干扰环境中部分极化信号的最佳滤波 [1]

王雪松　徐振海　代大海　肖顺平　庄钊文

(国防科技大学电子科学与工程学院　长沙　410073)

摘　要：研究了干扰环境中部分极化信号的最佳滤波问题，以信号干扰噪声比为优化对象，建立了带约束非线性优化模型，利用拉格朗日乘子法和参量矩阵的反对称性，将非线性最优化问题巧妙地转化为二次代数方程求根问题，得到了最优化问题两个备选解的解析表达式，给出了完整解法.

关键词：极化，滤波，干扰抑制，部分极化信号

中图分类号：TN97　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1009-5896(2004)04-0593-05

Optimal Filtering of Partially Polarized Signals in the Interference Background

Wang Xue-song　Xu Zhen-hai　Dai Da-hai　Xiao Shun-ping　Zhuang Zhao-wen

(*School of Electron. Sci. and Eng, National Univ. of Defense Tech., Changsha* 410073, *China*)

Abstract　The problem of optimal polarization filtering of partially polarized signals in the interference background is studied. With the index of Signal-to-Interference-and-Noise-Ratio (SINR) as the optimization object, a nonlinear optimization model is built. With the help of Lagrange multiplier method and properties of asymmetric matrix, the problem of SINR optimization is transferred to a root problem of a quadratic equation. Analytical expressions of two candidate solutions are achieved and the complete algorithm is presented.

Key words　Polarization, Filtering, Interference suppression, Partially polarized signals

1 引言

在现代电子战条件下，战场电磁环境日趋复杂恶劣，这对雷达、通信、导航、侦察等各类电子系统的抗干扰能力提出了日益严峻的挑战。如何有效地抑制干扰，改善信号接收质量，最大限度地发掘有用信息，成为各类电子系统设计者共同关心的问题 [1]。一般情况下，常规雷达处理抗干扰信号大多在频域、时域和空域进行，如频率捷变、脉宽鉴别、超低旁瓣天线、旁瓣对消等 [2]。近年来，随着雷达极化理论研究的逐步深入和器件水平的大幅度提高，极化滤波在雷达抗干扰技术领域中日渐占据了愈来愈重要的地位 [3−5]。

在很多应用场合，极化滤波可以归结为对混杂在干扰背景中有用信号的最佳接收问题，信号干扰噪声功率比 (SINR) 是最常见的衡量信号接收质量的指标之一，因此常被作为极化滤波的优化函数 [5−7]。研究 SINR 的极化滤波问题，具有重要的理论意义。因为在实际应用中，为了适应复杂多变的工作环境，常采用自适应极化估计、干扰抑制、信号匹配等措施或准则来设计极化滤波器 [6,8−10]，以克服或弥补由于先验知识的缺乏而导致的滤波性能损失。从极化滤波器性能分析与评估的观点来看，SINR 极化滤波的最优解为度量实际极化滤波器的性能提供了一个理论参考上界，因而具有重要的指导意义。

从数学上看，SINR 极化滤波实质上是一个带约束非线性最优化问题 [7]，迄今为止，尚未见到该最优化问题的完整解法。文献 [5] 研究了完全极化和单干扰源条件下的 SINR 优化问题，给出了最佳接收极化的解析公式。针对实际中更常见的多辐射源和部分极化情况，文献 [1, 6, 7]

[1] 2002-12-19 收到，2003-03-20 改回
全国优秀博士学位论文专项资金 (08100101) 和国家自然科学基金 (69902010) 资助项目

对 SINR 极化滤波进行了更具一般性的研究，并提出了启发性的求解思路。本文力求在已有研究的基础上，得到 SINR 最优化问题的新的求解方法。文中第 2 节给出了部分极化信号 SINR 滤波的最优化数学模型，导出了一个参量矩阵；第 3 节给出了该参量矩阵的若干重要性质，这些性质对于最终求解 SINR 滤波问题具有重要的作用；在第 4 节中，利用拉格朗日乘子法和参量矩阵的性质，巧妙地把非线性的 SINR 最优化问题转化成一个二次代数方程求根问题，并得到了 SINR 最优化问题的两个备选解的解析表达式；第 5 节给出了 SINR 最优化问题解法的完整流程和相应的算例。

2 部分极化信号的 SINR 优化模型 [7]

设在雷达接收天线波束内存在 M 个信号辐射场和 N 个干扰辐射场，所有这 $M+N$ 个信号均互不相关，它们的 Stokes 矢量分别为 $\boldsymbol{J}_{Sm}$ 和 $\boldsymbol{J}_{In}$[11]，雷达接收天线的 Stokes 矢量为 $\boldsymbol{J}_r$，满足单位增益完全极化约束 [1]，即 $\boldsymbol{J}_r$ 可以写作如下形式： $\boldsymbol{J}_r=[1,\boldsymbol{g}_r^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，其子矢量 $\boldsymbol{g}_r$ 的范数为 1，即 $\|\boldsymbol{g}_r\|^2=\boldsymbol{g}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_r=1$，上标 “ T ” 表示转置。雷达对信号的接收质量用 SINR 来衡量，

$$\mathrm{SINR}=\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{2}\boldsymbol{J}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{Sm}\Bigg/\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2}\boldsymbol{J}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{In}+\frac{1}{2}N_0\right) \tag{1}$$

式中分子和分母中第一项分别表示雷达收到的信号功率和干扰功率 [11]，分母第二项 $((1/2)N_0)$ 表示接收机噪声功率。

由式 (1) 可看出， SINR 是雷达接收极化 $\boldsymbol{g}_r$ 的函数，适当调整 $\boldsymbol{g}_r$，可使 SINR 达到最大，这就是 SINR 极化滤波的数学本质，它可用一个带约束的非线性优化模型来表示：

$$\max\mathrm{SINR}=(\boldsymbol{J}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_S)/(\boldsymbol{J}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_I+N_0),\quad \mathrm{s.t.}\ \|\boldsymbol{g}_r\|=1 \tag{2}$$

式 (2) 中的 $\boldsymbol{J}_S$ 和 $\boldsymbol{J}_I$ 分别代表雷达接收波束中信号场和干扰场的合成 Stokes 矢量，并记为 $\boldsymbol{J}_S=[g_{s0},\boldsymbol{g}_S^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{J}_I=[g_{I0},\boldsymbol{g}_I^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 。

用拉格朗日乘子法可以求解式 (2) 的非线性优化问题。省略掉繁琐的推导 (参见文献 [1,7])，直接给出对拉格朗日函数求梯度后的表达式：

$$(\boldsymbol{A}-\mu\boldsymbol{I})\boldsymbol{g}_r=\boldsymbol{g} \tag{3}$$

其中 μ 为拉格朗日乘子， $\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵。

$$\boldsymbol{g}=g_{s0}\boldsymbol{g}_I-(g_{I0}+N_0)\boldsymbol{g}_S \tag{4}$$

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{g}_S\boldsymbol{g}_I^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{g}_I\boldsymbol{g}_S^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

3 矩阵 A 的性质

由式 (5) 知 $\boldsymbol{A}$ 为三阶反对称矩阵，即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$，反对称矩阵的秩必为偶数 [12]，故若 $\boldsymbol{A}$ 为非零矩阵，其秩必为 2，换言之，非零 $\boldsymbol{A}$ 矩阵必有一个零特征值。下面证明， $\boldsymbol{A}$ 的二次幂 (即 $\boldsymbol{A}^2$) 为非正定对称阵。由 $\boldsymbol{A}$ 的反对称性易证 $\boldsymbol{A}^2$ 为对称阵，即 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}=(-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})(-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=(\boldsymbol{A}^2)^{\mathrm{T}}$；考虑任意三维实矢量 x，构造 $\boldsymbol{A}^2$ 的二次型，有 $x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^2x=x^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})x=-\|\boldsymbol{A}x\|^2$，可见 $\boldsymbol{A}^2$ 的二次型恒不大于零。由此证明了 $\boldsymbol{A}^2$ 为非正定对称阵。

进一步可以证明，非零的 $\boldsymbol{A}^2$ 矩阵有且仅有两个相同的负特征值。实反对称矩阵的正交分解定理表明 [13]，存在正交矩阵 $\boldsymbol{U}_A$，使得非零矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有如下分解形式：

$$\boldsymbol{U}_A\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}_A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&\beta\\0&-\beta&0\end{bmatrix}$$

其中 β 为实数．由此可知， $\boldsymbol{A}^2$ 矩阵的正交对角化形式为

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{U}_A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{U}_A \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{\Lambda}=\operatorname{diag}\{0,-\beta^2,-\beta^2\}$, β^2 即为 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征值．

4 SINR 优化问题的求解

容易证明，若 $\boldsymbol{A}$ 为零矩阵或 $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{0}$ ，实际上都意味着信号极化与干扰极化相同或正交 (见附录)，此时最佳接收极化必为信号极化．因此下面的讨论中均假定矩阵 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{g}\neq\boldsymbol{0}$ ．

由式 (3) 得 $\boldsymbol{g}_r=(\boldsymbol{A}-\mu\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{g}$ ，将其与 $\boldsymbol{g}_r$ 的单位增益完全极化约束条件联立，可解出式 (2) 带约束最优化问题的 Kuhn-Tucker 点 [14] ，这些点是最佳极化的候选点．

首先求拉格朗日乘子 μ ．将 $\boldsymbol{g}_r$ 表达式代入 $\|\boldsymbol{g}_r\|=1$ 约束条件，得 $\|(\boldsymbol{A}-\mu\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{g}\|=1$ ，展开得

$$\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\mu^2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^2)^{-1}\boldsymbol{g}=1 \tag{7}$$

根据式 (6) ，知 $\boldsymbol{A}^2$ 矩阵可正交对角化，正交矩阵为 $\boldsymbol{U}_A$ ．对 $\boldsymbol{g}$ 做正交变换，令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{U}_A\boldsymbol{g}=[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}}$ ，代入式 (7) 得

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\mu^2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Lambda})^{-1}\boldsymbol{x}=1$$

展开得关于 μ^2 的有理分式，

$$x_1^2/\mu^2+(x_2^2+x_3^2)/(\mu^2+\beta^2)=1$$

整理得

$$\mu^4+\mu^2(\beta^2-\|\boldsymbol{x}\|^2)-x_1^2\beta^2=0$$

解得 μ 的两个实根为

$$\mu_{1,2}=\pm\left[\frac{1}{2}(\|\boldsymbol{x}\|^2-\beta^2+\sqrt{(\|\boldsymbol{x}\|^2-\beta^2)^2+4x_1^2\beta^2})\right]^{1/2} \tag{8}$$

进而得 $\boldsymbol{g}_{r1,2}=(\boldsymbol{A}-\mu_{1,2}\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{g}$ ．将 $\boldsymbol{g}_r$ 的两个候选解分别代入式 (2) 中计算 SINR 值，取最大者为最优解．

需要指出的是，文献 [7] 对 $\boldsymbol{g}=0$ 情况下的 SINR 优化问题的求解思路是不合理的，因为不难验证，实反对称矩阵的特征值和特征矢量可能是复的，直接以 $\boldsymbol{A}$ 的复特征矢量作为接收极化 $\boldsymbol{g}_r$ 的备选解，是没有物理意义的．

5 SINR 优化问题的求解算法流程

根据上节的讨论，给出 SINR 极化优化问题解法的完整流程如图 1 所示．算法中涉及了矩阵的数值计算问题，主要包括正规矩阵的正交对角化和矩阵求逆运算．这两种计算对目前的数值分析技术而言并不存在难度．但需要说明的是，直接利用反对称矩阵的正交分解形式求正交矩阵 $\boldsymbol{U}_A$ 和参数 β 是不容易的，若先对 $\boldsymbol{A}^2$ 矩阵进行正交分解，即可直接得到 $\boldsymbol{U}_A$ 和 $-\beta^2$ ．

用图 1 算法对文献 [1] 和文献 [7] 中的数值算例进行计算，得到结果如下： (1) 完全极化情形：设信号和干扰的极化矢量分别为 $\boldsymbol{J}_S=[1,0,1,0]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{J}_I=[1,1,0,0]^{\mathrm{T}}$ ，测量系统噪声功率电平为 $N_0=1$ ，计算结果为： $\mu_1=2$ ，相应的 $\boldsymbol{g}_{r1}=[-0.8,0.6,0]^{\mathrm{T}}$ ，SINR =1.333; $\mu_2=-2$ ，相应的 $\boldsymbol{g}_{r2}=[0,-1,0]^{\mathrm{T}}$, SINR=0 ；故得最优接收极化 $\boldsymbol{g}_r=[-0.8,0.6,0]^{\mathrm{T}}$ ． (2) 部分极化情形：设信号和干扰的极化矢量分别为 $\boldsymbol{J}_S=[2,0,1,0]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{J}_I=[2,1,0,0]^{\mathrm{T}}$ ，测量系统噪声功率电平为 $N_0=1$ ，计算结果为： $\mu_1=3.464$ ，相应的 $\boldsymbol{g}_{r1}=[-0.764,0.646,0]^{\mathrm{T}}$, SINR=1.183; $\mu_2=-2$ ，

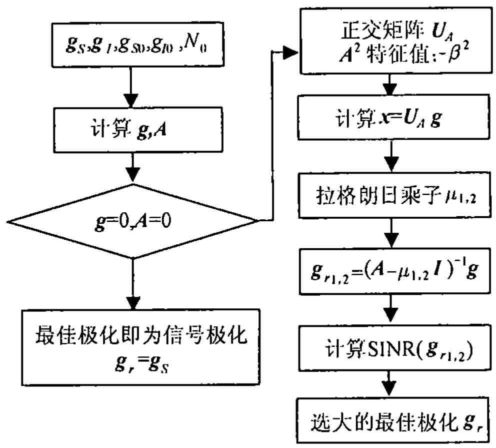

图 1 SINR 极化优化问题的解法流程

相应的 $g_{r2}=[0.302,-0.953,0]^{\mathrm{T}}$, SINR=0.317 ; 故得最优接收极化 $g_r=[-0.764,0.646,0]^{\mathrm{T}}$. 以上结果与文献 [1, 7] 中的结果是一致的. (3) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{0}$ 的情形, 易得最优接收极化为 $g_r=g_S$.

6 结束语

本文研究了部分极化信号的最佳极化滤波问题, 滤波准则是使信号干扰噪声比 (SINR) 达到最大. 在此准则下, 极化滤波实际上是一个带约束非线性最优化问题. 在拉格朗日乘子法的基础上, 通过利用参量矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的反对称性质, 这个非线性最优化问题被巧妙转化为一个二次代数方程求根问题, 并顺利推出了最优极化的全部两个备选解. 概括而言, 本文的贡献主要在于将 SINR 最佳极化的备选解数量由 6 个缩小到 2 个, 大大缩小了寻优范围, 而且给出了备选解的解析表达式和完整的求解算法.

作为滤波指标, 信号干噪比 (SINR) 综合考虑了外界干扰和接收机内部噪声两方面的因素, 因而比信噪比 (SNR) 或信干比 (SIR) 等工程上常用的指标更能全面反映无线电接收机接收信号的效果. 但在实际应用中, 直接以 SINR 作为优化函数的极化滤波器并不多见, 一个原因就是它对设计滤波器所需要的先验知识要求偏高, 因而实际中诸如极化干扰抑制和极化信号匹配等对先验知识要求不高的滤波器反而更加常见. 但在不同的电磁环境中, 不同的极化滤波器滤波效果不同, 如何评估滤波器性能并适当选择最佳或者 "准最佳" 极化滤波器, 是值得进一步研究的问题.

附录

$\boldsymbol{A}=0$ 或 $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{0}$ 情况下, g_S 与 g_I 平行的证明:

(1) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ 的情形

仅需考虑 g_S 和 g_I 均为非零矢量, 令 $g_S=\alpha g_I+g_{I\perp}$, 其中 α 为实数, $g_{I\perp}$ 为与 g_I 垂直的矢量. 代入 $\boldsymbol{A}=g_S g_I^{\mathrm{T}}-g_I g_S^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$, 得

$$g_I g_{I\perp}^{\mathrm{T}}=g_{I\perp}g_I^{\mathrm{T}}$$

若以 g_I 为正交基, 不妨设为 $[1,0,0]^{\mathrm{T}}$, 则 $g_{I\perp}$ 可表示为 $[0,x,y]^{\mathrm{T}}$, 代入上式立得 $g_{I\perp}=0$, 即 g_S 和 g_I 必为平行矢量 (代表空间极化相同或正交) .

(2) $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{0}$ 的情形

若 $g = 0$ ，即 $g = g_{s0}\boldsymbol{g}_I - (g_{I0} + N_0)\boldsymbol{g}_S = 0$ ，则 $\boldsymbol{g}_S$ 和 $\boldsymbol{g}_I$ 必为同向矢量，且满足 $\boldsymbol{g}_S = [g_{s0}/(g_{I0}+N_0)]\boldsymbol{g}_I$. 设 $k = g_{s0}/(g_{I0}+N_0)$, 则有 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{g}_S\boldsymbol{g}_I^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{g}_I\boldsymbol{g}_S^{\mathrm{T}} = k\boldsymbol{g}_I\boldsymbol{g}_I^{\mathrm{T}} - k\boldsymbol{g}_I\boldsymbol{g}_I^{\mathrm{T}} \equiv \boldsymbol{0}$, 此时 SINR 可表示为

$$\mathrm{SINR} = (g_{s0} + \boldsymbol{g}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_S)/(N_0 + g_{I0} + \boldsymbol{g}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_I) \equiv k$$

这说明，用任意极化接收所得的 SINR 都是一样的，但此时宜以信号极化作为接收极化，因为这样能使得信号接收功率达到最大。

参 考 文 献

[1] 王雪松. 宽带极化信息处理的研究. [博士论文], 长沙：国防科技大学电子科学与工程学院， 1999, 6.
[2] 刘德树. 雷达反对抗的基本理论与技术. 北京：北京理工大学出版社， 1989, 第一章， 4–10.
[3] Boerner W M. Direct and inverse methods in radar polarimetry. Netherlands Kluwer, Academic Publishers, 1992, Topic IV: Polarimetric Vector Signal Process: Target vs, Clutter Discrimination.
[4] Giuli D. Polarization diversity in radars. *Proc. IEEE*, 1986, 74(2): 245–269.
[5] Stapor D P. Optimal receive antenna polarization in the presence of interference and noise. *IEEE Trans. on AP*, 1995, AP-43(5): 473–477.
[6] 王雪松，庄钊文，肖顺平，曾勇虎. 极化信号的优化接收理论：完全极化情形. 电子学报， 1998, 26(6): 42–46.
[7] 王雪松，庄钊文，肖顺平. 极化信号的优化接收理论：部分极化情形. 电子科学学刊， 1998, 20(4): 468–473.
[8] 张国毅. 高频地波雷达极化抗干扰技术的研究. [博士论文], 哈尔滨：哈尔滨工业大学， 2002, 5.
[9] Poelman A J, Guy J R F. Multinotch logic-product polarization suppression filters: A typical design example and its performance in a rain clutter environment. *IEE Proc.-F*, 1984, 131(4): 383–396.
[10] Giuli D, Fossi M, Gherardelli M. A technique for adaptive polarization filtering in radars. Proc. of IEEE Int. Radar Conf., Arlington, VA, 1985: 213–219.
[11] 庄钊文，肖顺平，王雪松. 雷达极化信息处理及应用. 北京：国防工业出版社， 1999, 第五章， 291–344.
[12] 王朝瑞，史荣昌. 矩阵分析. 北京：北京理工大学出版社， 1989, 第五章.
[13] 合恩 R A, 约翰逊 C R 著，杨奇译. 矩阵分析. 天津：天津大学出版社， 1989, 第二章.
[14] 席昭瀚，曹忻. 最优化方法基本教程. 南京：东南大学出版社， 1990: 189–190.

王雪松： 男， 1972 年生，博士，副教授，研究室主任，中国电子学会高级会员，遥感遥测遥控分会委员. 发表国际国内论文 120 余篇，获得第四届全国百篇优秀博士学位论文，合作出版专著 2 部，获军队科技进步一等奖 3 项，部委科技进步二、三等奖 2 项. 研究兴趣为：雷达信号处理与目标识别、综合电子战、雷达系统仿真.
徐振海： 男， 1977 年生，博士生，发表学术论文 20 余篇，研究方向为：雷达极化信息处理、目标检测与识别、综合电子战.
代大海： 男， 1980 年生，博士生，研究方向为：雷达信号处理与目标识别.