第16卷 第1期　　电子科学学刊　　Vol. 16, No. 1
1994年1月　　JOURNAL OF ELECTRONICS　　Jan. 1994

平面波的复射线束展开*

尧德中　阮颖铮
(电子科技大学微波工程系 成都 610054)

摘要　本文在高频渐近意义下，导出了平面波的复射线束展开系数公式，从而为已得到成功应用的平面波复射线束拟合展开提供了理论依据.

关键词　波传播，平面波，复射线束展开

1. 引言

复射线方法是由 Keller 和 Felsen 等人在70年代发展起来的一种分析局部不均匀波传播和散射的方法[1,2]. 进入80年代中后期，阮颖铮和卢义泰（I. T. Lu）等提出了复射线近轴近似法[3]和复空间惠更斯原理[4,5]，建立了以高斯波束（复射线近轴场）系统模拟一般波场的理论基础. 接着，他们又开展了均匀柱面波的复射线束展开和应用的研究[5-7]、均匀平面波的复射线束展开和应用的研究[8-10]，取得了很好的效果. 在这些工作中，关于柱面波的应用是基于已导出的展开系数公式进行的[7]，而平面波的工作则因缺乏相应的公式而采取了直接进行数值拟合的办法[8-10]. 本文采用一种新的思路——振幅求和法，十分方便地实现了平面波的复射线束高频渐近近似展开，所得结果既可作为现已开展的数值拟合展开工作的理论补充，又可用于指导未来这方面的研究.

2 平面波的二维复射线束展开

在波的传播可用两个直角坐标描述时，平面波就可用二维直角坐标系中的一直线表示. 根据复空间惠更斯原理[4,5]，此时平面波的复射线束展开的物理图象为，在用于表示波前的直线上的每一点设置等幅同相的复线源波束矢量 $\boldsymbol{b}$，并使 $\boldsymbol{b}$ 的方向沿波的传播方向，显然所有复线源发出的复射线束的叠加结果必为均匀平面波. 从物理图象上容易理解，叠加场波前上每一点的振幅是相邻的若干个复线源提供的，而且在任意两个复线源之间（设为甲、乙），复线源甲对复线源乙所在位置的叠加场的贡献，等于复线源乙对复线源甲所在位置的叠加场的贡献，据此，所有复线源的叠加场在数值上必然等于在垂直于复射线束轴向的某一平面上（以下简称口径面），单个复射线束自身幅值的叠加，从而使复射线束展开问题转化成为求单个复射线束在某一口径面内的幅值的和的问题.

为了不失一般性，假设平面波位于二维坐标系 (y,z) 中 $z=0$ 处，并沿 z 轴正方向传播（波前与 y 轴一致）. 根据复射线理论[11]，波束矢量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 z 轴的复线源柱面波场为

1992-09-30 收到，1993-03-03 定稿
* 国家自然科学基金资助项目

尧德中　男，1965年生，副教授，从事电磁散射与辐射，弹性波理论和应用方面的研究工作.
阮颖铮　男，1939年生，教授，从事电波传播和天线，复射线理论和应用方面的研究工作.

$$\widetilde{H}_0^{(1)}(k\widetilde{R}) = c\exp(jk\widetilde{R})/\sqrt{k\widetilde{R}}, \tag{1}$$

式中 $j=\sqrt{-1}$，k 为波数，$c=\sqrt{2/(j\pi)}$，

$$\begin{aligned}\widetilde{R} &= \sqrt{y^2+(z-jb)^2} = \sqrt{y^2-(b+jz)^2} \\ &= j\sqrt{(b+jz)^2-y^2},\ \mathrm{Re}\widetilde{R}>0.\end{aligned} \tag{1a}$$

将 (1a) 式代入(1)式中，并令 $a^2=(b+jz)^2$，则

$$\widetilde{H}_0^{(1)}(k\widetilde{R}) = \frac{c}{\sqrt{jk}}\frac{\exp(-k\sqrt{a^2-y^2})}{\sqrt[4]{a^2-y^2}}. \tag{2}$$

考虑 z 为某一常数的口径面，a 为相应的一个复常数，则复射线束场(2)式在该口径面上的振幅积分和为

$$I(z) = c_1\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp(-k\sqrt{a^2-y^2})}{\sqrt[4]{a^2-y^2}}\,dy, \tag{3}$$

式中 $c_1=c/\sqrt{jk}$.(3)式表明，当 $z\neq 0$ 时，被积函数的奇点位于复空间中 $y=\pm(b+jz)$，在实轴上对 y 的积分不会遇上这两个奇点；当 $z=0$ 时，奇点位于 $y=\pm b$，积分将通过奇点；为使展开对 $z=0$ 的口径面同样成立，有必要避开这两个奇点．鉴于复射线理论的应用都是利用其近轴场[11]，即利用位于这两个奇点之间的高斯波束，因此可定义一个参与叠加求和的有效口径尺寸 $|y|\leqslant|a|-\varepsilon$，$\varepsilon$ 为一小量；以消除奇点同时又与工程应用一致，这样(3)式可改为

$$I(t) = c_1\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-|a|+\varepsilon}^{|a|-\varepsilon}\frac{\exp(-k\sqrt{a^2-y^2})}{\sqrt[4]{a^2-y^2}}\,dy. \tag{4}$$

根据高频渐近理论，积分(4)式的鞍点位于 $y=0$ 处，远离了积分端点，因此可以采用单鞍点近似得

$$I(z) = c_1 j\sqrt{\frac{2\pi}{k}}\exp(-ka). \tag{5}$$

又由 $\mathrm{Re}\widetilde{R}>0$ 知，$a=-(b+jz)$，同时利用 $k=2\pi/\lambda$，λ 为波长，并把 $c_1=(1/j)\sqrt{2/(k\pi)}$ 代入，则(5)式化为

$$I(z) = (\lambda/\pi)\exp(kb)\exp(jkz) = w_2\exp(jkz), \tag{6}$$

式中

$$w_2 = (\lambda/\pi)\exp(kb). \tag{6a}$$

(6)式表明，叠加场的振幅为单位平面波的 w_2 倍，因此可以通过对叠加场进行简单的校正(乘上 $1/w_2$) 使其与单位平面波一致、w_2 即为平面波二维复射线束展开的展开系数.

3 平面波的三维复射线束展开

在波的传播需要用三维直角坐标系描述时，平面波波前为相应坐标系中的某一平面，采用与二维展开完全类似的思路，仍假设平面波位于 $z=0$ 处，并沿 z 轴正方向传播(波前与 (x,y) 平面一致)．与二维展开不同的是，这里需要以三维复射线束为基函数进行展开，即复点源而不是复线源．设复点源的波束矢量 $\boldsymbol{b}$ 与 z 轴正方向一致（波的传播方向)，则复点源的格林函数为

$$\widetilde{G}(k\widetilde{R}) = \exp(jk\widetilde{R})/(4\pi\widetilde{R}), \tag{7}$$

式中

$$\widetilde{R} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - jb)^2} = j\sqrt{a^2 - r^2}, \ \mathrm{Re}\widetilde{R} > 0. \tag{8}$$

$r^2 = x^2 + y^2, a = -(b + jz)$,在 z 为某一常数的口径面上的有效口径为 $r < |a|$ 的圆，因此复点源波束场的积分和为

$$\begin{aligned} I(z) &= \frac{1}{4\pi j}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{|a|-\varepsilon}\int_0^{2\pi}\frac{\exp(-k\sqrt{a^2-r^2})}{\sqrt{a^2-r^2}}\, r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2j}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{|a|-\varepsilon}\frac{\exp(-k\sqrt{a^2-r^2})}{\sqrt{a^2-r^2}}\, r\mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{2jk}\int_0^{|a|}\mathrm{d}[\exp(-k\sqrt{a^2-r^2})] \\ &= \frac{1}{2jk}[1 - \exp(kb)\exp(jkz)]. \end{aligned} \tag{9}$$

在高频近似下，$\exp(kb) \gg 1$,因此(9)式可取为

$$\begin{aligned} I(z) &= -\exp(kb)\exp(jkz)/(2jk) \\ &= w_3\exp(jkz), \end{aligned} \tag{10}$$

式中

$$w_3 = \frac{j\lambda}{4\pi}\exp(kb) = \frac{\lambda}{4\pi}\exp\left(j\frac{\pi}{2} + kb\right). \tag{10a}$$

(10)式表明，平面波同样可用三维复射线束进行模拟．均匀分布于平面波波前上，波矢 $\boldsymbol{b}$ 沿波的传播方向的复点源波束场的叠加场与单位平面波只相差一个比例常数．

4 结束语

(1) 平面波可以用复射线束的叠加场进行完全的模拟，叠加场与单位平面波之间只相差一个比例常数(展开系数),从而为平面波的拟合展开提供了坚实的理论基础．

(2) 文献中的复射线束展开是针对复次波源的位置进行积分[5,6]，本文则通过物理图象的分析将其转化成为对复射线束自身振幅的积分(简称振幅求和法)．而有效积分求和口径的引入,使问题的物理含义更加明确并使积分得到简化．此外,振幅求和法还能用于非均匀波的展开,因此这种方法本身也有一定的意义．

参 考 文 献

[1] Keller J B, Streifer W J. Opt. Soc. Am., 1971, 61(1):40—43.
[2] Felsen L B. Complex Rays. Philips Research Reports, Special Issue in Honor of C. J. Bouwkamp. 1975, 30(3):169—184.
[3] 阮颖铮,Felsen L B. 应用科学学报,1989,7(2): 174—178.
[4] 阮颖铮.成都电讯工程学院学报,1987,16(1): 28—33.
[5] Lu I T, Felsen L B, Ruan Y Z. Geophysical Journal of Royal Astronomic Society, 1987, 89: 915—932.
[6] 阮颖铮.光学学报,1988,8(1): 83—88.
[7] 阮颖铮.地球物理学报,1990,33(3): 343～348.
[8] Ruan Y Z, Feng W L. IEE Proc. -F, 1991, 138(5): 397—399.
[9] 阮颖铮,冯文澜、电子学报,1991,19(5): 30—34.

[10] 冯文澜,阮颖铮. 电子科学学刊,1990,12(6): 646—649.
[11] 阮颖铮编著. 复射线理论及其应用. 北京: 电子工业出版社,1991,88—153.

COMPLEX RAY EXPANSION OF PLANE WAVE

Yao Dezhong　Ruan Yingzheng
(University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054)

Abstract　Based on the high frequency approximation theory, the complex ray expansion of plane waves are derived. The results obtained may be regarded as the basis of the numerical expansion of plane wave, which has been used successfully in some problems.

Key words　Wave propagation, Plane wave, Complex ray