

# 高信噪比大指向误差环境中的波束形成<sup>1</sup>

高 勇 肖先赐

(电子科技大学电子工程系 成都 610054)

**摘 要** 基于协方差矩阵加权的波束形成方法 (SMI) 在计算加权向量时引进干扰和噪声的影响, 投影方法在计算加权向量时引进干扰信号的影响, 这些都造成了波束形成效果的不理想。在有用信号的信噪比较高且出现较大的指向误差时, SMI 和投影方法失效。本文针对上述问题提出了利用信号周期平稳性, 采用周期波束形成方法来解决上述问题。模拟实验验证了本文的方法。

**关键词** 波束形成, 周期平稳, SMI, 投影

**中图分类号** TN911.72

## 1 引 言

波束形成在雷达、声纳、移动通信和电子对抗和侦察等领域中获得了广泛的应用<sup>[1-3]</sup>。在雷达和声纳中, 用波束形成技术可以显著改善接收信号的性能, 提高发现概率。在移动通信中, 利用波束形成技术可以提高系统容量, 提高频谱的利用率, 抑制共道干扰, 提高对移动用户的服务质量。在电子对抗和侦察中, 利用波束形成技术可提取未知空间信号的特征。采用不同的波束形成方法将会对系统的整体性能产生不同的影响。选择合适的波束形成方法有可能改善系统的性能。

基于协方差矩阵求逆加权<sup>[4]</sup>的方法 (SMI) 在波束形成中是一种重要的方法。在信号检测与处理中, 通常信噪比越高系统越容易处理。但 SMI 方法在高信噪比的条件下出现了信噪比越高, 性能下降越快的情况。而高信噪比在实际中是大量存在的, 例如在移动通信中, 在保证 2% 的阻塞率的条件下, 载干比达到 15~18dB 是很常见的<sup>[5,6]</sup>。SMI 方法在计算加权向量的同时引进了干扰和噪声的影响, 造成了波束形成效果的不理想。主要表现为零点变浅和副瓣升高。由于副瓣的影响, 空间其它方向上的干扰和噪声不可避免地出现在最后重构的信号中。特别是使重构后的信号引入了较大的噪声分量。基于特征结构的波束形成方法或投影方法<sup>[7]</sup>相对 SMI 方法可以较好的工作, 但在计算权向量时还是引入了干扰的影响。

在波束形成中, 由于各种原因, 指向不一定是非常精确的, 有可能存在较大的指向误差, 此时 SMI 方法和投影方法在大指向误差下失效。失效定义为在有用信号方向上的增益小于在干扰方向上的增益。引入信号周期平稳性后, 可以在高信噪比、大的指向误差的条件下较好地解决这一问题。模拟实验验证了本文方法对高信噪比、大的指向误差具有一定的适应性。

## 2 阵列模型和问题的提出

设空间  $D$  个互不相关的信号从不同的方位角  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_D$  入射到一个  $M$  元均匀线阵, 阵元间距为  $d$ 。各阵元噪声  $n_i(t)$  互不相关,  $i = 1, 2, \dots, M$ , 且为高斯白噪声, 方差为  $\sigma^2$ , 噪声与信号互不相关。这样阵列的输出可表示为

$$X(t) = A \cdot S(t) + N(t) \quad (1)$$

<sup>1</sup> 1999-06-11 收到, 1999-12-08 定稿  
部级电子预研基金资助项目

其中  $X(t)$  为阵列输出向量,  $S(t)$  为信号源向量,  $N(t)$  为噪声向量,  $A$  为阵列方向矩阵。

$$X(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_M(t)]^T \quad (2)$$

$$S(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_D(t)]^T \quad (3)$$

$$N(t) = [n_1(t), n_2(t), \dots, n_M(t)]^T \quad (4)$$

$$A = [a(\theta_1), a(\theta_2), \dots, a(\theta_D)] \quad (5)$$

其中上标“ $T$ ”表示转置运算,  $a(\theta_k)$  为一个  $M \times 1$  维的方向向量。

$$a(\theta_k) = \left[ 1, e^{j2\pi \frac{d}{\lambda} \cos(\theta_k)}, \dots, e^{j2\pi(M-1) \frac{d}{\lambda} \cos(\theta_k)} \right]^T \quad (6)$$

阵列输出向量  $X(t)$  的相关矩阵  $R_x$  为

$$R_x = E[X(t)X^H(t)] \quad (7)$$

$R_x$  的特征值排序后为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M$ ; 特征值所对应的特征向量分别为  $e_1, e_2, \dots, e_M$ 。上式可改写为

$$R_x = \sum_{i=1}^D \lambda_i e_i e_i^H + \sum_{j=D+1}^M \lambda_j e_j e_j^H \quad (8)$$

$R_x$  的逆矩阵可写为

$$R_x^{-1} = \sum_{i=1}^D \frac{1}{\lambda_i} e_i e_i^H + \sum_{j=D+1}^M \frac{1}{\lambda_j} e_j e_j^H \quad (9)$$

定义

$$D_S = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_D), \quad D_n = \text{diag}(\lambda_{D+1}, \lambda_2, \dots, \lambda_M) \quad (10)$$

$$E_S = [e_1, e_2, \dots, e_D], \quad E_n = [e_{D+1}, e_{D+2}, \dots, e_M] \quad (11)$$

定义想要通过波束形成分离出来的  $\theta_d$  方向上的信号为有用信号,  $1 \leq d \leq D$ 。  $\phi_d$  为波束的指向,  $\phi_d = \theta_d + \Delta$ ,  $\Delta$  为指向误差。其它方向上的信号为干扰信号。在基于协方差矩阵求逆加权的波束形成方法中, 最佳权向量为

$$W_s = \frac{R_x^{-1} a(\phi_d)}{a^H(\phi_d) R_x^{-1} a(\phi_d)} = u R_x^{-1} a(\phi_d) \quad (12)$$

其中比例因子  $u$  为

$$u = [a^H(\phi_d) R_x^{-1} a(\phi_d)]^{-1} \quad (13)$$

利用 (9)~(11) 式将 (12) 式改写为

$$W_s = u E_S D_S^{-1} E_S^H a(\phi_d) + u E_n D_n^{-1} E_n^H a(\phi_d) \quad (14)$$

从 (14) 式不难看出: 最佳权向量  $W_s$  由其在信号子空间的分量和噪声子空间的分量两部分组成。注意到在信号子空间中除了有用信号外也含有干扰的成份, 因此在确定最佳权向量的过程中, 噪声和干扰所对应的特征值和特征向量参与了权值的计算。这是造成波束形成性能下降和影响重构后信噪比的根本原因所在。

### 3 基于特征结构的波束形成或投影方法 [7]

当  $a(\phi_d)$  不在信号子空间时,  $E_n^H a(\phi_d) = 0$  不再成立, 比如有限数据长度、指向误差以及阵列误差等因素的影响。因此权向量中含有其在噪声子空间的分量, 即 (14) 式中右边的第二项。另外, 由于噪声子空间的扰动, 将会使自适应方向图发生严重的畸变。针对 SMI 方法的问题, 文献 [7] 提出了一种基于特征结构的波束形成或投影方法, 具体做法是剔除 (14) 式中权向量在噪声子空间的分量, 只保留其在信号子空间的分量, 即

$$W_p = u_2 E_S D_S^{-1} E_S^H a(\phi_d) = u_2 \frac{1}{\lambda_d} e_d e_d^H a(\phi_d) + u_2 \sum_{i=1, i \neq d}^D \frac{1}{\lambda_i} e_i e_i^H a(\phi_d) \quad (15)$$

其中  $u_2 = [a^H(\phi_d) E_S D_S^{-1} E_S^H a(\phi_d)]^{-1}$ 。

投影方法具有快于 SMI 方法的收敛速度, 在信号的的信噪比较大时, 性能有明显的改善, 对系统的误差容忍能力也较 SMI 方法强。但从 (15) 式中可以看出投影方法在计算权向量时引入了下扰的影响。

在进行特征分解的过程中, 指向  $\phi_d$  和特征值  $\lambda_d$  的一一对应关系已经被破坏了, 无法准确找出  $a(\phi_d)$  所对应的特征向量  $e_d$ 。在有信噪比远大于干噪比的先验信息的条件下, 可以准确找出  $a(\phi_d)$  所对应的特征向量  $e_d$ 。但遗憾的是由于干扰的随机性, 通常很难得到这种先验信息。同时在信噪比与干噪比接近或相等的条件下, 即使有先验信息仍然无法从特征值的大小关系准确找出  $a(\phi_d)$  所对应的特征向量  $e_d$ , 即不能剔除权向量中干扰的成份。因此投影方法在计算权向量的过程中, 为使错误概率最小, 所得到的权向量中往往含有在干扰空间的投影分量, 即 (15) 式右边第二项。这造成了投影方法在高信噪比、大的指向误差下明显失效。

## 4 信号的周期平稳性用于波束形成

### 4.1 信号的周期平稳性

在许多传统的数字信号处理中, 常用的方法是建立在所观测到的信号具有广义平稳性之上的。但事实上, 这一假定在实际问题中并不一定成立。例如: 通信、雷达和声纳等中遇到的随机信号, 其统计特性是随时间而变化的, 这时便不能再当作广义平稳信号来处理, 而应作为非平稳信号来处理。要简洁地表达非平稳信号是不容易的, 但当信号统计特性的变化有一定的规律时, 可以引入周期平稳信号的概念来表达它。实际应用中, 对信号的采样、调制、编码等, 都会使信号具有周期平稳的性质。

信号  $y(t)$  为周期平稳信号是指其均值  $m_y(t)$  及其相关函数  $R_y(t + \tau/2, t - \tau/2)$  分别为

$$m_y(t) = m_y(t + k/\alpha) \quad (16)$$

$$R_y(t + \tau/2, t - \tau/2) = R_y(t + k/\alpha + \tau/2, t + k/\alpha - \tau/2) \quad (17)$$

其中  $k$  为整数,  $\alpha$  称为周期频率, 可以证明,  $\alpha$  中含有与信号调制形式或调制参数有关的信息并且是可以估计出来的 [8-11]。

$y(t)$  周期自相关函数为

$$R_y^\alpha(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_y(t + \tau/2, t - \tau/2) \exp(-j2\pi\alpha t) dt \quad (18)$$

通常  $y(t)$  是周期各态遍历的, 因而  $R_y(t + \tau/2, t - \tau/2)$  中的集平均可由时间平均来代替, 这样有

$$R_y^\alpha(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(t + \tau/2) y^*(t - \tau/2) \exp(-j2\pi\alpha t) dt$$

$$= \langle y(t + \tau/2) y^*(t - \tau/2) \exp(-j2\pi\alpha t) \rangle \quad (19)$$

其中  $\langle \cdot \rangle$  表示对全部时间进行平均,  $R_y^\alpha(\tau)$  称为周期自相关函数。当  $\alpha = 0$  时,  $R_y^\alpha(\tau)$  就是通常的自相关函数。 $R_y^\alpha(\tau)$  的傅里叶变换  $S_y^\alpha(f)$  称为谱相关密度函数。

$$S_y^\alpha(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_y^\alpha(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \quad (20)$$

当  $\alpha = 0$  时,  $S_y^\alpha(f)$  退化为功率谱密度函数。

对一个非平稳信号  $y(t)$  则不具有周期平稳性, 其周期自相关函数对非零  $\alpha$  且不为采样频率整数倍的周期频率恒为零。

总之, 周期平稳理论的特色在于: 它一方面反映了信号统计量随时间的变化, 弥补了平稳信号处理的不足; 另一方面由信号统计量的周期变化, 简化了一般的非平稳信号处理。因而它是介于平稳、非平稳信号处理之间的解决方案。在许多实际的应用中, 能比平稳信号处理得到更为满意的结果, 又能比非平稳信号处理更简洁, 更易于实时处理<sup>[10]</sup>。

#### 4.2 周期波束形成方法

此时应该注意到矩阵  $R_y^\alpha(\tau)$  不再为对称阵了,  $R_y^\alpha(\tau)$  可能有非正的特征值。这时可构造对称阵

$$R_2 = R_y^\alpha(\tau) \cdot [R_y^\alpha(\tau)]^H \quad (21)$$

再对  $R_2$  进行特征分解。设  $R_2$  的特征值排序后为  $\lambda_{21}, \lambda_{22}, \dots, \lambda_{2M}$ ; 特征值所对应的特征向量分别为  $e_{21}, e_{22}, \dots, e_{2M}$ 。

由于利用信号的周期平稳性后, 对具有不同的周期频率的信号具有较好的筛选性, 因此估计出来的信号个数不再是  $D$ 。由于  $D$  个信号是周期不相关, 利用信号的周期频率信息可以提取有用信号, 因此估计出的信号个数为 1。

重新定义信号子空间  $E_{2S}$ 、干扰子空间  $E_{2I}$  和噪声子空间  $E_{2n}$  分别为

$$E_{2S} = e_d, \quad E_{2I} = [e_{2i}], \quad 1 \leq i \leq D \text{ 且 } i \neq d, \quad E_{2n} = [e_{D+1}, e_{D+2}, \dots, e_{2M}] \quad (22)$$

上式可改写为

$$R_2 = \lambda_{2d} e_{2d} e_{2d}^H + \sum_{i=1, i \neq d}^D \lambda_{2i} e_{2i} e_{2i}^H + \sum_{j=D+1}^M \lambda_{2j} e_{2j} e_{2j}^H \quad (23)$$

$R_2$  的逆矩阵可写为

$$R_2^{-1} = \frac{1}{\lambda_{2d}} e_{2d} e_{2d}^H + \sum_{i=1, i \neq d}^D \frac{1}{\lambda_{2i}} e_{2i} e_{2i}^H + \sum_{j=D+1}^M \frac{1}{\lambda_{2j}} e_{2j} e_{2j}^H \quad (24)$$

进一步分析 (13) 式中的比例因子, 有

$$u = [a^H(\phi_d) \frac{1}{\lambda_{2d}} e_{2d} e_{2d}^H a(\phi_d) + a^H(\phi_d) \sum_{i=1, i \neq d}^D \frac{1}{\lambda_{2i}} e_{2i} e_{2i}^H a(\phi_d) + a^H(\phi_d) \sum_{j=D+1}^M \frac{1}{\lambda_{2j}} e_{2j} e_{2j}^H a(\phi_d)]^{-1} \quad (25)$$

由于利用了信号的周期平稳性来提取有用信号，可以达到  $a(\phi_d)$  与所对应的特征值  $\lambda_{2d}$  和特征向量  $e_{2d}$  自动配对的目的，因此剔除比例因子和权向量在噪声子空间和干扰子空间的分量后，得到周期波束形成方法的权向量为

$$W_c = \left[ a^H(\phi_d) \frac{1}{\lambda_{2d}} e_{2d} e_{2d}^H a(\phi_d) \right]^{-1} \frac{1}{\lambda_{2d}} e_{2d} e_{2d}^H a(\phi_d) \quad (26)$$

由于进一步去除了干扰对权向量的影响，因此周期波束形成方法具有投影方法所不具有的优点。可以在高信噪比的环境下更好地工作且具有较强的抗指向误差的能力。

### 5 计算机模拟结果

以下模拟中以 8 元均匀线阵为例， $d/\lambda = 0.5$ ，数据长度均为 1024 点。

**实验 1** 两个连续波信号，频率分别为： $f_1=455\text{kHz}$ ， $f_2=(455+9)\text{kHz}$ 。入射角分别为： $\theta_1 = 100^\circ$ ， $\theta_2 = 150^\circ$ 。在  $\theta_1$  方向进行波束形成。SNR=18dB，INR=9dB。指向误差为  $\Delta = 5^\circ$ ， $\alpha = 2f_1$ 。模拟结果见图 1 和图 2。纵坐标为波束相对增益  $G$ ，对于 SMI 方法， $G = |W_s^H a(\theta)|$ ，符号  $|\cdot|$  为取模运算。对于投影方法， $G = |W_p^H a(\theta)|$ ；对于本文的方法， $G = |W_c^H a(\theta)|$ 。图中实线“—”为周期波束形成的结果，“—•—”线为投影方法的结果，虚线“---”为 SMI 方法的结果。采用 SMI 方法和投影方法特征分解后，所得到的特征值分别为：508.3263，64.6878，1.1156，1.0456，1.0237，0.9677，0.9391，0.9066。采用周期波束形成方法所得到的特征值分别为： $2.5670 \times 10^5$ ，0.6639，0.6336，0.0095，0.0057，0.0040， $3.2262 \times 10^{-4}$ ， $5.7151 \times 10^{-5}$ 。

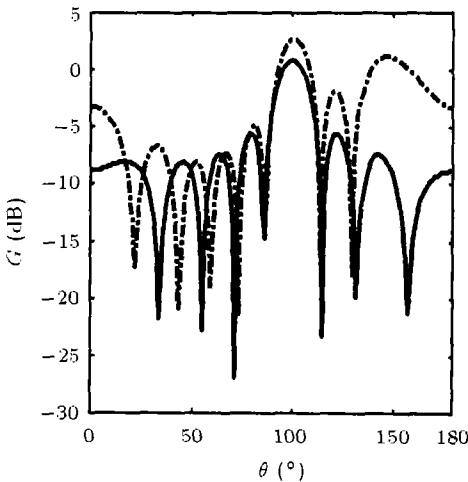


图 1 周期波束形成方法与投影方法的比较

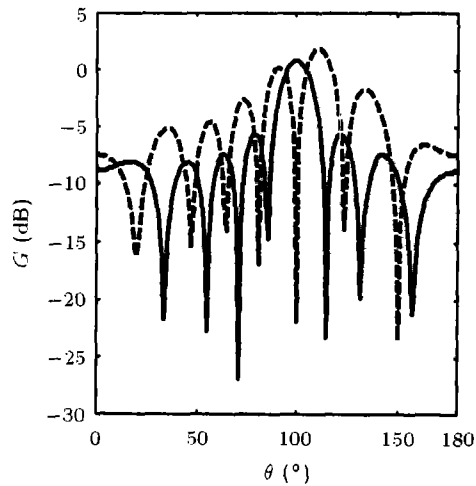


图 2 周期波束形成方法与 SMI 方法的比较

**实验 2** 除  $\Delta = 15^\circ$  外，所有模拟条件同实验 1。模拟结果见图 3 和图 4。所得到的特征值同模拟实验 1。将图 3、图 4 和图 1、图 2 分别对比后可看出，随着指向误差的增大，SMI 方法和投影方法性能下降，而本文的周期波束形成方法则较稳健。

**实验 3** 除 SNR=15dB，INR=15dB， $\Delta = 10^\circ$ ， $\theta_1 = 50^\circ$ ， $\theta_2 = 100^\circ$  外，所有模拟条件同模拟实验 1。模拟结果见图 5 和图 6。采用 SMI 方法和投影方法所得到的特征值分别为：281.9801，226.2002，1.0410，1.0125，0.9879，0.9498，0.8993，0.8215。采用周期波束形成方法所得到的特征值分别为： $6.4089 \times 10^4$ ，19.2192，0.0648，0.0057，0.0032，0.0029， $4.6636 \times 10^{-4}$ ， $9.0864 \times 10^{-6}$ 。

由实验 3 可以看出, 当信噪比和干噪比接近时, SMI 方法和投影方法所得到的特征值、特征向量反映不出与信号子空间、干扰子空间的对应关系, 而利用信号的周期平稳性后, 可以清晰地反映出特征值、特征向量与信号子空间和干扰子空间的对应关系。

大量模拟实验表明, 周期波束形成方法可以较好地工作在高信噪比、大指向误差的环境。

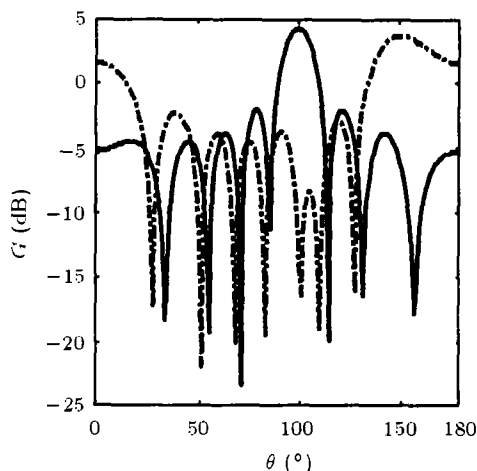


图 3 周期波束形成方法与投影方法的比较

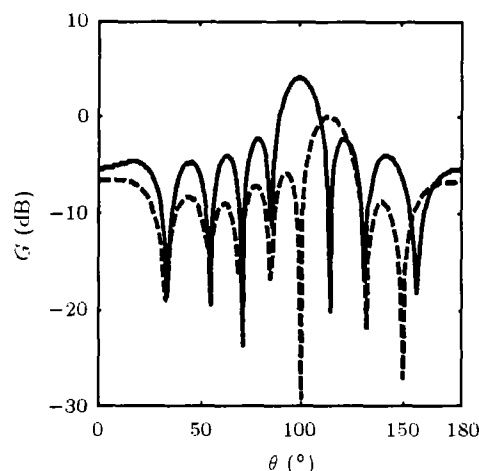


图 4 周期波束形成方法与 SMI 方法的比较

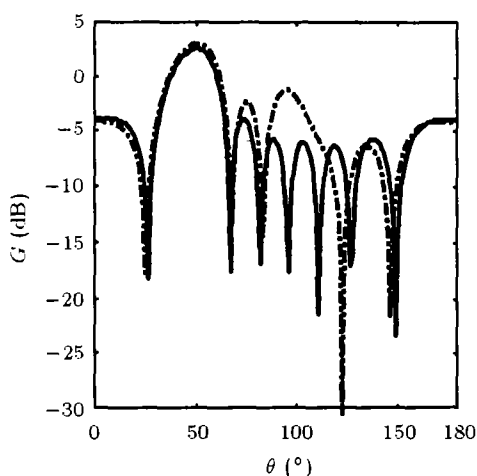


图 5 周期波束形成方法与投影方法的比较

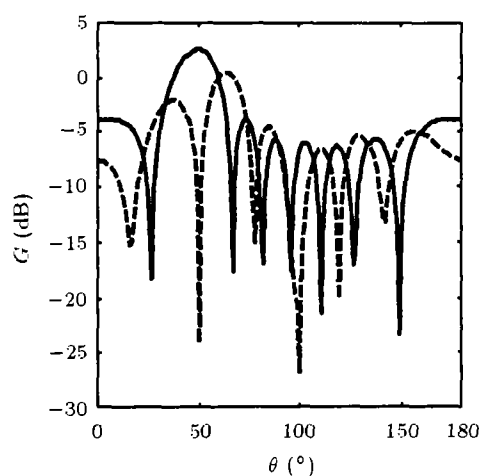


图 6 周期波束形成方法与 SMI 方法的比较

## 6 结 束 语

在利用波束形成技术进行信号分离的过程中, 阵列接收数据的协方差矩阵可以划分为信号子空间、干扰子空间和噪声子空间。由于在进行特征分解的过程中, 指向  $\phi_d$  和特征值  $\lambda_d$  的一一对应关系已经被破坏了, 无法准确找出  $a(\phi_d)$  所对应的特征向量  $e_d$ 。因此 SMI 方法得到的权向量含有在干扰子空间和噪声子空间的分量, 投影方法得到的权向量含有在干扰子空间的分量。这是造成 SMI 和投影方法在高信噪比、大指向误差条件下性能下降甚至失效的根本原因。

本文针对 SMI 和投影方法在高信噪比、大指向误差的环境中所遇到的问题, 提出了利用信号周期平稳性的周期波束方法来解决上述问题。模拟实验表明周期波束形成方法在上述条件下能够较好的工作。

## 参 考 文 献

- [1] A. J. Paulraj, C. B. Papadias, Space-time processing for wireless communication, *IEEE Signal Processing Magazine*, 1997, 14(6), 49-83.
- [2] L. G. Godara, Applications of antenna array to mobile communication, Part I: Performance improvement, feasibility, and system considerations, *Proc. IEEE*, 1997, 85(7), 1031-1060.
- [3] L. G. Godara, Applications of antenna array to mobile communication, Part II: Beam-forming and direction-arrival- considerations, *Proc. IEEE*, 1997, 85(8), 1193-1245.
- [4] I. S. Reed, J. D. Mallett, L. E. Brennan, Rapid convergence rate in adaptive arrays, *IEEE Trans. on AES*, 1974, 10(6), 853-863.
- [5] A. 麦罗拉著, 庞沁华等译, 蜂窝移动通信 - 模拟和数字系统, 北京, 人民邮电出版社, 1997 年, 第 4 章 4.2.10 节, 第 146 页, 第 7 章 7.3.1 节, 第 289 页.
- [6] P. Petrus, R. B. Ertel, J. H. Reed, Capacity enhancement using adaptive arrays in an AMPS system, *IEEE Trans. on Vehicular Technology*, 1998, 47(3), 717-727.
- [7] D. D. Feldman, L. J. Griffiths, A projection approach for robust adaptive beamforming, *IEEE Trans. on SP*, 1994, 42(4), 867-876.
- [8] W. A. Gardner, Spectral correlation of modulated signal, Part I: Analog modulation, *IEEE Trans. on COM*, 1987, 33(6), 584-594.
- [9] W. A. Gardner, W. A. Brown, C. K. Chen, Spectral correlation of modulated signal, Part II: Digital modulation, *IEEE Trans. on COM*, 1987, 35(6), 595-601.
- [10] 李立霞, 王文博, 王德伟, 周期平稳信号处理及其应用, *电子科学学刊*, 1996, 18(5), 310-316.
- [11] Gao Yong, Xiao Xianci, Tang Haiyan, Estimation of cycle frequency for multiple cyclostationary signals, *Proceeding of 1998 Fourth International Conference on Signal Processing*, Beijing, China, October, 1998, 331-334.

## BEAMFORMING IN THE ENVIRONMENTS OF HIGH SNR AND LARGE STEERING ERROR

Gao Yong    Xiao Xianci

*(Dept. of Electron. Eng., UEST of China, Chengdu 610054, China)*

**Abstract** In the beamformer based on sample covariance matrix inverse (SMI) algorithm, the calculation of weight vector comprises the components of interferences and noise. The projection method comprises the components of interferences. It induces the imperfective results of the beamformer. Under the environments of high signal-to-noise ratio (SNR) and large steering error, SMI algorithm and the projection method are invalid. The cyclic beamformer of utilizing signal's cyclostationarity is proposed to resolve the problem above-mentioned. The simulation results verify the cyclic beamforming algorithm.

**Key words** Beamforming, Cyclostationary, SMI, Projection

高 勇: 男, 1969 年生, 博士生, 目前主要从事阵列信号处理应用研究、高速 DSP 开发工作.

肖先赐: 男, 1933 年生, 教授、博士生导师, 中国电子学会会士。主要从事谱估计、阵列信号处理、混沌信号处理、神经网络的应用等方面的教学和研究工作.