

处理反对称结构电磁散射问题的 广义镜像法*

郭英杰

(西北电讯工程学院, 西安)

摘要 本文提出一种处理反对称结构的电磁散射问题的广义镜像法, 将它和数值方法相结合, 可以大量节省求解散射场过程中所需要的计算机内存和计算时间. 本文就二维问题对此进行了详细讨论, 并给出了计算实例.

关键词 电磁散射; 广义镜像法; 反对称结构

一、引言

中低频散射问题, 一般是通过积分方程, 借助于数值方法求解. 但是, 当散射体电尺寸较大或形状较复杂时, 这种方法要受到计算机内存和速度的限制. 针对此问题, 作者提出了处理对称结构的不对称散射问题的广义镜像法 (GIM)^[1]. 通过引入若干镜像源, 原始问题被分解成几个具有不同对称性态、相互独立的子问题, 而求解每个子问题所需要的存储量和计算时间, 远小于直接求解原始问题. 这样, 总存储量和计算时间都得到相当程度的减少.

进一步的研究表明, 对另一类重要结构——反对称结构, 特别是反对称双柱, 广义镜像法同样有效, 只是构造广义镜像源的方法有所不同. 本文首先就二维电磁散射问题, 对此进行了一般性的阐述. 然后, 将这种方法和扩展边界条件法相结合, 具体用于求解反对称理想导体单柱与双柱对 TM 波的散射问题, 并给出了计算实例.

二、基本原理

为简明起见, 本文仅考虑二维问题, 即无限长柱体对垂直入射 TM 波或 TE 波的散射.

由于反对称结构一直未曾引起人们的注意, 因此, 我们首先给出其基本定义:

定义 1 设一结构的介电常数和磁导率分别为 $\epsilon(\mathbf{r})$ 、 $\mu(\mathbf{r})$, 若存在极坐标系 (ρ, θ) , 使得 $\forall \rho, \theta$, 成立

$$\epsilon(\rho, \theta) = \epsilon(\rho, \theta + \pi) \quad (1-a)$$

$$\mu(\rho, \theta) = \mu(\rho, \theta + \pi) \quad (1-b)$$

* 1987年2月3日收到, 1987年11月24日修改定稿.

则称此结构是反对称的, 在理想导体情况下, (1)式简化为

$$\rho(\theta) = \rho(\theta + \pi), (\forall \theta) \quad (2)$$

式中 $\rho = \rho(\theta)$ 为导体柱轮廓线的极坐标方程。虽然定义 1 具有一般性, 但考虑到二维反对称特性主要存在于双柱结构, 我们再给出一辅助定义。

定义 2 设两平行柱体的介电常数和磁导率分别在两个不同的极坐标系 (ρ_1, θ_1) , (ρ_2, θ_2) 中表示为 $\varepsilon_1(\rho_1, \theta_1)$, $\mu_1(\rho_1, \theta_1)$ 和 $\varepsilon_2(\rho_2, \theta_2)$, $\mu_2(\rho_2, \theta_2)$, 这两个极坐标系是通过极坐标轴的平移得到的。若 $\forall \rho_1 = \rho_2, \theta_1 = \theta_2$, 成立

$$\varepsilon_1(\rho_1, \theta_1) = \varepsilon_2(\rho_2, \theta_2 + \pi) \quad (3.a)$$

$$\mu_1(\rho_1, \theta_1) = \mu_2(\rho_2, \theta_2 + \pi) \quad (3.b)$$

则称两介质柱是互为反对称的。对理想导体情况, (3)式简化为

$$\rho_1(\theta_1) = \rho_2(\theta_2 + \pi) (\forall \theta_1 = \theta_2) \quad (4)$$

式中 $\rho_1 = \rho_1(\theta_1)$ 和 $\rho_2 = \rho_2(\theta_2)$ 分别为两导体柱的轮廓线方程。图 1 给出了反对称单、双导体柱(或均匀介质柱)的几个例子。

一般情况下, 反对称结构并不具有对称面。因此, 文献[1]中给出的广义镜像法并不直接适用。但是, 可以根据(1)–(4)式, 通过另一方法引入镜像源。

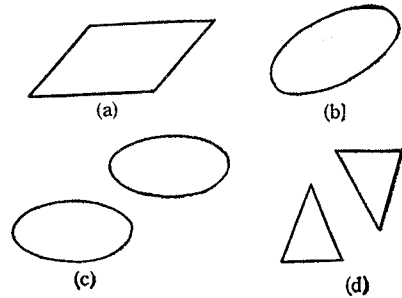


图 1 反对称柱状结构示意

考虑一典型的反对称结构——轮廓线为平行四边形的介质柱。假设在 (ρ_0, θ_0) 处置一强度为 I 的无穷长电流丝(见图 2(a)), 容易看出, 空间电磁场不具有任何重复性。如果在 $(\rho_0, \theta_0 + \pi)$ 处引入广义镜像源, 则根据场的线性迭加原理, 图 2(a) 所示的问题可以分解为图 2(b) 和图 2(c) 所示的两个子问题。由于(1)式和子问题中源的对称, 柱内轴向电场必然满足

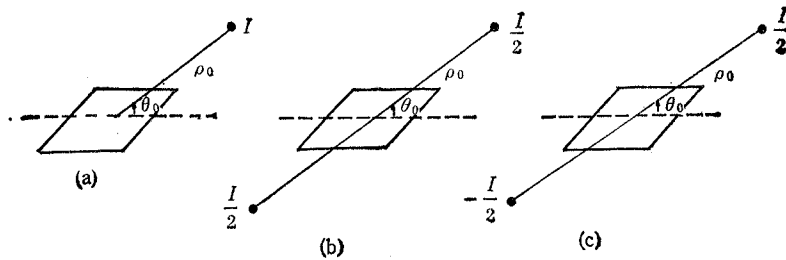


图 2 用 GIM 处理反对称单柱的散射

$$E_x(\rho, \theta) = \pm E_x(\rho, \theta + \pi), (\forall \rho, \theta) \quad (5)$$

式中符号“+”、“-”分别对应于图 2(b) 和图 2(c) 的情况。将介质柱换成导体柱, 则(5)式应代之以

$$J_x(\theta) = \pm J_x(\theta + \pi), (\forall \theta) \quad (6)$$

$J_z(\theta)$ 代表导体表面电流分布。(5),(6)两式表明,在每一子问题中,内部场(或表面电流)分布除系数因子(± 1)外,在由 $\theta = 0$ 平面分开的上下两部分上也是反对称的。因此,当用数值方法求解时,未知数数目可减 $1/2$,存储量可减 $3/4$ 。

其次,考虑图3(a)所示反对称介质双柱的散射。类似地,它也可以分解为图3(b)和3(c)所示的两个子问题。此时,源的位置设为 (ρ_{10}, θ_{10}) ,镜像源的位置为 $(\rho_{20}, \theta_{20} + \pi)$ ($\rho_{10} = \rho_{20}, \theta_{10} = \theta_{20}$)。与(5),(6)式相对应的方程为

$$E_z^1(\rho_1, \theta_1) = \pm E_z^2(\rho_2, \theta_2 + \pi), \quad (\nabla \rho_1 = \rho_2, \theta_1 = \theta_2) \quad (7)$$

$$J_z^1(\theta_1) = \pm J_z^2(\theta_2 + \pi), \quad (\nabla \theta_1 = \theta_2) \quad (8)$$

(7),(8)两式表明,除系数因子(± 1)外,在每一子问题中,一柱的内部场(或表面电磁流)分布,在旋转 π 角后,与另一柱的内部场(或表面电磁流)分布相同。据此,求解每一子问题所需要的存储量也可减 $3/4$,即与求解单柱散射问题所需存储相同。

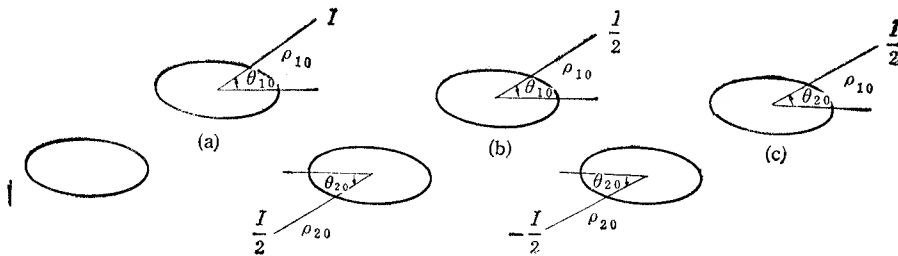


图3 用 GIM 处理反对称双柱的散射

以上研究的均是 TM 波的散射。若将电流丝源换成磁流丝源,将电场 E_z 代之以磁场 H_z ,即可方便地得到 TE 波类似结果。平面波的散射对应于源移至无穷远处时的情况。

三、在导体柱散射问题中的应用

作为对上述原理的进一步说明,下面具体研究理想导体柱对 TM 波的散射问题。由单导体柱散射得到的扩展边界条件方程为^[4]

$$E_z^i(\rho) = (k_0 \eta_0 / 4) \int_{\Gamma} J_z(\rho') H_0^{(2)}(k_0 |\rho - \rho'|) dl \quad (9)$$

$$(\rho \in \Omega)$$

式中 Γ 为柱的边界, Ω 为 Γ 的内部区域, k_0, η_0 分别代表自由空间的波数和波阻抗, E_z^i 代表入射电场, $H_0^{(2)}(x)$ 为零阶第二类汉克尔函数。设导体柱满足反对称条件(2)式,由图2所示的广义镜像法可得

$$E_z^i(\rho) = \frac{k_0 \eta_0}{4} \int_{\Gamma} J_z^e(\rho') H_0^{(2)}(k_0 |\rho - \rho'|) dl \quad (10-a)$$

$$E_z^e(\rho) = \frac{k_0 \eta_0}{4} \int_{\Gamma} J_z^e(\rho') H_0^{(2)}(k_0 |\rho - \rho'|) dl \quad (10-b)$$

$$(\rho \in \Omega)$$

式中上标“e”、“o”分别对应于偶激励(正镜像)和奇激励(负镜像)情况。

当柱体表面形状不太复杂时,(9)式用于具体求解的形式为^[1]

$$\frac{k_0 \eta_0}{4} \int_{(\theta'=0)}^{(\theta'=2\pi)} J_z(\rho') H_n^{(2)}(k_0 \rho') e^{-in\theta'} dl(\theta') = a_n, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N) \quad (11)$$

式中 a_n 表示入射波的柱面波展开系数, N 代表适当选取的截断数。利用(9)式,(10)式可化为

$$\frac{k_0 \eta_0}{2} \int_{(\theta'=0)}^{(\theta'=\pi)} J_z^e(\theta') H_{2n}^{(2)}(k_0 \rho') e^{-i2n\theta'} dl(\theta') = a_{2n}, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N^e) \quad (12-a)$$

$$\frac{k_0 \eta_0}{2} \int_{(\theta'=0)}^{(\theta'=\pi)} J_z^o(\theta') H_{2n+1}^{(2)}(k_0 \rho') e^{-i(2n+1)\theta'} dl(\theta') = a_{2n+1}, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N^o) \quad (12-b)$$

式中

$$N^e = \begin{cases} N/2, & N \text{ 为偶} \\ (N-1)/2, & N \text{ 为奇} \end{cases}$$

$$N^o = \begin{cases} (N-1)/2, & N \text{ 为奇} \\ N/2 - 1, & N \text{ 为偶} \end{cases}$$

显然,与(11)式相比,用矩量法独立求解(12-a)和(12-b)式所需要的基函数数目减少1/2,需要的存储量减3/4。由于只需要形成两个子矩阵,且两个矩阵元素所需要的积分运算量减少了1/2,因此,形成系数矩阵所需要的总计算量也减少3/4。最后,对求解高阶线性代数方程组而言,需要的计算量与 N^3 成正比, N 为方程组的阶数。这样,两次求解方程组所化费的总时间也减少3/4。 $J^e(\theta)$ 和 $J^o(\theta)$ 的线性迭加,给出导体柱上的“真实”电流分布

$$J_z(\theta) = \begin{cases} J^e(\theta) + J^o(\theta), & 0 \leq \theta \leq \pi \\ J^e(\theta - \pi) - J^o(\theta - \pi), & \pi \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \quad (13)$$

对双柱散射,关于两柱上表面电流 $J_z^1(\theta_1)$ 、 $J_z^2(\theta_2)$ 的扩展边界条件方程为

$$\frac{4}{k_0 \eta_0} E_z^i(\rho) = \int_{\Gamma_1} J_z^1(\theta_1) H_0^{(2)}(k_0 |\rho - \rho'_1|) dl + \int_{\Gamma_2} J_z^2(\theta_2) H_0^{(2)}(k_0 |\rho - \rho'_2|) dl \quad (14a)$$

$$(\rho \in \Omega_1)$$

$$\frac{4}{k_0 \eta_0} E_z^i(\rho) = \int_{\Gamma_1} J_z^1(\theta_1) H_0^{(2)}(k_0 |\rho - \rho'_1|) dl + \int_{\Gamma_2} J_z^2(\theta_2) H_0^{(2)}(k_0 |\rho - \rho'_2|) dl \quad (14-b)$$

$$(\rho \in \Omega_2)$$

式中 Γ_i 和 Ω_i 分别代表第“ i ”个导体柱的边界和内部区域。由(8)式和图3所示方法,并注意到取 $\rho \in \Omega_1$ 和 $\rho \in \Omega_2$ 所得结果完全相同,得

$$\frac{4}{k_0 \eta_0} E_z^i(\rho) = \int_{\Gamma_1} J_z^1(\theta_1) H_0^{(2)}(k_0 |\rho - \rho'_1|) dl + \int_{\Gamma_2} J_z^2(\theta_2 + \pi) H_0^{(2)}(k_0 |\rho - \rho'_2|) dl, \quad (15-a)$$

$$(\rho \in \Omega_1)$$

$$\frac{4}{k_0 \eta_0} E_z^{i0}(\rho) = \int_{r_1} J_z^c(\theta_1) H_0^{(2)}(k_0 |\rho - \rho'_1|) dl - \int_{r_2} J_z^c(\theta_2 + \pi) H_0^{(2)}(k_0 |\rho - \rho'_2|) dl, \quad (\rho \in Q_1) \tag{15-b}$$

(15-a)和(15-b)式是去耦的,式中仅分别含有 $J_z^c(\theta)$ 和 $J_z^c(\theta)$, 因此可以独立求解. 与直接求解(14)式相比, 存储和计算量的减少是显而易见的. 两导体柱表面上的“真实”电流为

$$J_z^r(\theta_1) = J_z^c(\theta_1) + J_z^c(\theta_1) \tag{16-a}$$

$$J_z^r(\theta_2) = J_z^c(\theta_2 + \pi) - J_z^c(\theta_2 + \pi) \tag{16-b}$$

为便于对结果进行检验, 我们首先利用上述理论, 针对“人为”形成的反对称结构对 TM 型平面波的散射问题进行了散射场计算. 此处“人为”一词表明, 散射体的反对称特

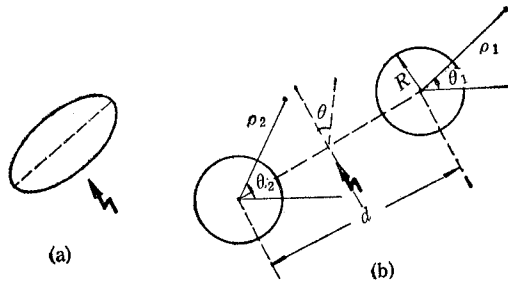


图 4 两个“人为”形成的反对称结构

表 1 双导体圆柱的散射场 ($k_0 R = 1, k_0 d = 3$)

观察角 $\theta(^{\circ})$	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180
本文结果	3.131	2.591	2.511	0.882	0.799	0.806	1.033	1.574	2.167	2.429
Row 的结果	3.136	2.591	2.511	0.879	0.801	0.806	1.029	1.576	2.170	2.429

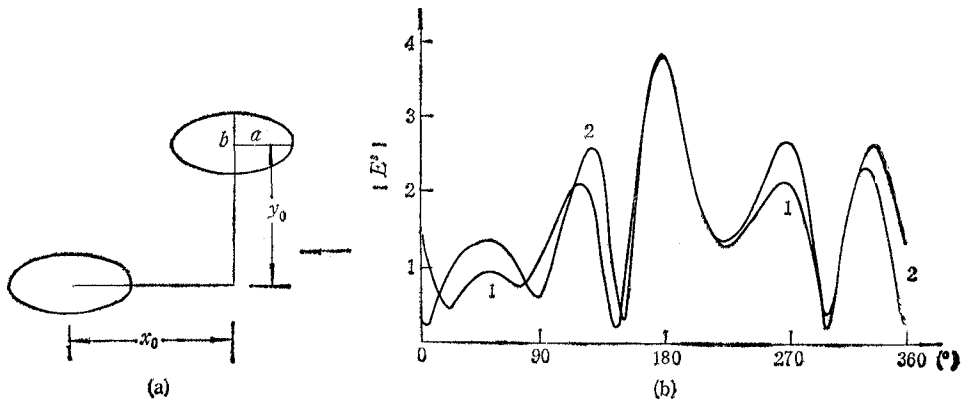


图 5 (a)反对称双椭圆圆柱, (b) TM 波散射方向图

$a = 0.25\lambda, b = 0.2\lambda$; 曲线 1: $x_0 = y_0 = 0.7\lambda$; 曲线 2: $x_0 = y_0 = 0.8\lambda$.

性是通过适当选取坐标系故意得到的, 而它们本身具有常规的面对称特性。第一个算例是单椭圆导体柱的散射问题(见图 4), 所得的散射方向图与文献[2]完全吻合。第二个算例是平行导体圆柱的散射问题, 表 1 给出了本文方法在导出线性代数方程组阶数为 11 时, 所得结果与 Row 的结果的对比, 二者基本吻合。这表明本文所述的理论及程序是正确的。两个算例中均采用了指数型三角函数作为矩量法的基函数^[1]。图 5 给出了用本文方法得到的一反对称双椭圆柱的散射方向图。图中的箭头代表来波方向。

四、结 语

如何降低存储量要求、减少计算时间, 以便用于更高的频段, 是近年来电磁领域中数值方法的重要发展方向^[5-7]。本文针对一类广泛应用但还未引起特别重视的重要结构——反对称结构, 提出一种可大量节省存储和计算时间的预处理方法。文中的讨论虽然集中于二维问题和扩展边界条件法, 但容易看出, 它对三维反对称结构散射问题的一般矩量法解, 也是同样适用的。关于三维反对称结构的一般定义及其散射问题的具体处理方法, 我们已另文给出^[6]。

作者感谢导师任朗教授和茅于宽教授等几位老师的悉心指导和热情帮助。

参 考 文 献

- [1] 郭英杰, 茅于宽, 西北电讯工程学院学报, 1986 年, 第 4 期, 第 9—15 页。
- [2] D. R. Wilton, R. Mittra, *IEEE Trans. on AP*, **AP-20** (1972), 310-317.
- [3] C. Y. Wu, D. K. Cheng, *IEEE Trans. on EMC*, **EMC-19** (1977), 81-88.
- [4] 梁昌洪, 孟志奇, 电子学报, 1986 年, 第 3 期, 第 14—18 页
- [5] 郭英杰, 谐振区电磁散射方法的理论及其应用, 西安交通大学博士论文, 1987 年。
- [6] 郭英杰, 处理对称与反对称结构电磁散射问题的统一理论, 1987 年, 全国天线年会论文集, 杭州。

GENERALIZED IMAGE METHOD FOR DEALING WITH THE ELECTROMAGNETIC SCATTERING FROM ANTI-SYMMETRIC OBJECTS

Guo Yingjie

(Northwest Telecommunication Engineering Institute, Xi'an)

ABSTRACT The generalized image method (GIM) was presented to deal with the electromagnetic scattering from anti-symmetric objects. Combined with numerical methods, it can make the required storage and CPU time to be greatly reduced. The method was thoroughly studied in two dimensional problems and some numerical examples were given.

KEY WORDS Electromagnetic scattering; Generalized image method; Anti-symmetric object