第 18 卷 第 1 期
1996 年 1 月

电子科学学刊
JOURNAL OF ELECTRONICS

Vol.18 No.1
Jan. 1996

# 连续反馈联想记忆的吸引域和指数收敛速度的估计及其应用 [1]

梁学斌　　吴立德

(复旦大学计算机科学系 上海 200433)

**摘　要**　估计了连续反馈联想记忆模式的吸引域及其中每一点趋向记忆模式的指数收敛速度. 这些结果可用于连续反馈联想记忆网络的容错性能评价以及综合过程.

**关键词**　连续反馈联想记忆，神经网络，吸引域，指数收敛速度

**中图号**　TN911.23

## 1 引　言

关于连续反馈联想记忆的分析和综合是神经网络领域中一个非常重要的研究课题[1]，已有工作主要有文献 [ 2-7 ]。这些工作大都只讨论两个基本约束。而关于网络容错性能的估计工作则较少。本文试图对此作一些探讨。

Hopfield 型连续动态反馈神经网络 [1] 是一类重要的联想记忆模型，可表述为下列微分方程组：

$$C_i \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{n} T_{ij} v_j - \frac{u_i}{R_i} + I_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{1}$$

设 $C=\mathrm{diag}(C_1, C_2, \cdots, C_n)$, $A=\mathrm{diag}(1/R_1, 1/R_2, \cdots, 1/R_n)$, $T = (T_{ij})_{n\times n}$, $I = (I_1, \cdots, I_n)^t$, $u = (u_1, \cdots, u_n)^t$, $g(u) = [g_1(u_1, \cdots, g_n(u_n)]^t$，则（1）式可写成下面的矩阵形式：

$$C\mathrm{d}u/\mathrm{d}t = -Au + Tg(u) + I. \tag{2}$$

$u^* = (u_1^*, \cdots, u_n^*)^t \in R^n$ 成为记忆向量，即满足下列基本约束：

（1）平衡态约束

$$Au^* = Tg(u^*) + I; \tag{3}$$

（2）渐近稳定性约束　$u^*$ 是（2）式的一个渐近稳定的平衡态，有关吸引域和指数收敛速度的一些概念可参见文献 [ 8 ]。

设矩阵 $W(u) = (W_{ij}(u))_{n\times n} = T_{ij} g_j'(u_j) - \delta_{ij}/R_i)_{n\times n}$，其中 $\delta_{ij}$ 是 Kronecker 符号，当 $i = j$ 时取 1，且当 $i \neq j$ 时取 0，$(i, j = 1, 2, \cdots, n)$，最近我们 [9] 得到了当 $W(u^*)$ 是一个主对角元全为负的广义严格行对角占优阵时的有关估计结果，本文将在列对角占优阵情形下作有关估计。

[1] 1994-01-11 收到， 1995-07-07 定稿
国家攀登计划和国家自然科学基金资助课题

## 2 吸引域和指数收敛速度的估计结果

设 $x=(x_1,\cdots,x_n)^t=u-u^*$, $\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$; $f_i(x_i)=g_i(x_i+u_i^*)-g_i(u_1^*)$, $i=1,2,\cdots,n$, $f(x)=(f_1(x_1),\cdots,f_n(x_n))^t$; 则 (2) 式可写为

$$C\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=-Ax+Tf(x). \tag{4}$$

先引入下列记号： $\mu(W)=\max_{1\le j\le n}\left(W_{jj}+\sum_{\substack{i=1\\i\ne j}}^n|W_{ij}|\right)$, $\|T\|=\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^n|T_{ij}|>0$, $C_{\max}=\max_{1\le i\le n}C_i>0$.

设函数 $V(x)=\sum_{i=1}^n C_i|x_i|$, $x=x(t)$ 是 (4) 式的解。定义 $V(x)$ 的上右 Dini 导数[8] 为

$$\mathrm{D}^+V(x(t))=\lim_{h\to0^+}\sup[V(x(t+h))-V(x(t))]/h.$$

设函数 $\sigma(z_1,z_2):R\times R\to R$ 定义为

$$\sigma(z_1,z_2)=\begin{cases}1, & 若z_1>0或者z_1=0且z_2>0;\\ 0, & 若z_1=z_2=0;\\ -1, & 若z_1<0或者z_1=0且z_2<0.\end{cases}$$

沿 (4) 式的解对 $V(x)$ 求 Dini 导数，可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{D}^+V(x)|_{(4)}\\ &=\sum_{j=1}^n\left[\sum_{i=1}^n T_{ij}\sigma(x_i,\mathrm{d}x_i/\mathrm{d}t)f_j'(0)x_j\right]-\sum_{j=1}^n|x_j|/R_j\\ &\quad+\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n T_{ij}\sigma(x_i,\mathrm{d}x_i/\mathrm{d}t)[f_j(x_j)-f_j'(0)x_j]\\ &\le\sum_{j=1}^N\left[T_{jj}f_j'(0)+\sum_{\substack{i=1\\i\ne j}}^n|T_{ij}f_j'(0)|-1/R_j\right]|x_j|\\ &\quad+\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n|T_{ij}|\,|o(x_j)|,\end{aligned} \tag{5}$$

其中 $o(x_j)\triangleq f_j(x_j)-f_j'(0)x_j=g_j(x_j+u_j^*)-g_j(u_j^*)-g_j'(u_j^*)x_j,\quad j=1,2,\cdots,n.$

现假定 $W(u^*)$ 是一个主对角元全为负的严格列对角占优阵，即 $\mu(W(u^*))<0$，它等价于成立下列不等式：

$$T_{jj}g_j'(u_j^*)+\sum_{\substack{i=1\\i\ne j}}^n|T_{ij}g_j'(u_j^*)|<1/R_j,\quad j=1,2,\cdots,n. \tag{6}$$

由于假设 $f_i(x_i), (i=1,2,\cdots,n)$ 在 $R$ 上可微，故对任意 $\varepsilon \in (0, |\mu(W(u^*))|/\|T\|)$，存在 $\delta > 0$，使得当 $V(x) < \delta$ 时，有

$$|g_i(x_j+u_j^*) - g_j(u_j^*) - g_j'(u_j^*)x_j| \le (|\mu(W(u^*))|/\|T\| - \varepsilon)|x_j|, \qquad j=1,2,\cdots,n. \tag{7}$$

设 $G_\delta = \{x \in R^n | V(x) < \delta\}$，则 $G_\delta$ 是 $R^n$ 中一个包含原点的非空开区域。

设 $\eta = \varepsilon\|T\|/C_{\max} > 0$，则由不等式 (5) 和 (7) 式可知，当 $x \in G_\delta$ 时，有

$$\mathrm{D}^+V(x)|_{(4)} \le -\varepsilon\|T\|\sum_{j=1}^n |x_j| \le -\eta V(x). \tag{8}$$

设 $p(t;p_0)$ 是 (8) 式的比较系统 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}t = -\eta p$ 在初始条件 $p(0;p_0) = p_0 \in R^n$ 下的解，则有

$$p(t;x_0) = p_0\exp(-\eta t), \qquad \text{对所有 } t \ge 0. \tag{9}$$

令 $p_0 = V(x_0), (x_0 \in G_\delta)$，则由不等式 (8) 和 (9) 式，并利用比较原理 [8]，可得

$$V(x(t;x_0)) \le V(x_0)\exp(-\eta t), \qquad \text{对所有 } t \ge 0. \tag{10}$$

易知，$C_{\min}\|x\| \le V(x) \le C_{\max}n^{1/2}\|x\| (x \in R^n)$，则由不等式 (10) 式得

$$\|x(t;x_0)\| \le \frac{C_{\max}}{C_{\min}}n^{1/2}\|x_0\|\exp(-\eta t), \qquad \text{对所有 } x_0 \in G_\delta \text{和} t \ge 0. \tag{11}$$

设 $u_0 = x_0 + u^*$，则 $4u(t;u_0) = x(t;x_0) + u^*$，再综合上述结果，就得到

**定理 1** 若 $u^*$ 满足 (3) 式，且 $\mu(W(u^*)) < 0$，则 $u^*$ 是神经网络 (2) 式的一个局部指数渐近稳定的平衡态，$u^*$ 的吸引域的一个不变子集是

$$G_\delta(u^*) = \left\{ u \in R^n \left| \sum_{i=1}^n C_i|u_i - u_i^*| < \delta \right. \right\}, \tag{12}$$

即从 $G_\delta(u^*)$ 中任一点 $u_0$ 出发的神经网络轨道 $u(t;u_0)$ 满足

$$u(t;u_0) \in G_\delta(u^*), \qquad \text{对所有} t \ge 0. \tag{13}$$

另外，$u(t;u_0)$ 满足下列不等式：

$$\|u(t;u_0) - u^*\| \le \frac{C_{\max}}{C_{\min}}n^{1/2}\|u_0 - u^*\|\exp(-\eta t), \qquad \text{对所有} u_0 \in G_\delta(u^*) \text{和} t \ge 0. \tag{14}$$

其中 $\delta > 0$ 是使得不等式 (7) 式成立的最大可能取值，$\eta = \varepsilon\|T\|/C_{\max}$，而 $\varepsilon$ 是从 $(0, |\mu(W(u^*))|/\|T\|)$ 中事先任意取定的一个正数。

设 $P=\mathrm{diag}(P_1,P_2,\cdots,P_n)>0$，（表示 $P_i>0, i=1,2,\cdots,n$），则 (2) 式可写为

$$CP\mathrm{d}u/\mathrm{d}t=-APu-PTg(u)+PI. \tag{15}$$

直接对 (15) 式应用定理 1，则容易得到下述推广的结果。

**定理 2** 若 $u^*$ 满足 (3) 式，且 $\mu(PW(u^*))<0$，则 $u^*$ 是神经网络 (2) 式的一个局部指数渐近稳定的平衡态，$u^*$ 的吸引域的一个不变子集是

$$G_\delta(u^*)=\left\{u\in R^n \left| \sum_{i=1}^n C_i|u_i-u_i^*|<\delta'\right.\right\}, \tag{16}$$

且从 $G_\delta(u^*)$ 中任一点 $u_0$ 出发的神经网络轨道 $u(t;u_0)$ 满足下列不等式：

$$\begin{aligned}&||u(t;u_0)-u^*||\le\frac{C'_{\max}}{C'_{\min}}n^{1/2}||u_0-u^*||\exp(-\eta' t),\\ &\qquad\qquad\text{对所有}u_0\in G_{\delta'}(u^*)\text{和}t\ge 0.\end{aligned} \tag{17}$$

其中 $\delta'>0$ 是使得下述命题："若 $\sum_{i=1}^n C_i|x_i|<\delta'$，则

$$\begin{aligned}&|g_j(x_j+u_j^*)-g_j(u_j^*)-g'_j(u_j^*)x_j|\\ &\le(|\mu(PW(u^*))|/||T||-\varepsilon)|x_j|/P_j,\qquad j=1,2,\cdots,n\text{''}\end{aligned} \tag{18}$$

成立的最大可能取值，$\eta'=\varepsilon||T||/C'_{\max}$，其中 $C'_{\max}\triangleq\max_{1\le i\le n}P_iC_i>0, C'_{\min}\triangleq\min_{1\le i\le n}P_iC_i>0$，而 $\varepsilon$ 是从 $(0,|\mu(PW(u^*))|/||T||)$ 中事先任意取定的一个正数。

**定理 3** 设 $\delta>0$ 是使得下述命题："若 $\sum_{i=1}^n C_i|x_i|<\delta$，则存在 $\eta>0$，使得 $V(x)$ 沿 (4) 式的解的 Dini 导数满足

$$\mathrm{D}^+V(x)|_{(4)}\le-\eta V(x),\qquad x\in G_\delta(0)\text{''} \tag{19}$$

成立的最大可能取值，则 $u^*$ 是神经网络 (2) 式的一个局部指数渐近稳定的平衡态，$G_\delta(u^*)$ 是 $u^*$ 的吸引域的一个不变子集，且定理 1 中定义的神经网络轨道 $u(t;u_0)$ 仍满足不等式 (13) 式。

## 3 连续反馈联想记忆的评价和综合

设事先给定 $r$ 个记忆模式，分别对应于 $u^1,u^2,\cdots,u^r\in R^n$。综合的目的是设计神经网络 (2) 式的参数矩阵 $T,R,C$ 和 $I$，以及神经元输出函数向量 $g(u)$，使得 $u^k$, $(k=1,\cdots,r)$ 都是它的记忆向量，求解关于 $u^k$, $(k=1,\cdots,r)$ 的平衡态方程组 (3) 式而得到 $T$，$R$ 和 $I$ 的解集的讨论可参见文献 [6]。

采用下列启发性方法来综合有效的连续联想记忆网络。

第 1 步　选取电容参数矩阵 $C$ 的初始值，例如取为 $n$ 阶单位阵；

第 2 步　从平衡态方程组 (3) 式的解集中选取 $T, R$，并选取 $P$，使得 $|\mu(PW(u^k)|/\|T\|$, $(k = 1, \cdots, r)$ 尽量大，并让 $\varepsilon$ 充分小，从而使得 $\delta$ 尽量大；

第 3 步　选取充分小的 $\varepsilon' > 0$，并将 $\varepsilon' C$ 赋值给 $C$，使得收敛指数 $\eta$ 达到事先任意给定的正数；

第 4 步　将 $\varepsilon'\delta$ 赋值给 $\delta$。

上述第 4 步中 $\varepsilon'\delta$ 在 $0 < \varepsilon' < 1$ 时要比 $\delta$ 小，但 $u^*$ 的吸引域的大小并没有改变，因此第 3 步是在保证没有减小吸引域的同时获取了任意大的指数收敛速度。

## 4 计算机模拟实验

取 $n = 2, r = 2, g_i(u_i) = (2/\pi)\tan^{-1}(\lambda\pi u_i/2)$, $i = 1,2$, $\lambda = 1,0$, $\pi = 3.1415926$，并选取 $P$=diag(1,1)。$u^1 = (1/\pi, 2/\pi)$ 和 $u^2 = (-1/\pi, -2/\pi)$ 是两个事先给定的记忆模式。选取 $T_{12} = T_{21} = -1$。

求解 (3) 式和分段线性不等式组 $\mu(PW(u^*)) < 0$，得到表 1 所示的实验结果：

表 1

| $T_{11}$ | $T_{12}$ | $T_{21}$ | $T_{22}$ | $1/R_1$ | $1/R_2$ | $I_1$ | $I_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $> 18.624424$ | $-1$ | $-1$ | $>3.376506$ | $0.927295T_{11}-1.570796$ | $0.785398T_{22}-0.463648$ | 0 | 0 |

在约束条件 $(W(u^*)P)$ 是一个主对角元全为负的严格行对角占优阵下，求解 (3) 式得到表 2 所示的结果。

表 2

| $T_{11}$ | $T_{12}$ | $T_{21}$ | $T_{22}$ | $1/R_1$ | $1/R_2$ | $I_1$ | $I_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $> 16.267668$ | $-1$ | $-1$ | $>4.427666$ | $0.927295T_{11}-1.570796$ | $0.785398T_{22}-0.463648$ | 0 | 0 |

实验结果表明，在两个代数条件，即 $W(u^*)$ 是一个主对角元全为负的广义严格行对角占优阵与列对角占优阵下的估计结果是互不包含的。

设 $C_1 = C_2 = 1$，$T_{11} = T_{22} = 2000$，$\delta^r, \eta^r$ 分别表示 $u^r, (r = 1,2)$ 的吸引域的大小和指数收敛速度，利用定理 1，得到表 3 所示结果。

表 3

| $\delta^1$ | $\eta^1$ | $\delta^2$ | $\eta^2$ |
|---|---|---|---|
| $0.247087-\varepsilon$ | $1020.772256\ \varepsilon$ | $0.247087-\varepsilon$ | $1020.772256\ \varepsilon$ |

其中 $\varepsilon$ 是在 (0, 0.247087) 中任意取定的一个正数。

## 参 考 文 献

[1] Hopfield J J. Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A., 1984, 81(5): 3088–3092.

[2] Michel A N, Farrell J A. IEEE on Contr. Syst. Mag., 1990, CSM-10(4): 6–17.

[3] Guez A, Protopopsecu V, Barhen J. IEEE Trans. on SMC, 1988, SMC-18(1): 80–87.

[4] Li J H, Michel A N, Porod W. IEEE Trans. on CAS, 1988, CAS-35(8): 976–986.

[5] Michel A N, Farrell J A, Porod W. IEEE Trans. on CAS, 1989, CAS-36(2): 229–243.

[6] Farrell J A, Michel A N. IEEE Trans. on CAS, 1990, CAS-37(7): 877–884.

[7] Atiya M, Abu-Mostafa Y S. IEEE Trans. on NN, 1993, NN-4(1): 117–126.

[8] Michel A N, Miller R K. Qualitative Analysis of Large-Scale Dynamical Systems. New York: Acadimic, 1977, 15, 57.

[9] 梁学斌, 吴立德. 电子学报, 将发表.

# ESTIMATION OF ATTRACTION DOMAIN AND EXPONENTIAL CONVERGENCE RATE OF CONTINUOUS FEEDBACK ASSOCIATIVE MEMORY AND ITS APPLICATIONS

Liang Xuebin Wu Lide

(*Department of Computer Science, Fudan University, Shanghai* 200433)

**Abstract** The attraction domains of memory patterns and the exponential convergence rate of the network trajectories to memory patterns for continuous feedback associative memory are estimated. These results can be used for evaluation of error-correction capability and the synthesis procedures for continuous-time associative memory neural networks.

**Key words** Continuous feedback associative memory, Neural network, Attraction domain, Exponential convergence rate

梁学斌: 男, 1967 年生, 博士生, 主要研究方向为人工神经网络和计算机视觉.

吴立德: 男, 1937 年生, 教授, 博士生导师, IEEE 高级会员, 主要研究领域为计算机视觉、自然语言理解等.