

# 一种稳健的四阶累积量 ESPRIT 测向方法研究<sup>1</sup>

丁 齐 肖先赐

(电子科技大学电子工程系 成都 610054)

**摘 要** 本文提出了一种基于四阶累积量的 ESPRIT 超分辨阵列测向算法, 该算法适用于任意形状排列的空间阵列。通过对误差模型的分析, 发现该算法具有稳健性, 只要接收通道中任意两个通道能保持一致, 该算法就能得到正确的方向估计。计算机模拟验证了该算法的正确性。

**关键词** 阵列测向, 高阶累积量, 旋转不变算法, 模型误差校正

**中图分类号** TN911.7

## 1 引 言

近年来, 基于子空间的超分辨阵列信号处理技术取得了很大进展, 其标志之一是高阶统计量开始被应用于阵列测向<sup>[1-4]</sup>。高阶统计量的研究成果主要集中于三阶和四阶累积量及其相应的高阶谱<sup>[5]</sup>, 而对充分对称的随机信号, 其三阶累积量为零, 因而阵列处理中常用的高阶统计量为四阶累积量。与二阶方法<sup>[6]</sup>, 如 MUSIC, Min-Norm 等方法相比, 四阶方法有许多优异性能。由于高阶累积量具有对高斯噪声的不敏感性, 因而可以有效地提取出信号的非高斯成份, 最大限度地抑制高斯噪声; 同时由于阵列输出的四阶累积量具有阵列扩展的功能, 可以对更多的信号进行测向。文献 [2] 分析了一种基于四阶累积量矩阵分解的测向方法, 指出四阶累积量从物理意义上具有某种阵元合成功能; 魏平<sup>[4]</sup>对四阶累积量矩阵分解得到的四阶子空间进行了更加深入的探讨。

ESPRIT 算法<sup>[7]</sup>是传统的超分辨测向方法之一, 其主要思想是利用特别的阵列结构构造两个具有旋转不变特性的相关矩阵, 利用这两个相关矩阵的特殊关系求解待测信号方向。该算法速度快、性能较好, 但它仅适用于一类特殊形状的阵列, 而且当存在模型误差时, 其性能难以保证。

本文建立了理想条件下的阵列信号模型, 提出了理想模型下的四阶 ESPRIT 方法, 分析了该算法对通道不一致性误差的稳健性, 并用模拟实验证明了本文的结论。

## 2 信号的数学模型

设空间  $D$  个远场窄带信号投射到  $M$  个传感器组成的天线阵列上 ( $M > D$ ), 传感器全向一致, 接收系统各通道响应特性一致, 空间信号相互独立, 信号与噪声统计独立, 噪声服从高斯分布, 空间信号为非高斯信号, 空间信号和通道输出平稳。第  $m$  个传感器对于方向  $\theta$  的响应系数为  $a_m(\theta)$ , 阵列在  $\theta$  方向上的响应系数向量即方向向量为  $a(\theta) = [a_1(\theta), a_2(\theta), \dots, a_M(\theta)]^T$ 。阵列对  $D$  个不重合方向  $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_D)$  的响应矩阵  $A = [a(\theta_1), a(\theta_2), \dots, a(\theta_M)]$  为满秩阵。第  $m$  个传感器的输出为

$$x_m(t) = \sum_{k=1}^D a_m(\theta_k) s_k(t) + n_m(t), \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (1)$$

<sup>1</sup> 1997-02-04 收到, 1998-03-05 定稿

其中  $s_k(t)$  为第  $k$  个空间信号,  $n_m(t)$  为第  $m$  个通道的噪声. 上式写成向量形式为

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}\mathbf{S}(t) + \mathbf{N}(t), \quad (2)$$

式中  $\mathbf{X}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_M(t)]^T$ ,  $\mathbf{N}(t) = [n_1(t), n_2(t), \dots, n_M(t)]^T$  分别为阵列输出向量和噪声向量,  $\mathbf{S}(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_D(t)]^T$  为空间信号向量.

### 3 基于四阶累积量的 ESPRIT 算法

在以上模型条件下, 二阶 ESPRIT 算法还需假设存在另一传感器阵列. 该阵列相当于原阵列形状不变地平移一段距离, 阵元、通道特性以及阵列几何结构都保持不变, 两阵列同时采样. 在白高斯噪声条件下, 原阵列的阵列输出  $\mathbf{X}(t)$  的自相关矩阵和两阵列输出的互相关矩阵经处理后可构成移动不变矩阵对, 利用两阵列间的关系可求解信号方向. 下面讨论采用四阶累积量处理的情况.

在上节描述的模型中, 阵列输出信号的四阶累积量可由下式求得

$$\text{cum}(x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}^*, x_{k_4}^*) = E\{x_{k_1} x_{k_2} x_{k_3}^* x_{k_4}^*\} - E\{x_{k_1} x_{k_3}^*\} E\{x_{k_2} x_{k_4}^*\} - E\{x_{k_1} x_{k_4}^*\} E\{x_{k_2} x_{k_3}^*\}, \quad (3)$$

式中  $\forall k_1, k_2, k_3, k_4 \in \{1, 2, \dots, M\}$ . 空间信号的四阶累积量为

$$\text{cum}(s_{k_1}, s_{k_2}, s_{k_3}^*, s_{k_4}^*) = E\{s_{k_1} s_{k_2} s_{k_3}^* s_{k_4}^*\} - E\{s_{k_1} s_{k_3}^*\} E\{s_{k_2} s_{k_4}^*\} - E\{s_{k_1} s_{k_4}^*\} E\{s_{k_2} s_{k_3}^*\}, \quad (4)$$

式中  $\forall k_1, k_2, k_3, k_4 \in \{1, 2, \dots, D\}$ .

构造四阶累积量矩阵  $C_1$ , 其第  $k$  行第  $l$  列元素为  $\text{cum}(x_k, x_{k_1}^*, x_l^*, x_{k_2})$ , 其中  $k_1, k_2 \in [1, M]$  为两确定常数, 矩阵  $C_1$  表示为

$$C_1 = E\{(X \otimes x_{k_1}^*)(X \otimes x_{k_2}^*)^H\} - E\{X \otimes x_{k_1}^*\} E\{(X \otimes x_{k_2}^*)^H\} - E\{X X^H\} \otimes E\{x_{k_1}^* x_{k_2}\}, \quad (5)$$

式中  $\otimes$  表示 Kronecker 积,  $(\ )^*$  为取复数共轭,  $(\ )^H$  为取复共轭转置. 为下面推导方便, 上式写成 Kronecker 乘积的形式.

空间信号的四阶累积量矩阵为

$$C_S = E\{(S \otimes S^*)(S \otimes S^*)^H\} - E\{S \otimes S^*\} E\{(S \otimes S^*)^H\} - E\{S S^H\} \otimes E\{(S S^H)^*\}, \quad (6)$$

式中  $C_S$  为  $D^2 \times D^2$  维矩阵,  $\text{cum}(s_{k_1}, s_{k_2}^*, s_{k_3}^*, s_{k_4})$  为其第  $[(k_1 - 1)D + k_2]$  行第  $[(k_3 - 1)D + k_4]$  列的元素. 由此我们得到下面定理:

**定理 1** 在前述模型中

$$C_1 = (A \otimes a_{k_1}^*) C_S (A \otimes a_{k_2}^*)^H. \quad (7)$$

上式中  $C_1, C_S$  由 (5) 式和 (6) 式定义,  $a_{k_1}, a_{k_2} \in C^{D \times 1}$  为阵元  $k_1, k_2$  对应的响应系数向量, 该向量分别为矩阵  $A$  的第  $k_1$  行和  $k_2$  行, 即  $a_{k_i} = [a_{k_i}(\theta_1), a_{k_i}(\theta_2), \dots, a_{k_i}(\theta_D)]$ . 证明见附录 A.

由 Kronecker 乘积的性质<sup>[8]</sup>可知

$$\text{rank}(A \otimes a_{k_1}^*) = \text{rank}(A) \times \text{rank}(a_{k_1}^*) = D, \quad (8)$$

$$\text{rank}(A \otimes a_{k_2}^*) = \text{rank}(A) \times \text{rank}(a_{k_2}^*) = D. \quad (9)$$

由于空间信号独立, 可以证明

$$\text{cum}(s_{k_1}, s_{k_2}, s_{k_3}^*, s_{k_4}^*) \neq 0, \quad \text{当且仅当 } k_1 = k_2 = k_3 = k_4. \quad (10)$$

显然,  $C_S$  中仅有  $D$  个非零元素, 它们位于  $C_S$  对角线上第  $(k-1)D+k$ ,  $k=1, 2, \dots, D$  位置, 设其值为

$$r_{4,k} = \text{cum}(s_k, s_k, s_k^*, s_k^*). \quad (11)$$

去掉矩阵  $C_S$  中为零的行和列, (7) 式可简化为

$$C_1 = B_1 T_S B_2^H, \quad (12)$$

式中

$$T_S = \text{diag}\{r_{4,1}, r_{4,2}, \dots, r_{4,D}\}, \quad (13)$$

$$B_1 = [a(\theta_1)a_{k_1}^*(\theta_1), a(\theta_2)a_{k_1}^*(\theta_2), \dots, a(\theta_D)a_{k_1}^*(\theta_D)] = \text{Adiag}\{a_{k_1}^*\}, \quad (14)$$

$$B_2 = [a(\theta_1)a_{k_2}^*(\theta_1), a(\theta_2)a_{k_2}^*(\theta_2), \dots, a(\theta_D)a_{k_2}^*(\theta_D)] = \text{Adiag}\{a_{k_2}^*\}, \quad (15)$$

式中  $a_{k_1}$ ,  $a_{k_2}$  如定理 1 中定义.

将 (13)、(14) 式代入 (12) 式中, 化简有

$$C_1 = A \Psi T_S A^H, \quad (16)$$

式中

$$\Psi = \text{diag}\{a_{k_1}^*(\theta_1)a_{k_2}(\theta_1), a_{k_1}^*(\theta_2)a_{k_2}(\theta_2), \dots, a_{k_1}^*(\theta_D)a_{k_2}(\theta_D)\}. \quad (17)$$

构造四阶累积量矩阵  $C_2$ , 矩阵  $C_2$  第  $k$  行第  $l$  列的元素为  $\text{cum}(x_k, x_{k_1}^*, x_l^*, x_{k_1})$ , 经同样推导有

$$C_2 = A T_S A^H. \quad (18)$$

由于  $\Psi$ 、 $T_S$  矩阵为对角矩阵, 其秩为  $D$ . 对于适当设计的阵列有

$$\text{rank}(C_1) = \text{rank}(C_2) = \text{rank}(A) = D. \quad (19)$$

从以上推导发现,  $C_1$  和  $C_2$  构成了移动不变矩阵对, 对矩阵对  $[C_1, C_2]$  进行广义特征分解得到

$$C_1 V = C_2 V \Lambda, \quad (20)$$

式中  $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_D\}$ , 其中  $\lambda_i \neq 0$ ,  $i=1, 2, \dots, D$ . 令

$$\lambda_i = a_{k_1}^*(\theta_i)a_{k_2}(\theta_i), \quad i=1, 2, \dots, D, \quad (21)$$

解 (21) 式的方程组即可求得  $D$  个待测信号方向.

#### 4 四阶 ESPRIT 算法的稳健性分析

在实际高分辨测向系统中, 常常不能保证测向系统多个通道幅度和相位严格一致. 当存在不一致性误差时, 现有的许多阵列测向方法性能大大下降. 下面分析不一致性误差对四阶 ESPRIT 算法的影响.

当存在不一致性误差时, (2) 式所定义的信号模型变为如下形式<sup>[6]</sup>

$$\mathbf{X} = \Gamma \mathbf{A} \mathbf{S}(t) + \mathbf{N}(t), \quad (22)$$

式中  $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_M\}$ , 其中  $\gamma_i, i \in [1, M]$  为一复数, 表示由第  $i$  个通道引起的幅度和相位不一致性。

同上节方法, 构造矩阵对  $[C_1, C_2]$ , 化简得到

$$C_1 = \gamma_{k_1}^* \gamma_{k_2} \Gamma \mathbf{A} \text{diag}\{a_{k_1}^*\} T_S \text{diag}\{a_{k_2}\} \mathbf{A}^H \Gamma^H, \quad (23)$$

$$C_2 = |\gamma_{k_1}|^2 \Gamma \mathbf{A} T_S \mathbf{A}^H \Gamma^H. \quad (24)$$

对 (23) 式作进一步简化得到

$$C_1 = \gamma_{k_1}^* \gamma_{k_2} \Gamma \mathbf{A} \Psi T_S \mathbf{A}^H \Gamma^H, \quad (25)$$

式中  $\Psi$  由 (17) 式定义。

当  $k_1$ 、 $k_2$  两通道特性一致, 即当  $\gamma_{k_1} = \gamma_{k_2}$  时, (25) 式简化为

$$C_1 = |\gamma_{k_1}|^2 \Gamma \mathbf{A} \Psi T_S \mathbf{A}^H \Gamma^H. \quad (26)$$

比较 (24) 和 (26) 式发现, 矩阵  $C_1$ 、 $C_2$  仍然具有移动不变特性, 对  $[C_1, C_2]$  进行广义特征分解

$$C_1 \mathbf{V} = C_2 \mathbf{V} \Lambda, \quad (27)$$

式中  $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_D\}$ , 其中  $\lambda_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, D$ . 令

$$\lambda_i = a_{k_1}^*(\theta) a_{k_2}(\theta), \quad i = 1, 2, \dots, D. \quad (28)$$

解 (28) 式的方程组即可求得  $D$  个待测信号方向。

以上算法的实现仅要求  $M$  个通道中存在两个通道幅相特性一致, 对其它通道的一致性不作要求, 因此我们说本算法对模型误差具有稳健性。

## 5 模拟实验

用计算机模拟实验可验证本文方法, 以下给出典型实验的结果。

**模拟实验 1** 采用 7 元均匀线形阵列, 相邻阵元的间隔波长比为 0.5, 空间信号位于  $85^\circ$  方向, 256 次快拍数据。其中, 误差模型保持第一、二两通道特性一致, 其他通道幅度特性一致, 相位有  $20^\circ$  以内的随机误差。在理想模型和误差模型条件下比较不同信噪比时 MUSIC 算法和四阶 ESPRIT 算法的性能。每个信噪比进行 30 次实验, 统计其均方根误差, 其结果如图 1 所示。

**模拟实验 2** 采用 7 元均匀圆形阵列, 圆阵的半径波长比为 0.5, 空间信号位于  $20^\circ$ ,  $30^\circ$  方向, 信噪比为 20dB, 256 次快拍数据。模型保持第一、二两通道特性一致, 其他通道幅度特性有 3dB 的随机误差。在不同的相位不一致条件下实验, 相位特性为一定相位范围内的随机误差。每种相位误差条件下进行 30 次实验, 统计其均方根误差, 其结果如表 1 所示 (表中标出 ‘-’ 的单元其误差超出  $20^\circ$ )。

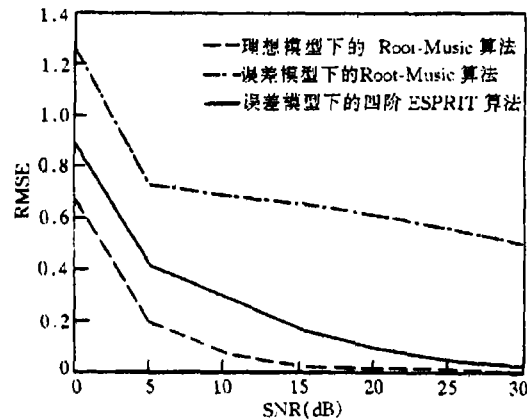


图 1 不同信噪比条件下的算法精度比较

表 1 不同相位特性下算法的精度比较 (°)

相位不一致性 (°)		0	10	20	30	40	50	60
四阶 ESPRIT	20	1.1472	0.8854	0.7996	0.9957	1.0870	1.0512	0.9750
	30	1.2069	1.2173	1.1396	0.9489	0.9534	0.9880	1.1615
MUSIC	20	0.4502	5.4772	5.5767	5.8395	5.2726	4.8166	5.0843
	30	0.3405	-	-	-	-	-	-

## 6 结 论

本文提出了一种基于四阶累积量的 ESPRIT 算法, 通过理论分析和计算机模拟得到以下结论: (1) 基于四阶累积量的 ESPRIT 测向算法不受阵列几何形状的限制, 能够完成任意形状阵列的超分辨测向. (2) 基于四阶累积量的 ESPRIT 测向算法对模型误差具有稳健性. 它仅要求多通道中的任意两个通道幅相一致, 不需校正就能给出正确的方向估计.

## 附录 A

### 定理 1 的证明

由于假设信号与噪声独立, 而四阶累积量具有可加性, 因此阵列输出的四阶累积量为

$$\text{cum}(x_{k_1}, x_{k_2}^*, x_{k_3}^*, x_{k_4}) = \text{cum}(a_{k_1}S, a_{k_2}^*S^*, a_{k_3}^*S^*, a_{k_4}S) + \text{cum}(n_{k_1}, n_{k_2}^*, n_{k_3}^*, n_{k_4}). \quad (\text{A-1})$$

又由于噪声服从高斯分布, 其四阶累积量为零, 故

$$\text{cum}(x_{k_1}, x_{k_2}^*, x_{k_3}^*, x_{k_4}) = \text{cum}(a_{k_1}S, a_{k_2}^*S^*, a_{k_3}^*S^*, a_{k_4}S). \quad (\text{A-2})$$

将上式代入 (5) 式中, 得到

$$\begin{aligned} C_1 = & E[(AS \otimes a_{k_1}^*S^*)(AS \otimes a_{k_2}^*S^*)^H] - E[AS \otimes a_{k_1}^*S^*]E[(AS \otimes a_{k_2}^*S^*)^H] \\ & - E[(AS)(AS)^H] \otimes E[(a_{k_1}^*S^*)(a_{k_2}^*S^*)^H]. \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

根据 Kronecker 积的性质:

$$\begin{aligned}
 C_1 = & A \otimes a_{k_1}^* E[(S \otimes S^*)(S \otimes S^*)^H](A \otimes a_{k_2}^*)^H \\
 & - A \otimes a_{k_1}^* E[S \otimes S^*]E[(S \otimes S^*)^H](A \otimes a_{k_2}^*)^H \\
 & - A \otimes a_{k_1}^* E[SS^H]E[(SS^H)^*](A \otimes a_{k_2}^*)^H.
 \end{aligned} \tag{A-4}$$

据 (6) 式得到

$$C_1 = (A \otimes a_{k_1}^*)C_S(A \otimes a_{k_2}^*)^H. \tag{A-5}$$

### 参 考 文 献

- [1] Poral B, Friedlander B. Direction finding algorithms based on high-order statistics. *IEEE Trans. on SP*, 1991, SP-39(9): 2016-2023.
- [2] Dogan M C, Mendel J M. Application of cumulants to array processing Part I: Aperture extension and array calibration. *IEEE Trans. on SP*, 1995, SP-43(5): 1200-1216.
- [3] Dogan M C, Mendel J M. Application of cumulants to array processing Part II: Non-Gaussian noise suppression. *IEEE Trans. on SP*, 1995, SP-43(7): 1663-1676.
- [4] 魏平. 高分辨阵列测向系统研究. [博士论文]. 成都: 电子科技大学, 1996 年.
- [5] Mendel J M. Tutorial on higher-order statistics (spectra) in signal processing and system theory: Theoretical results and some application. *Proc. IEEE*, 1991, 79(3): 278-305.
- [6] Haykin S. *Advances in Spectrum Analysis and Processing*, Vol. II, Englewood Cliffs New Jersey: Prentice-Hall Press, 1991, chapter 5, chapter 6.
- [7] Roy R, Paulraj A, Kailath T. ESPRIT-estimation of signal parameters via rotations invariance technique. *IEEE Trans. on ASSP*, 1989, ASSP-34(7): 984-995.
- [8] Brewer J W. Kronecker products and matrix calculus in system theory. *IEEE Trans. on CAS*, CAS-25(9): 772-781.

## A ROBUST ESPRIT DOA ESTIMATION METHOD BASED ON FOURTH-ORDER CUMULANT

Ding Qi      Xiao Xianci

(Dept. of Electron. Eng., Univ. of Electron. Sci. and Techn. of China, Chengdu 610054)

**Abstract** In this paper, a fourth-order cumulant-based ESPRIT DOA estimation method is presented for arbitrary array. The method is robust to the channel uncertainty model errors with any two channels' characteristics known. The method is verified by the simulation experiments.

**Key words** DOA, High-order cumulant, ESPRIT, Model error calibration

丁 齐: 男, 1969 年生, 博士, 目前从事电子工程专业谱分析和阵列信号处理方面的研究.

肖先赐: 男, 1933 年生, 教授, 博士生导师, 长期从事谱估计、信号分析、阵列处理、人工神经网络和非线性时间序列分析等方面的研究.