}_1+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m\cdot\boldsymbol{s}_m+\boldsymbol{\kappa}_1\cdot\boldsymbol{t}_1+\cdots+\boldsymbol{\kappa}_n\cdot\boldsymbol{t}_n)]$$

$$\times\prod_{l=1}^{m}d\alpha_l\prod_{j=1}^{n}d\boldsymbol{\kappa}_j = (-1)^m\left(\frac{i}{2\pi z}\right)^{m+n}\prod_{l=1}^{m}k_{2m-1}\prod_{j=1}^{n}k_{2n}$$

$$\times\exp\left[i\sum_{l=1}^{m}\frac{k_{2l-1}s_l^2}{2z}-i\sum_{j=1}^{n}\frac{k_{2j}t_j^2}{2z}\right] \tag{27}$$

可以应用 Fourier 变换的卷积定理，可得

$$\Gamma_{mn}^{(0)}(z,\boldsymbol{s}_1\cdots\boldsymbol{s}_m,\boldsymbol{t}_1\cdots\boldsymbol{t}_n) = (-1)^m\left(\frac{i}{2\pi z}\right)^{m+n}\prod_{l=1}^{m}k_{2l-1}\prod_{j=1}^{n}k_{2j}$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma_{mn}(0,\boldsymbol{s}_1'\cdots\boldsymbol{s}_m',\boldsymbol{t}_1'\cdots\boldsymbol{t}_n')$$

$$\times\exp\left[i\sum_{l=1}^{m}\frac{k_{2l-1}(\boldsymbol{s}_l-\boldsymbol{s}_l')^2}{2z}-i\sum_{j=1}^{n}\frac{k_{2j}(\boldsymbol{t}_j-\boldsymbol{t}_j')^2}{2z}\right]\prod_{l=1}^{m}d\boldsymbol{s}_l'\prod_{j=1}^{n}d\boldsymbol{t}_j' \tag{28}$$

这正是积分方程解法得到的解的第一项，它是传播的距离效应，同理可得

$$\Gamma_{mn}^{(p)}(z,\boldsymbol{s}_1,\cdots,\boldsymbol{s}_m,\boldsymbol{t}_1,\cdots,\boldsymbol{t}_n) = -\frac{(-1)^m}{8}\left(\frac{i}{2\pi}\right)^{m+n}\prod_{l=1}^{m}k_{2l-1}\prod_{j=1}^{n}k_{2j}$$

$$\times\int_0^z dz'\int_{-\infty}^{\infty}F_{mn}(\boldsymbol{s}_1'\cdots\boldsymbol{s}_m',\boldsymbol{t}_1'\cdots\boldsymbol{t}_n')\Gamma_{mn}^{(p-1)}(z',\boldsymbol{s}_1',\cdots,\boldsymbol{s}_m',\boldsymbol{t}_1',\cdots,\boldsymbol{t}_n')$$

$$\times\left(\frac{1}{z-z'}\right)^{m+n}\cdot\exp\left[\sum_{l=1}^{m}ik_{2l-1}\frac{(\boldsymbol{s}_l-\boldsymbol{s}_l')^2}{2(z-z')}\right.$$

$$\left.-\sum_{j=1}^{n}ik_{2j}\frac{(\boldsymbol{t}_j-\boldsymbol{t}_j')^2}{2(z-z')}\right]\prod_{l=1}^{m}d\boldsymbol{s}_l'\prod_{j=1}^{n}d\boldsymbol{t}_j',\quad (p\geqslant 1) \tag{29}$$

这正是积分方程式迭代解第一项以后的那些项。$\Gamma_{mn}^{(1)}$ 是经过一次散射的波对 m-n 阶矩的贡献，$\Gamma_{mn}^{(2)}$ 是经过二次散射的波对 m-n 阶矩的贡献，其余各项依次类推。用两种方法所得到的方程(3)的解完全相同。其物理过程可如图1那样来理解。

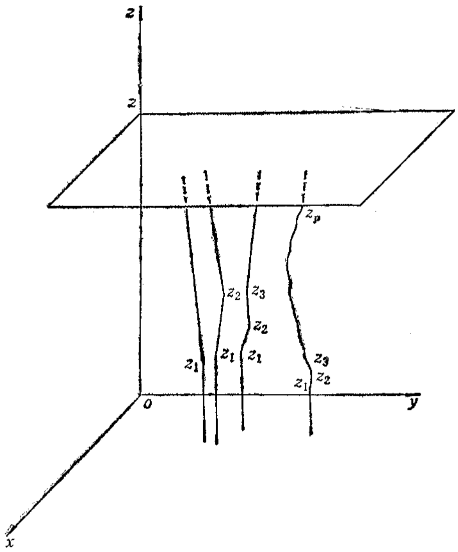

图1 受到不同次数散射到达平面的波

4. m-n 阶矩方程解的应用

利用上面所求得的 m-n 阶矩方程的解，可以研究各种波(平面波，球面波，波束等)在随机媒质中传播的多重散射效应。例如:

(1) *研究脉冲形状* 如在随机媒质中传播的脉冲平面波信号的起始强度为 $I_i(t)$，在观察处的强度为 $I(t)$，则[6]:

$$I(t)=\int G(t-t')I_i(t')dt' \tag{30}$$

这里 $G(t)$ 是二阶矩 Γ_{11} 的 Fourier 变换

$$G(t)=\frac{1}{2\pi}\int \Gamma_{11}(\omega_\alpha)e^{-i\omega_\alpha t}d\omega_\alpha \tag{31}$$

既然我们已能求得二阶矩 Γ_{11}，则很容易对输出脉冲 $I(t)$ 的形状进行研究。最形象的办法是作数值研究。对波束的脉冲形状在传播中的变化，也可以应用 Γ_{22} 和它的时间矩来研究，这在研究宽频脉冲的传播时特别有用。

(2) *研究强度涨落(闪烁)* 随机媒质中波传播的强度闪烁指数 σ_I^2 是由下式定义的:

$$\sigma_I^2=\frac{\langle(I-\langle I\rangle)^2\rangle}{\langle I\rangle^2} = \frac{\Gamma_{22}}{(\Gamma_{11})^2}-1 \tag{31}$$

式中 $I=\langle uu^*\rangle$，指波的强度。

应用 m-n 阶矩方程的解可求出 Γ_{11} 和 Γ_{22}，则可应用上式来讨论多重散射时波的强度涨降。

以上仅是对矩方程解应用的两个例子的简要讨论。限于篇幅，本文不一一列举其他各种应用，以后我们将在其他论文中继续用矩方程的解对波在随机媒质中传播的一些问题作进一步深入的研究。

作者对吕保维先生的热情鼓励表示感谢。

参考文献

[1] R. Dashen, *Journal of Mathematical Physics*, 12(1979), 894—920.
[2] 王一平，“抛物方程路积分解的导出”，电波学会1985年年会，西安，1985年8月。
[3] L. C. Lee, *Journal of Mathematical Physics*, 15(1974), 1431—1435.

[4] 吴健，前向多重散射矩方程的解及其在电离层中电波传播的应用，中国电波传播研究所硕士论文，1985年12月.
[5] 陆金康，数学物理方法补充讲义，第3章，复旦大学物理系，1965 年.
[6] Akira Ishimaru, Wave Propagation and Scattering in Randon Media, Vol. 2, p. 264 and p. 428, Academic Press, New York, 1978.
[7] B. J. Uscinsky, *Proc. R. Soc. Lond.* **A380**(1982), 137—162.
[8] B. J. Uscinsky, C. Macaskil, T. E. Ewart, *J. Acoust. Soc.* Am., **74**(1983), 1474—1483.

THE WAVE PROPAGATION IN A HOMOGENEOUS RANDOM MEDIUM —THE SOLUTION OF THE *m*-*n*th MOMENT EQUATION WITH DIFFERENT WAVE NUMBERS

Wang Zhensong

(Institute of Electronics, Academia Sinica, Beijing)

ABSTRACT In the study of the problems related to the wave propagation in random media, the solutions of the moment equations are often needed. The m-nth moment equation with different wave numbers is a differential equation. In the present paper, the author converts the parabolic differental equation to an integral equation by using the Green's functions. The solution of the moment equation is got by using the iteration method. The solution of the moment equation is also got by using the method of successive scattering. It is shown that the solution by two different methods are identical. The physical implication of the successive solution of the m-nth moment equation is explained. Some of the applications of the solutions of the mement equations are discussed briefly.

KEY WORDS Wave propagation; Homogeneous random medium; Multiple scattering; Markov process; Small angle forward scattering