

# 分析波导问题的松弛迭代区域分解法<sup>1</sup>

朱汉清 龙毅 吴正德 K. M. Luk\*

(电子科技大学应用物理所 成都 610054)

\*(香港城市大学电子工程系 香港九龙)

**摘要** 针对基于 Schwarz 交替法的迭代区域分解法, 在分析波导问题时遇到的不收敛的困难, 该文从实际场分布出发, 在划分区域的虚拟边界上给出了连接子域的吸收虚拟边界条件, 用以保证相邻子域间的波传播, 从而构建了一种能够分析波导问题的收敛的迭代区域分解法。在此基础上进一步引入松弛算法, 用于加快迭代收敛速度。数值计算结果表明了该方法的有效性。

**关键词** 区域分解法, 虚拟边界条件, 迭代算法, 松弛算法, 波导问题

**中图分类号** O441, TN814

## 1 引言

区域分解法作为分析大型复杂电磁问题的有效方法, 已经受到人们的广泛重视<sup>[1-3]</sup>。它通过对求解区域的划分, 将原问题分解为若干个可独立求解且相互作用的子问题, 极大地减少了计算规模和内存需求。Schwarz 交替法用于区域分解法的迭代求解, 在静态电磁问题中得到了成功的应用, 已被用于分析 TEM 和准 TEM 传输线的特性<sup>[4]</sup>以及 VLSI 电容矩阵参数提取<sup>[5]</sup>等。然而对于波动问题, 由于 Helmholtz 方程微分算子的系数矩阵非正定, 因此基于 Schwarz 交替法的区域分解法, 在迭代求解过程中不能保证收敛<sup>[2]</sup>。实际上, 对于波动问题在求解区域内设置第一或第二类虚拟边界条件划分区域, 将会导致电磁波在边界上反射, 从而破坏原问题的场分布, 所以在设置虚拟边界条件时, 应保证电磁场在该处无反射地通过才符合原问题的真实情况。B. Stupfel<sup>[3]</sup>在文献 [1] 的基础上, 有效地发展了属于第三类边界条件的 Robin 传输条件, 从吸收边界条件出发, 进一步得到了高阶的传输条件作为虚拟边界条件划分区域, 从而构成相应的迭代区域分解法, 研究了任意截面无限长柱体的散射问题, 其相邻子域间的波传播通过传输条件得以保证。在波导问题的区域分解法求解过程中, 当划分区域的虚拟边界处只有单模传输时, 其虚拟边界条件与上述传输条件相类似, 然而在许多实际问题中, 这种单模条件是很难保证的, 虚拟边界处由于不连续结构的影响, 往往存在包括高次模在内的多个模式, 这时很难使用类似于传输条件的虚拟边界条件来划分区域, 构成相应的迭代区域分解法。针对这一困难, C. T. Spring 等人<sup>[6]</sup>通过在虚拟边界处匹配边界条件的途径, 采用了一种非迭代的区域分解法分析导波系统。

本文从实际场分布出发, 给出了划分区域的吸收虚拟边界条件, 保证了相邻子域间的波传播, 从而构建了分析波导问题的迭代区域分解法。在此基础上, 进一步引入松弛算法, 用于改善迭代收敛速度。为了说明方法原理, 文中选择了矩形波导中 E 面不连续结构作为研究对象。作为算例, 计算了波导中双金属片的主模反射系数和透射系数, 并与模式匹配法的结果进行了比较。同时还就算例对算法的收敛性及松弛因子对收敛速度的影响进行了讨论。

## 2 吸收虚拟边界条件

考虑如图 1 所示的矩形波导中 E 面不连续结构问题。由于不连续结构在  $y$  方向的均匀性, 当以主模  $TE_{10}$  入射时, 仅激励起  $TE_{m0}$  模。令  $E_y = u$ , 并略去时间因子  $e^{j\omega t}$ , 则  $u$  满足下列 Helmholtz 方程和边界条件:

<sup>1</sup> 2001-03-07 收到, 2001-08-03 定稿

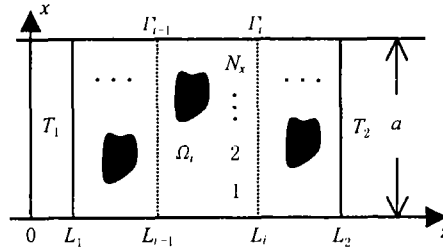


图1 矩形波导中 E 面不连续结构的区域分解

$$\left. \begin{aligned} \partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial z^2 + k^2 u &= 0 \\ u|_{x=0,a} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中  $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$ 。当两侧边界  $T_1$ 、 $T_2$  远离不连续结构时, 电场在这两个边界上分别满足如下边界条件<sup>[7]</sup>:

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=L_1} = jk_{z10} u - j2k_{z10} \sin \left[ \frac{\pi x}{a} \right] e^{-jk_{z10} L_1} \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=L_2} = -jk_{z10} u \quad (3)$$

其中  $k_{z10} = \sqrt{k^2 - \pi^2/a^2}$ 。上述边值问题 (1) - (3) 式可采用有限差分法直接求解。

当求解区域较大时, 为了减小计算规模, 可利用区域分解法将整个求解区域分解成  $N$  个子区域  $\Omega_i (i = 1, 2, \dots, N)$ , 其虚拟边界为  $\Gamma_i (i = 1, 2, \dots, N-1)$ 。为了构建迭代的区域分解算法, 并获得收敛解, 在虚拟边界处必须设置吸收的虚拟边界条件, 用以保证相邻子域间的波传播。显然, 当虚拟边界  $\Gamma_i$  与不连续结构相距不是很远时, 在该处必然同时存在主模和高次模的传输, 所以这时很难选用类似于传输条件的虚拟边界条件来划分区域。为了得到无反射的虚拟边界条件, 根据实际场分布情况, 我们假设虚拟边界  $\Gamma_i$  处的电场具有下列形式:

$$u_i = \sum_{n=1}^M C_n(z) \sin \left[ \frac{n\pi x}{a} \right] \quad (4)$$

$C_n(z)$  为复数。利用三角函数的正交性, 由 (4) 式可知

$$C_n(z) = \frac{2}{a} \int_0^a u_i(x, z) \sin \left[ \frac{n\pi x}{a} \right] dx \quad (5)$$

为了建立  $\Gamma_i$  处的联接条件, 对 (4) 式求导有

$$\frac{\partial u_i}{\partial z} = \sum_{n=1}^M \frac{\partial C_n(z)}{\partial z} \sin \left[ \frac{n\pi x}{a} \right] \quad (6)$$

用差商代替微商, 并沿  $x$  方向作数值积分, 则 (6) 式中的  $\frac{\partial C_n(z)}{\partial z}$  为

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_n(z)}{\partial z} &= \frac{2}{a} \int_0^a \frac{u_{i+1}(x, z = L_i + h_z) - u_i(x, z = L_i)}{h_z} \sin \left[ \frac{n\pi x}{a} \right] dx \\ &= \frac{2}{a} \sum_{l=1}^{N_x} \frac{h_x}{h_z} [u_{i+1}(x_l, z = L_i + h_z) - u_i(x_l, z = L_i)] \sin \left[ \frac{n\pi x_l}{a} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

将 (7) 式代入 (6) 式便可得到  $\Gamma_i$  处的虚拟边界条件为

$$\frac{\partial u_i}{\partial z} \Big|_{z=L_i} = \sum_{l=1}^{N_x} [u_{i+1}(x_l, z = L_i + h_z) - u_i(x_l, z = L_i)] \cdot \xi(x, l) \quad (8)$$

其中

$$\xi(x, l) = \frac{2 h_x}{a h_z} \sum_{n=1}^M \sin \left[ \frac{n\pi x}{a} \right] \sin \left[ \frac{n\pi x_l}{a} \right] \quad (9)$$

类似地, 可得到  $\Gamma_{i-1}$  处的虚拟边界条件为

$$\frac{\partial u_i}{\partial(-z)} \Big|_{z=L_{i-1}} = \sum_{l=1}^{N_x} [u_{i-1}(x_l, z = L_{i-1} - h_z) - u_i(x_l, z = L_{i-1})] \cdot \xi(x, l) \quad (10)$$

将上述 (8), (10) 两式写成统一的简洁形式, 便可得到第  $i$  子区域的解  $u_i$  在虚拟边界  $\Gamma_i$  和  $\Gamma_{i-1}$  处的虚拟边界条件为

$$\frac{\partial u_i}{\partial n} = \sum_{l=1}^{N_x} (u_i^+ - u_i) \cdot \xi(x, l) \quad (11)$$

$\hat{n}$  为区域  $\Omega_i$  的单位外法向矢量,  $u_i^+$  表示区域  $\Omega_{i-1}$  和  $\Omega_{i+1}$  内且距虚拟边界一个离散间隔处的值。由于 (11) 式所给出的虚拟边界条件是从实际场分布推导而来的, 因此它能够保证相邻子域间的波传播, 是一种吸收的虚拟边界条件。

### 3 松弛迭代区域分解法

利用本文给出的吸收虚拟边界条件 (11) 式, 可构成下列迭代区域分解算法, 其第  $i$  子区域的第  $m$  次迭代为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 (u_i)^m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (u_i)^m}{\partial z^2} + k^2 (u_i)^m &= 0 \\ (u_i)^m \Big|_{x=0, a} &= 0 \\ \frac{\partial (u_i)^m}{\partial n} \Big|_{z=L_{i-1}, L_i} &= \sum_{l=1}^{N_x} [(u_i^+)^{m-1} - (u_i)^m] \cdot \xi(x, l) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

为了改善迭代收敛速度, 我们在此基础上进一步引入松弛算法, 将上述迭代算法中的虚拟边界条件改写为下列形式:

$$\frac{\partial (u_i)^m}{\partial n} \Big|_{z=\begin{cases} L_i \\ L_{i-1} \end{cases}} = \sum_{l=1}^{N_x} \{ (u_i^+)^{m-1} - (u_i)^m - \alpha [(u_i)^{m-1} - (u_{i\pm 1})^{m-1}] \} \cdot \xi(x, l) \quad (13)$$

其中  $\alpha$  称为松弛因子 ( $0 \leq \alpha \leq 0.5$ ), 显然  $\alpha = 0$  表示松弛算法未被引入。至此, 我们构建了一种分析波导问题的松弛迭代区域分解法, 上述迭代可在各子域之间依次独立进行, 每次只需

求解子区域上规模较小的边值问题,也可在并行机上将各子域的边值问题同时求解,区域之间通过虚拟边界条件交换信息,直至获得整个区域上的迭代收敛解。

#### 4 数值计算结果

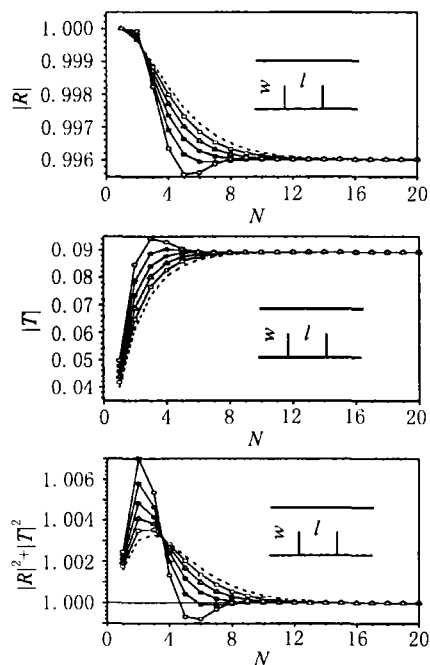


图2  $|R|$ ,  $|T|$  在迭代过程中的收敛情况 ( $l = w = a/2$ ,  $f = 3\text{GHz}$ )  
 (…:  $a = 0$ ; □:  $a = 0.1$ ; △:  $a = 0.2$ ;  
 ●:  $a = 0.3$ ; ☆:  $a = 0.4$ ; ○:  $a = 0.5$ )

为了验证方法的有效性,我们计算了矩形波导 ( $7.124 \times 3.404\text{cm}^2$ ) 中  $E$  面双金属片的主模反射系数 ( $R$ ) 和透射系数 ( $T$ )。图2反映了  $|R|$ ,  $|T|$  及  $|R|^2 + |T|^2$  在迭代过程中的收敛情况。从图中可以看出,无论松弛算法是否引入 (即  $\alpha = 0$  或  $\alpha \neq 0$ ),  $|R|$ ,  $|T|$  都具有稳定的收敛值,且  $|R|^2 + |T|^2$  收敛于我们所熟知的结论1。图中也表明了引入松弛算法 ( $\alpha \neq 0$ ) 后对收敛速度的改善情况。图3给出了松弛因子  $\alpha = 0$  与  $\alpha = 0.3$  两种情况下迭代相对误差与迭代次数的关系曲线。图中更清楚地显示了,利用本文给出的虚拟边界条件所构建的迭代区域分解算法具有很好的收敛性,而且引入松弛算法后能有效地加快迭代收敛速度。在图4中我们选择了松弛因子  $\alpha = 0.3$  进行迭代求解,并对计算结果与精确的模式匹配法所得值进行了比较,可以看出两者吻合很好,说明了该方法的准确性。

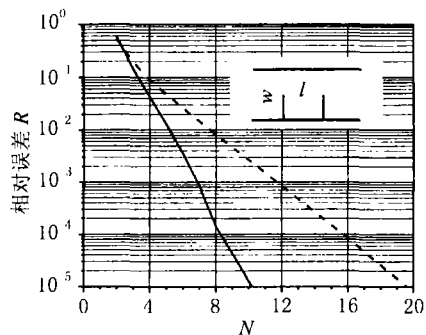


图3 迭代相对误差随迭代次数变化的关系曲线 ( $l = w = a/2$ ,  $f = 3\text{GHz}$ ; …:  $a = 0$ , —:  $a = 0.3$ )

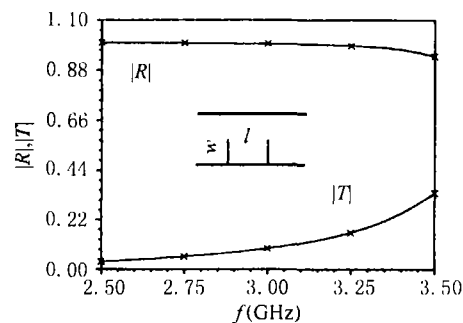


图4 计算结果比较  
 ( $l = w = a/2$ ,  $a = 0.3$ ;  
 —: 本文方法, ×: 模式匹配法)

## 5 结 论

理论推导及数值计算结果表明: 利用本文给出的虚拟边界条件所构建的迭代区域分解法具有很好的收敛性, 而且引入的松弛算法能够有效地加快迭代收敛速度, 并能获得准确解, 可以用于分析波导问题。

## 参 考 文 献

- [1] B. Despres, Domain decomposition method and the Helmholtz problem (Part II), in Proc. 2nd Int. Conf. Mathemat. Numerical Aspects Wave Propagat., Dover. DE. SIAM ed., 1993, 197–206.
- [2] 吕涛, 石济民, 林振宝, 区域分解算法——偏微分方程数值解新技术, 北京, 科学出版社, 1997, 第 6, 8 章.
- [3] B. Stupfel, A fast-domain decomposition method for the solution of electromagnetic scattering by large objects, IEEE Trans. on AP, 1996, 44(10), 1375–1385.
- [4] 龙毅, 徐军, 薛良金, 区域分解法结合 FFT 分析 TEM 传输线, 电子科技大学学报, 2000, 29(5), 504–507.
- [5] Zhenhai Zhu, Hao Ji, Wei Hong, An efficient algorithm for the parameter extraction of 3-D interconnect structures in the VLSI circuits: domain-decomposition method, IEEE Trans. on AP, 1997, 45(8), 1179–1183.
- [6] C. T. Spring, A. C. Cangellaris, Parallel implementation of domain decomposition methods for the electromagnetic analysis of guide wave systems, J. Electromagnetic Waves Application, 1995, 9(1/2), 175–192.
- [7] 龙毅, 徐军, 朱汉清, 一种求解规则区域 Helmholtz 方程的快速算法, 电子科技大学学报, 1999, 28(4), 383–387.

## A RELAXED ITERATIVE DOMAIN DECOMPOSITION METHOD FOR WAVEGUIDE PROBLEMS

Zhu Hanqing Long Yi Wu Zhengde K. M. Luk\*

(Applied Physics Institute, UEST of China, Chengdu 610054, China)

\*(Dept. of Electron. Eng., City Univ. of Hong Kong, Kowloon, Hong Kong, China)

**Abstract** Domain decomposition method (DDM) based on the Schwarz alternating method is divergent when it is used to analyze waveguide problems. In the paper, an absorbing fictitious boundary condition (FBC) is presented to generate an iterative DDM for waveguide problems. The FBC which connects the subdomains on fictitious boundaries is developed according to the actual field distribution in the waveguide to ensure the propagation of waves between adjacent subdomains. And the relaxation algorithm is introduced to improve the speed of iterative convergence. Finally, a number of numerical examples are given to demonstrate its efficiency.

**Key words** Domain decomposition method, Fictitious boundary condition, Iterative algorithm, Relaxation algorithm, Waveguide problem

朱汉清: 男, 1963 年生, 博士生, 副教授, 从事电磁理论、电磁场数值计算和天线的研究.

龙毅: 男, 1964 年生, 博士, 副教授, 从事电磁场数值计算、毫米波电路和天线的研究.

吴正德: 男, 1945 年生, 博士, 教授, 从事电磁场理论、毫米波系统与电路的研究.

K.M.Luk: 男, 1958 年生, 博士, 教授, 从事电磁理论、计算电磁学和天线的研究.