

# 综合孔径射电望远镜中锁幅环的增益抖动\*

杨以培  
(北京天文台)

## 提 要

本文介绍了一种综合孔径射电望远镜上的增益控制环路,并详细讨论了噪声对增益起伏的影响。文章介绍了锁幅环的基本性质,推导了噪声功率与增益均方抖动之间的关系式。推导了环路失锁门限,并画出了实验验证的结果。最后讨论了减少噪声影响的一些措施。

## 一、引 言

在综合孔径射电望远镜中,为了保证系统的各个通道稳定工作,特意引进一个导引信号来进行锁相和锁幅。由于射电望远镜工作在很低的信噪比条件下,为了避免信噪比的

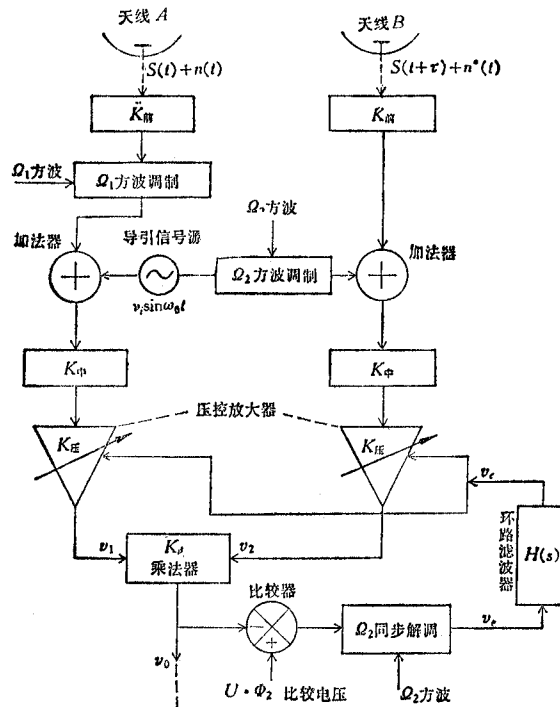


图1 综合孔径望远镜1×1基本单元的锁幅环的简化框图。

\* 1980年4月16日收到。

进一步降低, 导引信号总是取得很小。此时由天线接收的天体射电信息、空间的各种噪声以及接收机的本机噪声, 都会对锁幅环的工作产生一定的影响。引起锁幅环中增益的抖动, 严重时会导致环路失锁, 使整个系统无法工作。本文着重推导了计算增益抖动的基本公式, 并确定了环路失锁的门限条件, 为锁幅环的设计提供了依据。

## 二、锁幅环的基本结构及通道中的噪声的性质

图 1 是综合孔径接收机  $1 \times 1$  基本单元的简化框图 (锁相环路未画在内)。图中各符号的意义如下:

$s(t)$ 、 $s(t + \tau)$ ——接收的宇宙天体辐射;  $n(t)$ 、 $n^*(t)$ ——接收的各种杂乱噪声和接收机前端的噪声 (后端的噪声影响可以忽略);  $K_{\text{前}}$ ——在加法器之前的总增益, 包括高放、混频、前中及传输线等;  $K_{\text{中}}$ ——环路中的中频通道增益;  $K_{\text{压}}$ ——压控放大器增益;  $K_{\text{乘}}$ ——乘法器增益;  $v_c$ ——压控放大器的控制电压;  $f_0$ ——中频中心频率;  $v_i \sin \omega_0 t$ ——导引信号。

由于在宇宙观测时  $s(t)$  远小于  $n(t)$  和  $n^*(t)$ , 故在分析中可将  $s(t)$  和  $s(t + \tau)$  忽略不计。

为了将导引信号与接收机的接收信息区分开来, 采用了二次相开关调制  $\Omega_1$  与  $\Omega_2$ 。乘法器输出  $v_0$  经  $\Omega_1$  同步解调后即为有用的信息。同时  $v_0$  又进入锁幅环, 与一个同样受  $\Omega_2$  方波调制的给定电平  $U$  去进行比较, 再经过  $\Omega_2$  同步解调及环路滤波器, 就产生了压控放大器的控制电压  $v_c$ 。在整个过程中, 认为两个通道中的相位是严格锁定的。

$n(t)$  和  $n^*(t)$  可以看作是窄带白高斯噪声, 它们的带宽即为接收机带宽  $B_i$ , 它们各自可以分解成两个互为正交的分量<sup>[1]</sup>:

$$n(t) = n_c(t) \cos \omega_0 t - n_s(t) \sin \omega_0 t \quad (1)$$

其中,  $n_c(t) = V_n \cos \theta_n(t)$ ,  $n_s(t) = V_n \sin \theta_n(t)$

又  $n^*(t) = n_c^*(t) \cos \omega_0 t - n_s^*(t) \sin \omega_0 t \quad (2)$

其中,  $n_c^*(t) = V_n^* \cos \theta_n^*(t)$ ,  $n_s^*(t) = V_n^* \sin \theta_n^*(t)$ 。

$V_n$ 、 $V_n^*$  为随机振幅,  $\theta_n$  和  $\theta_n^*$  为随机相位。  $n(t)$ 、 $n_c(t)$ 、 $n_s(t)$  的概率密度均服从正态分布, 而且均值都为零, 方差都相等。同样,  $n^*(t)$ 、 $n_c^*(t)$  和  $n_s^*(t)$  也具有这些性质。由于两条通道的天线和前端是完全一样的, 故有  $n(t)$  与  $n^*(t)$  的方差相同。即:

$$D[n(t)] = D[n_c(t)] = D[n_s(t)] = D[n^*(t)] = D[n_c^*(t)] = D[n_s^*(t)] = \sigma^2$$

如果  $n(t)$  和  $n^*(t)$  在带内的功率谱密度为  $W_n$ , 则有:

$$\sigma^2 = W_n B_i$$

## 三、压控放大器的增益特性

接收机中所用的压控放大器的控制特性如图 2 所示, 即在使用范围内放大器的增益 (按分贝 (dB) 或奈培 (N) 计算) 与控制电压  $v_c$  保持良好的线性关系。这一特性可表示为:

压控放大器增益  $A = \alpha \cdot v_c + A_0$  (N) 折合成电压放大倍数为:

$$K_{\text{压}} = e^A = e^{A_0} \cdot e^{\alpha v_c}$$

$K_{\text{压}}$  中的  $e^{A_0}$  分量在以下的推导中并入  $K_{\text{中}}$  项, 用  $K_{\text{中}}^*$  表示, 如图 3 所示。

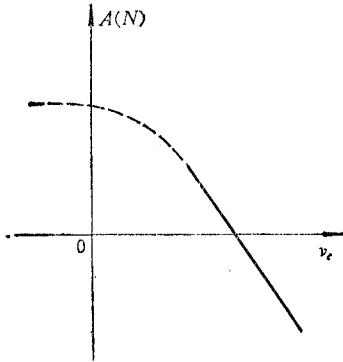


图 2 压控放大器的增益特性

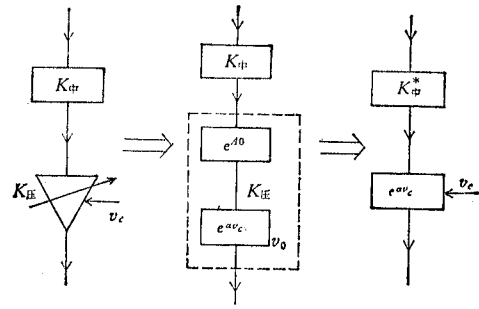


图 3 压控放大器的增益变换

#### 四、环路增益抖动的计算方法

我们对  $\Omega_1$ 、 $\Omega_2$  相关调制及解调采用开关函数  $\Phi_1$  和  $\Phi_2$ <sup>[2]</sup>。

$$\Phi_1 = \begin{cases} +1 & \Omega_1 t \in [\Omega_1 t_0 + 2K\pi, \Omega_1 t_0 + (2K+1)\pi] \\ -1 & \Omega_1 t \in [\Omega_1 t_0 + (2K+1)\pi, \Omega_1 t_0 + 2(K+1)\pi] \end{cases}$$

$$\Phi_2 = \begin{cases} +1 & \Omega_2 t \in [\Omega_2 t_0 + 2K\pi, \Omega_2 t_0 + (2K+1)\pi] \\ -1 & \Omega_2 t \in [\Omega_2 t_0 + (2K+1)\pi, \Omega_2 t_0 + 2(K+1)\pi] \end{cases}$$

由于两条通道是相位锁定的, 故进入乘法器两边的信号可写为:

$$v_1 = (K_{\text{前}} K_{\text{中}}^* n^*(t) \Phi_1 + K_{\text{中}}^* v_i \sin \omega_0 t) \cdot e^{\alpha v_c}$$

$$v_2 = (K_{\text{前}} K_{\text{中}}^* n^*(t) + K_{\text{中}}^* v_i \sin \omega_0 t \Phi_2) \cdot e^{\alpha v_c} \quad (3)$$

乘法器输出为:

$$v_0 = K_{\beta} v_1 v_2$$

将 (1)、(2)、(3) 式代入:

$$v_0 = K_{\beta} e^{2\alpha v_c} K_{\text{中}}^{*2} [K_{\text{前}}^2 \Phi_1 (n_c n_c^* \cos^2 \omega_0 t + n_s n_s^* \sin^2 \omega_0 t - n_c^* n_s \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t - n_c n_s^* \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t) + K_{\text{前}} \Phi_1 \Phi_2 (n_c v_i \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t - n_s v_i \sin^2 \omega_0 t) + K_{\text{前}} (n_c^* v_i \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t - n_s^* v_i \sin^2 \omega_0 t) + v_i^2 \sin^2 \omega_0 t \Phi_2]$$

简化后, 并考虑到  $\sin 2\omega_0 t$ 、 $\cos 2\omega_0 t$  的高频成分在乘法器输出时已被滤除, 故  $v_0$  可改写为:

$$v_0 = K_{\beta} K_{\text{中}}^{*2} e^{2\alpha v_c} \left[ K_{\text{前}}^2 \Phi_1 \left( \frac{1}{2} n_c n_c^* + \frac{1}{2} n_s n_s^* \right) - K_{\text{前}} \left( \frac{1}{2} v_i n_s \Phi_1 \Phi_2 + \frac{1}{2} v_i n_s^* \right) + \frac{1}{2} v_i^2 \Phi_2 \right] \quad (5)$$

送入比较器的比较电压为  $U \cdot \Phi_2$ , 同步解调后的信号  $v_c$  应为:

$$v_c = (U\Phi_2 - v_0) \cdot \Phi_2 = \left( U - \frac{1}{2} K_\beta K_\#^{*2} e^{2\alpha v_c} v_i^2 \right) - \frac{1}{2} K_\beta K_\#^{*2} e^{2\alpha v_c} [K_{\#}^2 \Phi_1 \Phi_2 (n_c n_c^* + n_s n_s^*) - K_{\#} (v_i n_s \Phi_1 + v_i n_s^* \Phi_2)] \quad (6)$$

在选取比较电压时,可先取

$$U = \frac{1}{2} K_\beta K_\#^{*2} v_i^2,$$

即等于压控放大器控制电压为零时乘法器输出端的导引信号电平。在实际使用中,比较电压经常是这样选择的。这样选取的好处是当锁幅环处于稳态工作时, $v_c$  和  $v_c$  的均值都为零。对于  $U$  取其它值的情形,不难从所得的结果中引伸出来。

$v_c$  和  $v_c$  的随机分布可认为是正态的,由此可从(6)式求出  $v_c$  的方差。设  $v_c$  的方差为  $\sigma_0^2$ ,如果能从  $v_c$  的方差进而求出  $\sigma_0$  的值,则由于压控放大器的增益为

$$A = \alpha \cdot v_c + A_0 \quad (N)$$

所以每条通道的增益均方抖动应为:

$$\Delta A = |\alpha| \cdot \sigma_0(N) \quad (7)$$

而乘法器输出是两条通道乘积的结果,所以总输出增益的均方抖动应为  $2|\alpha|\sigma_0(N)$ 。

## 五、计算步骤

已设  $v_c$  的均值为 0、方差为  $\sigma_0^2$ ,则  $e^{2\alpha v_c}$  项的均值和方差为:

$$E(e^{2\alpha v_c}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\alpha v_c} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \cdot e^{-\left(\frac{v_c^2}{2\sigma_0^2}\right)} \cdot dv_c = e^{2\alpha^2\sigma_0^2} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} D(e^{2\alpha v_c}) &= \int_{-\infty}^{\infty} [e^{2\alpha v_c} - E(e^{2\alpha v_c})]^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \cdot e^{-\left(\frac{v_c^2}{2\sigma_0^2}\right)} \cdot dv_c \\ &= e^{8\alpha^2\sigma_0^2} - e^{4\alpha^2\sigma_0^2} \end{aligned} \quad (9)$$

下面计算  $v_c$  的方差,由(6)式:

$$\begin{aligned} v_c &= \left( U - \frac{1}{2} K_\beta K_\#^{*2} \cdot e^{2\alpha v_c} \cdot v_i^2 \right) - \frac{1}{2} K_\beta K_\#^{*2} \cdot e^{2\alpha v_c} \cdot [K_{\#}^2 \Phi_1 \Phi_2 \\ &\quad \cdot (n_c n_c^* + n_s n_s^*) - K_{\#} (v_i n_s \Phi_1 + v_i n_s^* \Phi_2)] = v_{c1} + v_{c2} \end{aligned}$$

其中:

$$v_{c1} = U - \frac{1}{2} K_\beta K_\#^{*2} \cdot e^{2\alpha v_c} \cdot v_i^2$$

$$v_{c2} = -\frac{1}{2} K_\beta K_\#^{*2} \cdot e^{2\alpha v_c} \cdot [K_{\#}^2 \Phi_1 \Phi_2 (n_c n_c^* + n_s n_s^*) - K_{\#} (v_i n_s \Phi_1 + v_i n_s^* \Phi_2)]$$

可近似地认为  $v_{c1}$  与  $v_{c2}$  是相互独立的,且不难证明:  $D(v_{c1}) \ll D(v_{c2})$ ,因此有:

$$D(v_c) = D(v_{c1}) + D(v_{c2}) \approx D(v_{c2}).$$

在  $D(v_{c2})$  的计算中,近似地认为  $e^{2\alpha v_c}$  项分别与  $n_c$ 、 $n_c^*$ 、 $n_s$ 、 $n_s^*$  中任一项是相互独立的。由于构成  $v_c$  随机分布的这四项随机变量是相互独立的,所以上述的近似不会引起很大误

差。这样,  $D(v_{c2})$  可表示为:

$$\begin{aligned} D(v_{c2}) = & \frac{1}{4} K_{\beta}^2 K_{\#}^{*4} \{ D(e^{2\alpha v_c}) \cdot D[-K_{\#}^2 \Phi_1 \Phi_2 (n_c n_c^* + n_s n_s^*) + K_{\#} \Phi_1 v_i n_s \\ & + K_{\#} \Phi_2 v_i n_s^*] + [E(e^{2\alpha v_c})]^2 \cdot D[-K_{\#}^2 \Phi_1 \Phi_2 (n_c n_c^* + n_s n_s^*) \\ & + K_{\#} \Phi_1 v_i n_s + K_{\#} \Phi_2 v_i n_s^*] + (E[-K_{\#}^2 \Phi_1 \Phi_2 (n_c n_c^* + n_s n_s^*) \\ & + K_{\#} \Phi_1 v_i n_s + K_{\#} \Phi_2 v_i n_s^*])^2 \cdot D(e^{2\alpha v_c}) \} \end{aligned} \quad (10)$$

将(8)、(9)式代入,可得:

$$\begin{aligned} D(v_c) \approx D(v_{c2}) = & \frac{1}{2} K_{\beta}^2 K_{\#}^4 K_{\#}^{*4} \cdot e^{8\alpha^2 \sigma_0^2} \cdot \left( \sigma^4 + \frac{v_i^2}{K_{\#}^2} \sigma^2 \right) \\ = & \frac{1}{2} G^2 \cdot e^{8\alpha^2 \sigma_0^2} \cdot \sigma^4 (1 + 2M^2) \end{aligned} \quad (11)$$

其中:

$$G = K_{\beta} K_{\#}^2 K_{\#}^{*2}; \quad M = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{v_i}{K_{\#} \sigma}$$

$G$  就是乘法器输出端的总放大倍数,  $M$  的物理意义就是在乘法器输入端导引信号的均方电压与噪声均方电压之比。导引信号大小的选择,一般是使  $M \ll 1$ 。

$v_c$  的功率谱可近似看作在  $0 - \frac{B_i}{2}$  范围内是均布的,由于  $n(t)$  和  $n^*(t)$  都是窄带白噪声,同时实践证明,锁幅环在失锁前的增益起伏总是较小的,所以对  $v_c$  的功率谱作这样的近似估计是合理的。 $v_c$  的功率谱密度函数可表示为:

$$W_{v_c} = \begin{cases} D(v_c) / \frac{B_i}{2} & 0 < f \leq \frac{B_i}{2} \\ 0 & f > \frac{B_i}{2} \end{cases} \quad (12)$$

利用环路滤波器的传递函数  $H(s)$ , 可求得  $v_c$  的方差为:

$$\begin{aligned} D(v_c) = \sigma_0^2 = & \int_0^{\infty} W_{v_c} \cdot |H(s)|_{s=j\omega}^2 df \\ = & \frac{D(v_c)}{B_i/2} \cdot \int_0^{B_i/2} |H(s)|_{s=j\omega}^2 df = D(v_c) \frac{B_L}{B_i/2} \end{aligned} \quad (13)$$

其中

$$B_L = \int_0^{B_i/2} |H(s)|_{s=j\omega}^2 df, \quad (14)$$

$B_L$  可看作是环路滤波器的等效噪声带宽,它标志着环路滤波器对噪声的过滤程度。

将(11)式代入(13)式,可得:

$$e^{8\alpha^2 \sigma_0^2} = \frac{B_i \sigma_0^2}{G^2 \sigma^4 (1 + 2M^2) B_L} \quad (15)$$

(15)式就是计算  $\sigma_0$  的基本关系式,用图解法或计算机解均可。在用图解法时,分别作出  $e^{8\alpha^2 \sigma_0^2} - \sigma_0^2$  曲线和  $\frac{B_i \sigma_0^2}{G^2 \sigma^4 (1 + 2M^2) B_L} - \sigma_0^2$  曲线,求出其交点所对应的  $\sigma_0^2$  值,如图4中所示的  $\sigma_{0a}^2$ 。 $\sigma_0$  的值一经确定,环路总增益的均方抖动便立即确定为  $2 \cdot |\alpha| \cdot \sigma_0(N)$ 。

不难证明,当比较电压的取值  $U \approx \frac{1}{2} K_{\beta} K_{\#}^2 v_i^2$  时, (15) 式依然成立, 只是式中  $G$  的表示式应改为:

$$G = K_{\beta} \cdot K_{\#}^2 \cdot K_{\#}^2 \cdot K_{\#}^2 \quad (16)$$

$K_{\#}$  可由下式确定:

$$K_{\#} = \frac{U}{\frac{1}{2} K_{\beta} K_{\#}^2 v_i^2} \quad (17)$$

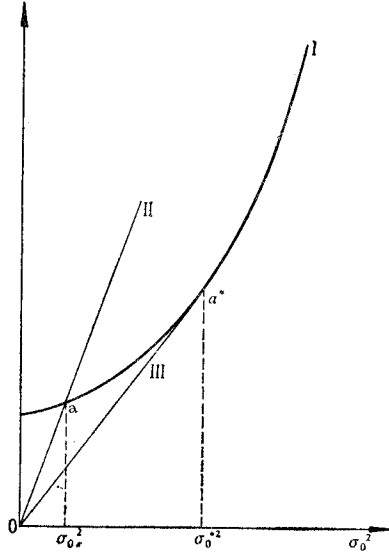


图4 用图解法求  $\sigma_0$  值

曲线 I 为  $e^{\alpha \sigma_0^2} - \sigma_0^2$  曲线, 曲线 II 为  $\frac{B_i \sigma_0^2}{B_L G^2 \sigma^4 (1 + 2M^2)} - \sigma_0^2$  曲线, 曲线 III 为失锁门限时的  $\frac{B_i \sigma_0^2}{B_L G^2 \sigma^4 (1 + 2M^2)} - \sigma_0^2$  曲线.

## 六、失锁门限的计算

由 (15) 式和图 4 可以看出, 当环路的增益增加、或噪声电平增加都会引起直线 II 的斜率减小. 当减小到图中直线 III 的位置时, 直线与曲线相切. 当直线的斜率再下降时, 直线与曲线不再有交点, 也就是说已找不到  $\sigma_0$  的确定解. 此时我们就认为环路已经失锁.

曲线  $y = e^x$  与直线  $y = kx$  相切的条件为  $k = e$ , 并且切点的座标为  $x = 1$ . 与此相仿, 通过变量变换可以从 (15) 式中解出环路的失锁门限为:

$$\frac{B_i}{8\alpha^2 G^2 \sigma^4 (1 + 2M^2) B_L} = e \quad (18)$$

此时对应的  $\sigma_0$  值记作  $\sigma_0^*$ ,

$$\sigma_0^* = \frac{1}{2\sqrt{2} \cdot |\alpha|}$$

因此在失锁门限时接收机的总增益抖动为:

$$2 \cdot |\alpha| \cdot \sigma_0^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (N) \quad (19)$$

由 (18) 式可写出环路失锁的条件为:

$$\frac{B_i}{8\alpha^2 G^2 \sigma^4 (1 + 2M^2) B_L} < \epsilon \quad (20)$$

或写成

$$8\alpha^2 G^2 W_n^2 (1 + 2M^2) B_i B_L > \frac{1}{\epsilon} \quad (21)$$

## 七、实验验证

为了验证式 (20) 的正确性, 做了按图 5 安排的实验。先在不加噪声的锁定情况下, 将乘法器两边输入端处的导引信号幅度调节至一选定值(如 1mV)。然后加入噪声, 随着噪声强度的增加, 记录下乘法器输入端的电压值和压放控制电压的变化值  $\Delta v_c$ , 由  $\Delta v_c$  的值可算出压控放大器的增益变化量。

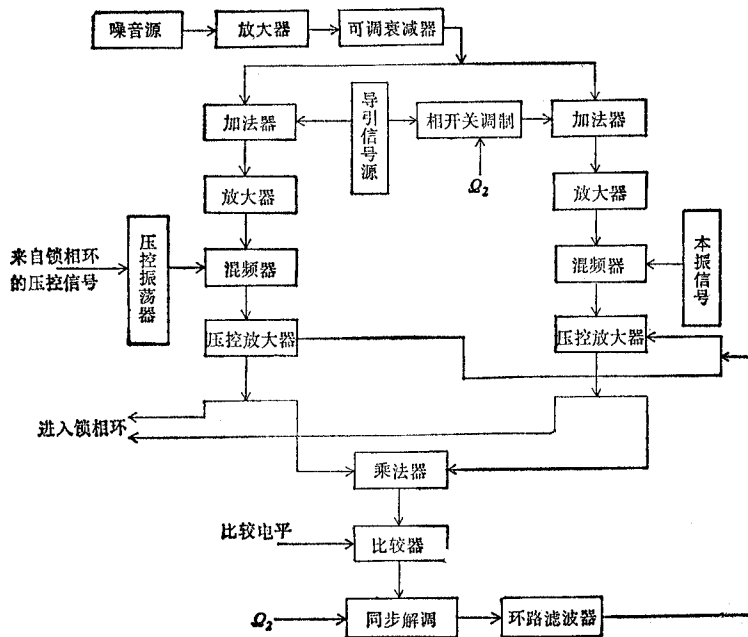


图 5 实验框图

又由 (18) 式可进一步演化为:

$$8\alpha^2 K_\beta^3 V_N^4 (1 + 2M^2) B_L / B_i = \frac{1}{\epsilon} \quad (22)$$

其中:

$$V_N = \sqrt{\frac{G}{K_\beta}} \sigma,$$

$V_N$  代表着乘法器输入端的噪声电压幅度。实验中在乘法器输入端测得的电压值是噪声电压  $V_N$  和已知的导引信号电压的合成,  $V_N$  可以从中计算得到。这样就得到了  $V_N$  与压放增益变化的关系。

实验系统各有关部分的参数为:

$$\alpha = -0.058(\text{N/mV}), \quad K_\beta = 94.4 (\text{倍}),$$

$$H(s) = \frac{7.5}{\tau s + 1}, \quad \tau = 0.748(\text{S}), \quad \text{计算得 } B_L = 18.8(\text{Hz}).$$

中频半功率带宽为 1.5MHz。根据调谐方式, 可得等效的矩形带宽  $B_f = 1.48 \times 1.5\text{MHz} = 2.22\text{MHz}$ 。(文献 [4])

在第一组实验中, 乘法器输入端导引信号的幅度选为 1mV, 此时由 (22) 式可计算出失锁门限时,  $V_N$  的理论值应为 3.53mV。实验结果见图 6。

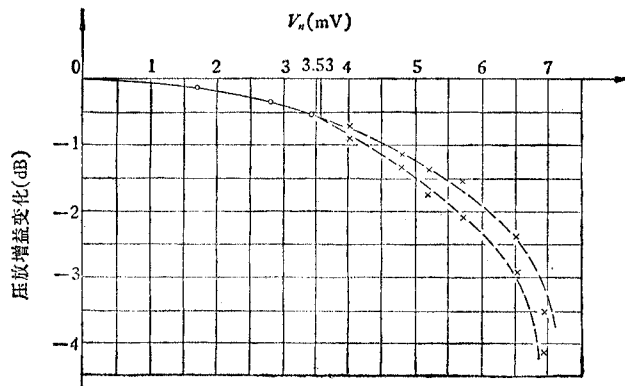


图 6

在实验中, 随着噪声的增加, 环路由稳定的锁定状态变为稳定振荡状态;  $v_c$  的值变成交变状态, 测量时已无法测出  $v_c$  的确定值, 只能记录下  $v_c$  的变化范围, 在图 6 中用虚线部分表示了这一现象。随着噪声的增强, 这种振荡的幅度也增大, 到达一定程度便完全失控。在图中标出了由 (22) 式计算出的失锁门限时的  $V_N$  值, 可以看出它与实验结果是十分吻合的。

在另一组实验中, 选取乘法器输入端的导引信号幅度为 2mV。此时由 (22) 式计算出的失锁门限时的  $V_N$  值应为 3.17mV, 实验结果如图 7 所示,  $V_N$  的理论值与实验结果也吻

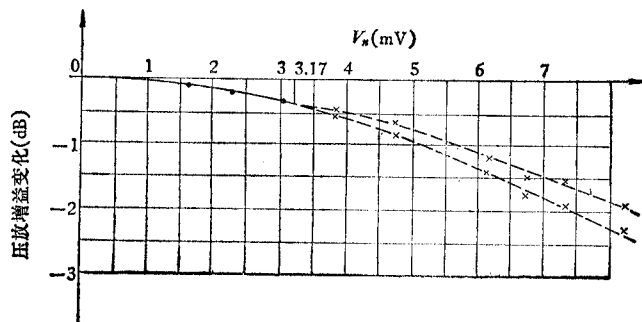


图 7



合得很好。

实验中有一种现象,即在环路很好锁定的情况下,噪声的增加也会引起环路增益的微小偏移。这主要是由于系统各部件的非理想性所造成的。图 6 中这种现象比图 7 中更明显,这是由于前一组实验中导引信号取得弱,系统各部件不理想性的影响就大些。

## 八、结 论

前面导出了锁幅环失锁条件的基本关系式和计算环路增益抖动的基本关系式。通过实验验证,可认为这些关系式是可靠的,在设计环路时可直接运用。

在锁幅环的设计中,接收机的总增益  $G$  和带宽  $B_L$  经常是限定的。因此改善环路的稳定性主要在于改善接收机前端的噪声系数,以及选择合适的压控放大器参数  $\alpha$  和环路滤波器的传递函数  $H(s)$ 。  $|\alpha|$  值越小,  $H(s)$  的选择使  $B_L$  越小,越能减少环路的增益抖动,但同时会引起锁幅环调节性能变迟缓。因此,结合锁幅环的全面特性,选择适当的  $\alpha$  值和  $H(s)$  是很重要的。这里要说明一点,在前面的推导中,比较器的增益是按 1 考虑的,在实际应用中,比较器若有增益,应归算到  $H(s)$  中去。

本文所分析的接收机模型是北京天文台射电室综合孔径组研制的实验室样机。在本文的完成和实验工作中,得到组内全体同志的大力帮助,在此谨表示感谢。

## 参 考 文 献

- [ 1 ] 郑继禹、万心平、张厥盛,锁相环路原理与应用,人民邮电出版社,1976,第 144 页。
- [ 2 ] 刘以嵩,北京天文台台刊,1977,第 9 期,第 60 页。
- [ 3 ] 陆道政、季新宝,自动控制原理及设计,上海科学技术出版社,1978。
- [ 4 ] J. D. Kraus, M. E. Tiuri, *Radio Astronomy, New York McGraw-Hill*, (1966), 245.

## VARIATION OF GAIN OF THE GAIN-LOCK LOOP IN A SYNTHETIC RADIO TELESCOPE

Yang Yi-pei

(*Beijing Astronomical Observatory*)

In this paper, a gain control loop which operates in synthetic radio telescope is described. The influence of noise on the variation of the gain is discussed in some details; the gain-lock loop is described; the relation between noise power and variation of gain is derived; the formula for determining the threshold of unlocking is given and the experimental results are displayed in Fig. 6 and Fig. 7. In this paper, the steps taken to decrease the influence of noise are also discussed.