

对面天线分析中雅可比- 贝塞尔级数方法的进一步研究*

易 力

(中国空间技术研究院总体部)

提 要

在密特拉 (R. Mittra) 等作者 (1979) 对圆投影口径面天线所做工作的基础上, 本文利用修正的雅可比多项式的独特递推关系, 将面天线分析中的雅可比-贝塞尔级数方法推广到椭圆投影口径抛物面天线的远区场计算中。同时导出了级数展开系数 ${}^p B_m^n$ 的一层新的部分递推关系, 使数值积分所用机时降低为原来的三分之一左右。

一、引 言

雅可比-贝塞尔级数方法^[1]最适合于计算圆投影口径面天线的辐射场, 但在处理其它类型口径面天线时却存在着很大的局限性。原因在于该方法中逼近等效电流分布的修正的雅可比多项式仅在单位圆上正交。以往文献中多用于进行平面椭圆口径面天线的口径场法分析, 而不易用于处理带反射面曲率的实际问题。由于椭圆关系引起的复杂性, 甚至使文献 [1] 中的递推关系也难以直接应用。

为此, 本文引入修正的雅可比多项式的另外两个递推公式, 经过适当变换, 导出了远场条件下椭圆投影口径型级数展开系数 ${}^p B_m^n$ 中关于 p 的代数递推关系, 从而避免了大量的二重数值积分运算。结果表明, 上述工作保持了雅可比-贝塞尔级数方法在圆口径下的优良特点。

此外, 大馈源偏焦或多馈源在反射面天线上造成的复杂电流分布, 要求所逼近的雅可比级数要取足够多项, 这样, 相应的展开系数 ${}^p B_m^n$ 中的关于 m, n 的项也需用多次二重数值积分来确定。为进一步提高计算效率, 本文给出该系数中关于 m 的一层新的部分递推关系, 可将数值积分机时压缩到原来的三分之一左右, 而且它对圆或椭圆投影口径型级数展开系数均适用。

二、椭圆投影口径抛物面天线远区辐射场计算

椭圆投影口径偏置抛物面天线的几何关系如图 1 所示。它是平行于 z 轴的圆柱体在旋转对称抛物面上所截取的部分。天线坐标原点设在抛物面焦点上, 采用椭圆极坐标变换

* 1984年8月29日收到, 1984年11月19日修改定稿。

$$x = a_1 s_1 \cos \varphi_1, \quad y = a_1 e_1 \sin \varphi_1, \quad (1)$$

$$dx dy = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s_1} & \frac{\partial x}{\partial \varphi_1} \\ \frac{\partial y}{\partial s_1} & \frac{\partial y}{\partial \varphi_1} \end{vmatrix} ds_1 d\varphi_1 = a_1^2 e_1 s_1 ds_1 d\varphi_1, \quad (2)$$

$$e_1 = b_1/a_1, \quad s_1 \in [0, 1]. \quad (3)$$

略去与积分无关的常数, 便得到形式上与文献 [1] 中相同的椭圆口径型标量辐射积分远场公式

$$F(\theta, \varphi) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 g(s_1, \varphi_1) e^{-jk(\rho' - \bar{p} \cdot \bar{R})} s_1 ds_1 d\varphi_1, \quad (4)$$

其中 $k = 2\pi/\lambda$, λ 为工作波长, $j = \sqrt{-1}$, g 为椭圆口径上的等效电流分布. 类似于密特拉等作者的推导过程^[1], 可得到变量后的标量二次场

$$\begin{aligned} E_2(u, v) &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \{g_1(s_1, \varphi_1) e^{-jk\Delta K}\} s_1 ds_1 d\varphi_1 \\ &= \sum_{p=0}^{p \rightarrow \infty} \frac{(-jk)^p}{p!} G^p \int_0^{2\pi} \int_0^1 f_1^p g_1 K s_1 ds_1 d\varphi_1, \end{aligned} \quad (5)$$

其中

$$u = \sin \theta \cos \varphi, \quad v = \sin \theta \sin \varphi, \quad (6)$$

$$\Delta = G f_1, \quad K = e^{jk\eta_1 a_1 s_1 \cos(\alpha_1 - \varphi_1)}, \quad (7)$$

$$G = \frac{a_1^2}{8f} (1 + e^2) (\cos \theta_0 - \cos \theta), \quad (8)$$

$$f_1 = (s_1^2 - s_a^2) + e_2 s_1^2 \cos 2\varphi_1, \quad (9)$$

$$s_a = s_a / \sqrt{1 + e_1^2}, \quad e_2 = (1 - e_1^2) / (1 + e_1^2), \quad (10)$$

$$\eta_1 \cos \alpha_1 = \frac{d_1}{2f} (\cos \theta - \cos \theta_0) + u - u_0, \quad (11a)$$

$$\eta_1 \sin \alpha_1 = e_1 (v - v_0). \quad (11b)$$

(θ_0, φ_0) 为远区场参考点方向, 一般选择在最大辐射方向. s_a 可取为 $(a_1 + b_1)/2a_1$, 以保证椭圆关系下远区场方向图远旁瓣的收敛. 将 (5) 式中的分布函数在单位圆上用正交函数展开成级数

$$f_1^p g_1 = \sum_{n=0}^{N \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{M \rightarrow \infty} ({}^p C_m^n \cos n\varphi_1 + {}^p D_m^n \sin n\varphi_1) F_m^n(s_1), \quad (12)$$

其中

$$F_m^n(s_1) = \sqrt{2(n+2m+1)} P_m^{(n,0)}(1-2s_1^2) s_1^n \quad (13)$$

是雅可比多项式 $P_m^{(\alpha,\beta)}(x)$ 的修正形式. 由 F_m^n 的正交性可确定 (12) 式中的级数展开系数

$$\left\{ \begin{matrix} {}^p C_m^n \\ {}^p D_m^n \end{matrix} \right\} = {}^p B_m^n = \frac{\epsilon_n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 f_1^p g_1 \begin{cases} \cos n\varphi_1 \\ \sin n\varphi_1 \end{cases} F_m^n(s_1) s_1 ds_1 d\varphi_1, \quad (14)$$

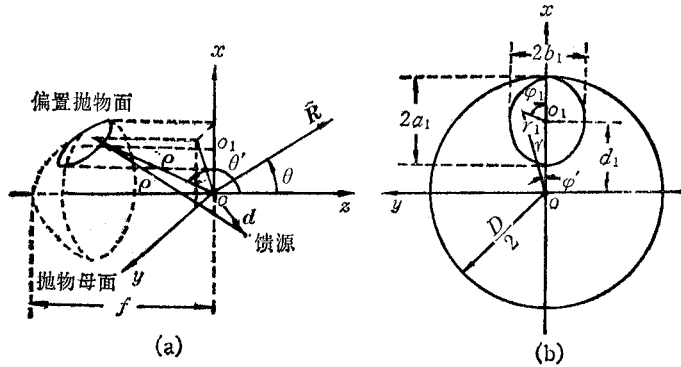
其中

$$\epsilon_n = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 2, & n > 0. \end{cases} \quad (15)$$

将(12)式代入(5)式,利用贝塞尔函数及其与修正的雅可比多项式的可积性质^[1],最终得到

$$E_z(u, v) = 2\pi \sum_{p=0}^{P \rightarrow \infty} \frac{(-jkG)^p}{p!} \sum_{n=0}^{N \rightarrow \infty} j_n \sum_{m=0}^{M \rightarrow \infty} ({}^p C_m^n \cos n\alpha_1 + {}^p D_m^n \sin n\alpha_1) \sqrt{2(n+2m+1)} \frac{J_{n+2m+1}(ka_1\eta_1)}{ka_1\eta_1}. \quad (16)$$

(16)式在形式上完全类同于圆口径表达式^[1],后者是前者当 $e_1 = 1$ 时的特例。



(a) 立体图 (b) x-y 平面投影图
图1 椭圆投影口径偏置抛物面天线的几何关系

计算(16)式的关键是确定其中的系数 ${}^p B_m^n$ 。然而,在椭圆关系下,不能直接应用密特拉等作者给出的递推公式^[1]。若对每个固定的 p, n, m 都做一次二重数值积分来获得 ${}^p B_m^n$ 的话,无疑使计算机时大大增加。

为了寻求椭圆关系下的递推关系,本文引入修正的雅可比多项式的另外两个递推公式^[2]

$$s_1 F_m^n(s_1) = \sum_{i=0}^1 a_{mn}^{i+1} F_{m-i}^{n+1}(s_1), \quad (17a)$$

$$s_1 F_m^n(s_1) = \sum_{i=0}^1 b_{mn}^{i+1} F_{m+i}^{n-1}(s_1), \quad (17b)$$

其中

$$a_{mn}^1 = \frac{m+n+1}{\sqrt{(n+2m+1)(n+2m+2)}}, \quad (18a)$$

$$a_{mn}^2 = -\frac{m}{\sqrt{(n+2m+1)(n+2m)}}, \quad (18b)$$

$$b_{mn}^1 = \frac{m+n}{\sqrt{(n+2m+1)(n+2m)}}, \quad (18c)$$

$$b_{mn}^2 = -\frac{m+1}{\sqrt{(n+2m+1)(n+2m+2)}}. \quad (18d)$$

(17) 式可反复自身展开, 例如

$$s_1^2 F_m^n(s_1) = \sum_{i=0}^1 a_{mn}^{i+1} \sum_{j=0}^1 a_{m-i, n+1}^{i+1} F_{m-i-j}^{n+2}(s_1), \quad (19a)$$

$$s_1^2 F_m^n(s_1) = \sum_{i=0}^1 b_{mn}^{i+1} \sum_{j=0}^1 b_{m+i, n-1}^{i+1} F_{m+i+j}^{n-2}(s_1). \quad (19b)$$

当 $p = 1$ 时, 由 (14) 式

$$\begin{aligned} {}^1B_m^n &= \frac{\varepsilon_n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 [(s_1^2 - s_a'^2) + e_2 s_1^2 \cos 2\varphi_1] g_1(s_1, \varphi_1) \begin{Bmatrix} \cos n\varphi_1 \\ \sin n\varphi_1 \end{Bmatrix} F_m^n(s_1) s_1 ds_1 d\varphi_1 \\ &= {}^1B_{m_c}^n + e_2 {}^1B_{m_c}^n, \end{aligned} \quad (20)$$

式中 ${}^1B_{m_c}^n$ 表示 $p = 1$ 时圆投影口径关系下的级数展开系数, 它遵循递推关系^[1] (${}^0B_{m_c}^n = {}^0B_m^n = B_m^n$)

$${}^{p+1}B_{m_c}^n = \sum_{i=0}^2 d_{mn}^{i+1} {}^pB_{(m+i-1)_c}^n, \quad (21)$$

其中

$$d_{mn}^1 = \frac{-m(m+n)}{(n+2m)\sqrt{(n+2m-1)(n+2m+1)}}, \quad (22a)$$

$$d_{mn}^2 = \frac{(m+n)^2}{(2m+n)(2m+n+1)} + \frac{(m+1)^2}{(n+2m+2)(n+2m+1)} - s_a'^2, \quad (22b)$$

$$d_{mn}^3 = -\frac{(m+1)(n+m+1)}{(n+2m+2)\sqrt{(n+2m+1)(n+2m+3)}}. \quad (22c)$$

${}^1B_{m_c}^n$ 则反映了椭圆关系对圆投影口径级数展开系数 ${}^1B_m^n$ 的扰动. 利用 (19) 式和三角函数恒等式

$$\cos n\varphi_1 \cos 2p\varphi_1 = \frac{1}{2} [\cos(n+2p)\varphi_1 + \cos(n-2p)\varphi_1], \quad (23a)$$

$$\sin n\varphi_1 \cos 2p\varphi_1 = \frac{1}{2} [\sin(n+2p)\varphi_1 + \sin(n-2p)\varphi_1]. \quad (23b)$$

代入关于 ${}^1B_{m_c}^n$ 的积分中, 便得到

$$\begin{aligned} {}^1B_{m_c}^n &= \frac{\varepsilon_n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 s_1^2 \cos 2\varphi_1 g_1(s_1, \varphi_1) \begin{Bmatrix} \cos n\varphi_1 \\ \sin n\varphi_1 \end{Bmatrix} F_m^n(s_1) s_1 ds_1 d\varphi_1 \\ &= \frac{1}{2} ({}^1B_{m_c(+)}^n + {}^1B_{m_c(-)}^n), \end{aligned} \quad (24)$$

其中

$${}^1B_{m_c(\pm)}^n = \sum_{i=0}^1 u_{mn}^{i+1} \sum_{j=0}^1 u_{m\mp i, n\pm 1}^{i+1} B_{m\mp(i+j)}^{n\pm 2}. \quad (25)$$

而

$$u_{mn}^{l+1} = \begin{cases} a_{mn}^{l+1}, & l = 0, 1, \text{ 当取 (+) 时;} \\ b_{mn}^{l+1}, & l = 0, 1, \text{ 当取 (-) 时.} \end{cases} \quad (26)$$

下面讨论 $p = 2$ 时的情况. 由 (14) 式

$$\begin{aligned}
 {}^2B_m^n &= \frac{\varepsilon_n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 [(s_1^2 - s_a'^2) + e_2 s_1^2 \cos 2\varphi_1]^2 g_1(s_1, \varphi_1) \left\{ \frac{\cos n\varphi_1}{\sin n\varphi_1} \right\} F_m^n(s_1) s_1 ds_1 d\varphi_1 \\
 &= \sum_{p=0}^2 c_p {}^p B_{m_e}^n + 2e_2 \sum_{i=0}^2 d_{mn}^{i+1} B_{(m+i-1)_e}^n + \frac{1}{2} e_2^2 {}^2 B_{m_e}^n, \quad (27)
 \end{aligned}$$

式中

$$c_0 = \frac{1}{2} e_2^2 s_a'^4, \quad c_1 = e_2^2 s_a'^2, \quad c_2 = 1 + \frac{1}{2} e_2^2. \quad (28)$$

(27) 式中仅 ${}^2B_{m_e}^n$ 尚待确定。类似于 ${}^1B_{m_e}^n$ 的求法

$$\begin{aligned}
 {}^2B_{m_e}^n &= \frac{\varepsilon_n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 s_1^4 \cos 4\varphi_1 g_1(s_1, \varphi_1) \left\{ \frac{\cos n\varphi_1}{\sin n\varphi_1} \right\} F_m^n(s_1) s_1 ds_1 d\varphi_1 \\
 &= \frac{1}{2} ({}^2B_{m_e(+)}^n + {}^2B_{m_e(-)}^n), \quad (29)
 \end{aligned}$$

其中

$${}^2B_{m_e(\pm)}^n = \sum_{i=0}^1 u_{mn}^{i+1} \sum_{j=0}^1 u_{m\mp i, n\pm 1}^{j+1} \sum_{k=0}^1 u_{m\mp(i+j), n\pm 2}^{k+1} \sum_{l=0}^1 u_{m\mp(i+j+k), n\pm 3}^{l+1} B_{m\mp(i+j+k)}^{n\pm 4}. \quad (30)$$

显然，只要用数值积分确定 B_m^n , $p > 0$ 的各项 ${}^p B_m^n$ 均可逐一递推出来。不过，随着 p 的递增， ${}^p B_m^n$ 的递推关系在形式上会显得较繁。但它们全部为简单的代数运算，在形式上又体现出极强的规律性，非常便于计算机实现。

在 (20)、(27) 两式中引入椭圆扰动关系，使雅可比-贝塞尔级数方法仍然保持在圆投影口径情形下所具有的快速双收敛性^[3]。对于远区辐射场计算，级数 (16) 式中的 P 一般取到 1 便足够了^[4]。下面所举的计算实例表明，在较大的观察角范围内， $P = 2$ 时方向图已很快收敛。

三、计算实例

椭圆投影口径抛物面天线在雷达和卫星广播通信等领域中具有广泛的应用。图 2 给出了同步轨道卫星上椭圆投影口径偏置抛物面天线照射我国版图的辐射场等电平曲线。它基本上满足了对我国版图的一 3dB 覆盖要求。而且结构简单，便于工程实现。若换用圆投影口径抛物面天线，则至少需要两个圆波束，即两个馈源来合成。

在图 3 中，本文对在较大馈源偏焦下的 (16) 式的级数和 (4) 式的直接辐射积分两者的数值结果进行了比较。尽管方向图因偏焦而出现较大的变形，但 (16) 式的级数解仍显示较快的收敛性。虽然波束偏移一方的旁瓣电平比另一方的收敛略慢些，然而当 $P = 1$ 时，除扰动最大的零深处外，主瓣两侧的前三个旁瓣电平误差均小于 0.5dB。我们还对更大偏焦或椭圆口径较扁的情况进行了分析，这时由于口径上电流幅度和相位分布变化剧烈，迫使 (16) 式级数的求和限 M, N 取更大的值，不过， P 最多取到 2 便可以了。分析还表明，若 (10)、(11) 两式中的 s_a 和 u_0, v_0 不选择在口面边缘附近和主瓣方向，(16) 式级数的收敛会变得缓慢，这与圆口径情况相类似^[4]。它们的合理选择是方向图加速双收敛的保证。

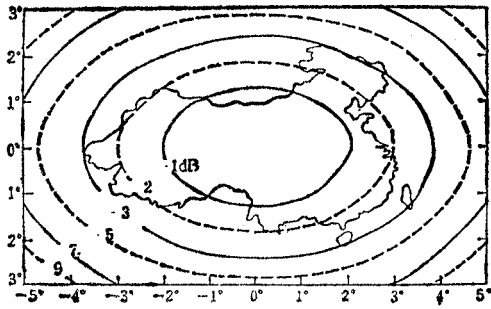


图2 椭圆投影口径偏置抛物面天线
照射中国版图的等电平曲线
 $a_1/\lambda = 7.4, b_1/\lambda = 4.6, f/\lambda = 80, d_1/\lambda = 7.8$
初级馈源为 x -线极化,余弦函数照射,
边缘跌落为 -10dB

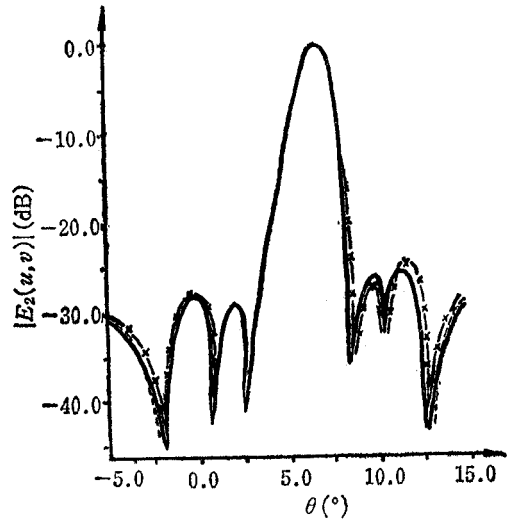


图3 偏焦的椭圆投影口径偏置抛物
面天线 $x-z$ 面远区场方向图
 $d/\lambda = (-8, 0, -7), a_1/\lambda = 50, b_1/\lambda = 30,$
 $d_1/\lambda = 60, f/\lambda = 80$
——(4) 式积分和 $M=N=6, P=2$;
—×— $M=N=6, P=1$;
---- $M=N=6, P=0$.

四、系数 B_m^n 中关于 m 的一层新的部分递推关系

无论圆口径或椭圆口径型问题,虽然 ${}^p B_m^n$ 存在着关于 p 的代数递推关系,但仍需进行 $(M+1) \times (N+1)$ 次二重数值积分来确定 B_m^n (${}^0 B_m^n$). 如前所述,有时这一计算工作量是很大的. 仔细观察 (14) 式会发现, B_m^n 中仍存在易被忽视的关于 m 的部分递推关系.

令 $p=0, s'_a=0, {}^2 B_m^n = {}_2 B_m^n$, (21) 式可变为

$$B_{m+1}^n = \frac{1}{d_{mn}^3} ({}_2 B_m^n - d_{mn}^1 B_{m-1}^n - d_{mn}^2 B_m^n). \tag{31}$$

用 s_i^2 乘 (17b) 式两边,代入 (14) 式并令 $p=0$, 便得到

$${}_2 B_{m+1}^n = \frac{1}{b_{m,n+1}^2} ({}_3 B_m^{n+1} - b_{m,n+1}^1 {}_2 B_m^n). \tag{32}$$

(31)、(32) 两式中

$$d_{mn}^3 > 0, b_{m,n}^2 > 0, \text{ 当 } m, n \geq 0 \text{ 时}; \tag{33}$$

$${}_i B_m^n \triangleq \frac{\varepsilon_n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 g_i(s_1, \varphi_1) \begin{cases} \cos n \varphi_1 \\ \sin n \varphi_1 \end{cases} s_1^i F_m^n(s_1) s_1 d s_1 d \varphi_1, i = 2, 3. \tag{34}$$

由框图 4 可见,只要在第 m, n 次的确定 B_m^n 的二重数值积分的过程中,同时获得两个辅助积分 ${}_2 B_m^n, {}_3 B_m^n$, 便可使级数系数向前连续递推两次. 若不计辅助积分和代数递推运算

所占机时,整个数值积分可提高效率

$$\eta = \frac{\text{未用递推关系的总积分次数}}{\text{使用递推关系的总积分次数}} = \frac{(M+1)(N+1)}{\left(\frac{M}{3}+1\right)(N+1)} = 3 - \frac{6}{M+3} \quad (35)$$

当 M 取得较大时,效率将接近 3.

由框图 5 不难看出, ${}_2B_m^n, {}_3B_m^n$ 附在 B_m^n 关于积分变量 s_1 的外层积分中,即将二重积分

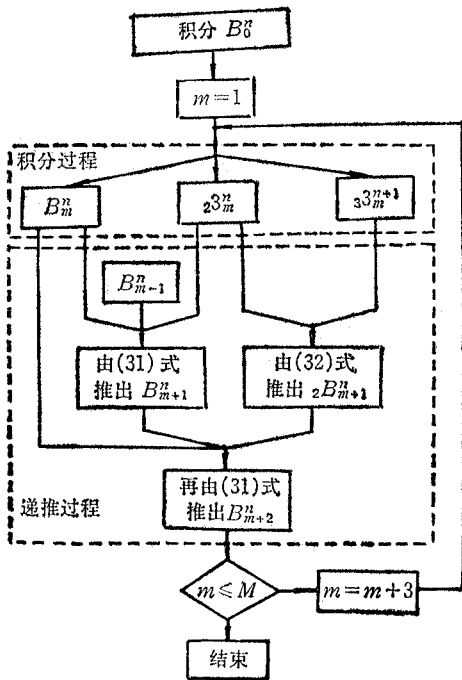


图 4 B_m^n 的递推框图

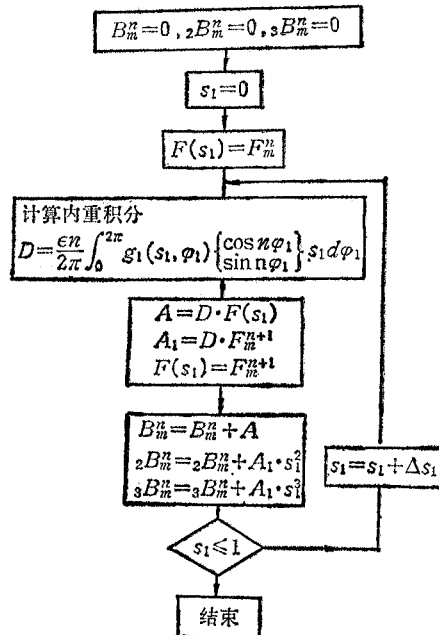


图 5 B_m^n 的二重高斯积分框图

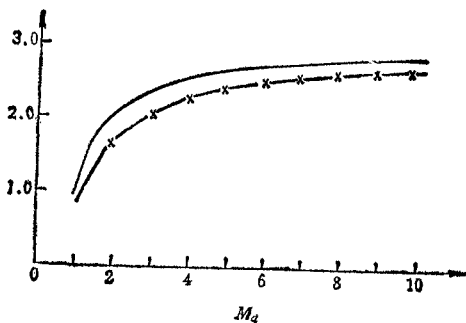


图 6 机时-效率曲线

$$M_d = 1 + \frac{M}{3}$$

—(35)式的估计值, —x—实算值

化为定积分运算;在外层积分中, $B_m^n, {}_2B_m^n$ 可共用生成的 $F_m^n(s_1)$, 而 ${}_3B_m^n$ 所需的 $F_m^{n+1}(s_1)$ 生成后可存放在数组 $F(s_1)$ 中, 以备第 $n+1$ 次积分中使用,从而提高了它的利用率.

二重积分程序经过这番处理, 辅助积分项便剩下少许简单的加法和乘法运算, 所耗机时无几;且由于递推过程是算术运算, 故不影响积分精度. 在 7760 型计算机上实算的结果表明, 效率 (η) 接近理论估计值, 如图 6 所示. 当 M 很大时, 可把所用机时压缩到原来的三分之一左右. 显然, 本节的递推方法无论对圆口径或椭圆口径型级数展开系数的

推求都是同样适用的。

五、结 束 语

提高计算效率,一直是天线工作者追求的目标。这一思想也贯穿在本文的始终。面天线辐射场计算中的主要问题是在物理光学近似下如何快速、精确地估计辐射积分。雅可比-贝塞尔级数方法和近几年发展起来的伪取样展开方法^[5]等都是处理这一问题的行之有效的方法。当然,在某些方面,它们仍需要进一步改进和完善。应该指出,雅可比-贝塞尔级数的圆适应性也极大地限制了它向其它类型口径面天线计算方面推广,甚至很难用于椭圆投影口径抛物面天线近区场分析。其原因在于,随着 p 的递增,级数展开系数 ${}^p B_m^n$ 的递推关系复杂化了。这类问题有待进一步的研究。

本文的工作得到了导师王爵骐和刘振威、尹友田、范祖棣等老师的细心指教,谨表示衷心的感谢。

参 考 文 献

- [1] R. Mittra, et al., *IEEE Trans. on AP*, AP-27 (1979), 294.
- [2] I. S. Granshteyn, et al., *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, Inc., New York, 1980.
- [3] Yahya Rahmat-Samii, et al., *IEEE Trans. on AP*, AP-28(1980), 425.
- [4] C. C. Hung, et al., *ibid.*, AP-31(1983), 756
- [5] O. M. Bucci, et al., *ibid.*, AP-29(1981), 580.

A FURTHER RESEARCH ON THE JACOBI-BESSEL SERIES METHOD IN ANALYSIS OF REFLECTOR ANTENNA

Yi Li

(Institute of Spacecraft System Engineering, The Chinese Academy of Space Technology)

Based on the work on reflector antenna with circularly projected aperture accomplished by R. Mittra and others (1979), this paper extends the Jacobi-Bessel series method in analysis of reflector antenna to the area where far-field of paraboloid reflector with elliptically projected aperture can be evaluated by using the unique recurrence relations of modified Jacobi polynomials. Meanwhile, a new kind of partial recurrence relations of the series expansion coefficients ${}^p B_m^n$ is deduced so that whole CPU time for numerical integration can be saved about three times.