第6卷 第3期　　电子科学学刊　　Vol. 6, No. 3
1984 年 5 月　　JOURNAL OF ELECTRONICS　　May, 1984

计算并矢格林函数的算子法——广义柱形波导解*

潘 生 根
（上 海 科 技 大 学）

提　　要

本文首先将矢量空间的概念推广到并矢，建立了求解并矢格林函数的算子法，然后用分布论严格地导出了磁型并矢波动方程的一种新的表达式．文末以广义柱形波导为例，具体阐述本文方法的运用．

一、引　　言

电磁场理论中的并矢格林函数是求解边值问题的一种有效方法．新近，随着计算电磁学的发展，研究并矢格林函数和用它求解散射、辐射和系统之间的耦合问题的兴趣进一步增加[1-3]．

本文首先利用并矢格林函数和矢量源函数内积的特点，将通常的矢量空间的概念推广到并矢空间，建立了求解并矢格林函数的算子法，简化了求解步骤．然后将标量广义函数导数的定义推广到并矢广义函数和矢量旋度的点积，用分布论严格地导出了磁型并矢波动方程的一种新的表示式．它具有意义清晰、更易求解的优点．最后用本文的方法求解了广义柱形波导中的并矢格林函数．所得结果与文献［1,4］给出的具有矩形或圆形横截面的柱形波导中的并矢格林函数相同．

二、求解并矢格林函数的算子法

并矢波动方程[1]为

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\boldsymbol{G}}_e(\bar{R}/\bar{R}') - k^2\bar{\boldsymbol{G}}_e(\bar{R}/\bar{R}') = \bar{\boldsymbol{I}}\delta(\bar{R} - \bar{R}'), \tag{1a}$$

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\boldsymbol{G}}_m(\bar{R}/\bar{R}') - k^2\bar{\boldsymbol{G}}_m(\bar{R}/\bar{R}') = \nabla \times \bar{\boldsymbol{I}}\delta(\bar{R} - \bar{R}'), \tag{1b}$$

式中 $\bar{\boldsymbol{G}}_e(\bar{R}/\bar{R}')$ 是电型并矢格林函数，$\bar{\boldsymbol{G}}_m(\bar{R}/\bar{R}')$ 是磁型并矢格林函数．写成并矢算子方程的一般形式

$$(\mathscr{L} - k^2)\bar{\boldsymbol{u}} = \bar{\boldsymbol{F}}. \tag{2}$$

或并矢逆算子方程的形式

* 1982 年 12 月 13 日收到．

$$\bar{u}=(\mathscr{L}-k^2)^{-1}\bar{F}. \tag{3}$$

因为电场或磁场是通过并矢格林函数和矢量源函数内积求得的，所以完备关系亦可在内积条件下讨论．我们定义并矢空间的正交基为一组正交的矢量本征函数 $\{\bar{u}_n\}$ 和一组矢量常数 $\{\bar{A}_n\}$ 的直积．如果矢量本征函数 $\{\bar{u}_n\}$ 在矢量空间是完备的，则并矢正交基在并矢空间也是完备的．虽然所定义的并矢正交基是相关于非齐次方程的源函数，但这种相关性仅是相似变换而不影响我们定义的一般性．类似于矢量算子在矢量空间的谱分解理论[5]，我们有如下定理．

设 $\mathscr{L}$ 为全连续的自共轭并矢算子，$P_{\lambda_1}, P_{\lambda_2}\cdots$ 为一组直交的投影算子，$\lambda_1, \lambda_2\cdots$ 为相应的本征值，则 $\mathscr{L}$ 可分解为 $\mathscr{L}=\sum\limits_V \lambda_V P_{\lambda_V}$．如果 $\mathscr{L}$ 为自共轭并矢算子，则有谱分解 $\mathscr{L}=\int_m^n \lambda dE_\lambda$．为了书写的方便，将谱分解统一记为

$$\mathscr{L}=\sum\!\!\!\!\!\!\int\; \lambda_V P_{\lambda_V}. \tag{4}$$

记号 $\sum\!\!\!\!\!\!\int$ 意味着对离散谱求和，对连续谱积分．由上面定理，我们得到：

设 $\mathscr{L}$ 是自共轭并矢算子，$\{\bar{u}_V\}$ 是算子 $\mathscr{L}$ 相应的矢量本征函数，$\{\lambda_V\}$ 是相应的本征值，算子方程(3)式的解则为

$$\bar{\boldsymbol{u}}(\bar{R}/\bar{R}')=(\mathscr{L}-k^2)^{-1}\bar{\boldsymbol{F}}=\sum\!\!\!\!\!\!\int\;\frac{\bar{u}_V\bar{A}_V}{\lambda_V-k^2}. \tag{5}$$

与目前采用的一些方法相比，用上述定理求解并矢格林函数可简化求解步骤，在一些复杂的坐标系中，优点就更加显著．

三、磁型并矢波动方程新的表示式

通过对电型并矢波动方程两边取旋度，在文献[1]中首先导出磁型并矢波动方程．本文则用分布论导出磁型并矢波动方程的一种新的表示式．注意到电型并矢格林函数的物理意义是表示并矢点源产生的场分布，而磁型并矢格林函数则是表示将旋度算子对激励源的作用转换为对并矢点源的作用后的并矢点源产生的场分布．分布论是描述点源的有力数学工具．用分布论将旋度算子对激励源的作用转换为对并矢点源的作用在数学上是严格的，其物理意义也是清晰的．实施这种转换实质上就是从电型并矢波动方程导出磁型并矢波动方程．

我们知道，标量广义函数的导数定义为

$$\int f'(x')\varphi(x')dx'=-\int f(x')\varphi'(x)dx', \tag{6}$$

式中，$f(x')$ 是标量广义函数，$\varphi(x')$ 是标量检验函数，$f'(x')$ 和 $\varphi'(x')$ 是 $f(x')$ 和 $\varphi(x')$ 的一阶导数．要将上述的定义推广到并矢广义函数和矢量旋度的点积，必须使得点积运算关系在进行分部积分前和分部积分后保持不变，在每个分量中定义(6)式成立．先考虑并矢广义函数和矢量旋度后内积 $\int \bar{\boldsymbol{F}}(\bar{R}/\bar{R}')\cdot\nabla\times\bar{\Phi}(\bar{R}')dV'$，式中 $\bar{\boldsymbol{F}}(\bar{R}/\bar{R}')$ 是并矢广

义函数，$\bar{\Phi}(\bar{R}')$ 为矢量检验函数．在进行分部积分时，可将旋度算子 $\nabla\times$ 看作矢量，由矢量恒等式 $\bar{A}\cdot\bar{B}\times\bar{C} = -\bar{B}\times\bar{A}\cdot\bar{C}$ 和定义(6)式，得到并矢广义函数和矢量旋度后内积关系式

$$\int \nabla'\times\bar{F}(\bar{R}/\bar{R}')\cdot\bar{\Phi}(\bar{R}')dV' = \int \bar{F}(\bar{R}/\bar{R}')\cdot\nabla\times\bar{\Phi}(\bar{R}')dV', \tag{7}$$

式中旋度算子 $\nabla'\times$ 表示作用于源坐标和后矢．用类似的方法可得并矢广义函数和矢量旋度前内积关系式

$$\int \bar{\Phi}(\bar{R}')\cdot\nabla\times\bar{\mathbf{F}}(\bar{R}'/\bar{R})dV' = \int \nabla\times\bar{\Phi}(\bar{R}')\cdot\bar{\mathbf{F}}(\bar{R}'/\bar{R})dV'. \tag{8}$$

将(1a)式两边乘上 $\int\cdot\nabla\times\bar{J}(\bar{R}')dV'$，并利用(7)式，我们导出磁型并矢波动方程的一种新的表示式

$$\nabla\times\nabla\times\bar{\mathbf{G}}_m(\bar{R}/\bar{R}') - k^2\bar{\mathbf{G}}_m(\bar{R}/\bar{R}') = \nabla'\times\bar{\mathbf{I}}\delta(\bar{R}-\bar{R}'), \tag{9}$$

式中

$$\nabla'\times\bar{\mathbf{G}}_e(\bar{R}/\bar{R}') = \bar{\mathbf{G}}_m(\bar{R}/\bar{R}'). \tag{10}$$

(9)式的一个优点是广义函数 $\bar{\mathbf{I}}\delta(\bar{R}-\bar{R}')$ 的完备关系可用磁型本征函数展开，这给许多情况的应用带来了方便．

四、广义柱形波导并矢格林函数的计算

广义柱形波导的几何形状如图 1 所示，波导横截面平面的坐标矢量 $\bar{\boldsymbol{\rho}}$，波导的纵向坐标为 z．磁型并矢波动方程为

$$\nabla\times\nabla\times\bar{\mathbf{G}}_m(\bar{R}/\bar{R}') - k^2\bar{\mathbf{G}}_m(\bar{R}/\bar{R}') = \nabla'\times\bar{\mathbf{I}}(\bar{R}-\bar{R}'), \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned}&\hat{n}\cdot\bar{\mathbf{G}}_m(\bar{R}/R') = 0\\ &\hat{n}\times\nabla\times\bar{\mathbf{G}}_m(\bar{R}/\bar{R}') = 0\end{aligned}\right\}\text{在波导壁上.}$$

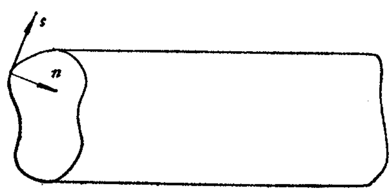

图 1　广义柱形波导

Fig. 1　Generalized cylindrical waveguide

当 $z\to\pm\infty$ 时 $\bar{\mathbf{G}}_m(\bar{R}/\bar{R}')$ 满足 Sommerfeld 的辐射条件．引进广义柱形坐标矢量本征函数：$\bar{M}_{0V}(h) = \nabla\times[\Phi_{0V}(h)\hat{z}]$，$\bar{N}_{eV}(h) = \dfrac{1}{K}\nabla\times\nabla\times[\bar{\Phi}_{eV}(h)\hat{z}]$，式中 Φ_{eV}，Φ_{0V} 满足齐次 Helmholtz 方程$(\nabla^2 + K_{Vh}^2)\Phi_{\substack{0\\e}}(h) = 0$．下标 $0, e$ 表示方程在波导横截面边界上分别满足齐次第一类或第二类边界条件．本征值方程为

$$K_{Vh}^2 = K_{CV}^2 + h^2 = K^2. \tag{12}$$

广义函数 $\bar{\mathbf{I}}\delta(\bar{R}-\bar{R}')$ 的完备关系为

$$\bar{\mathbf{I}}\delta(\bar{R}-\bar{R}') = \int_{-\infty}^{\infty}\sum_V [C_{MV}\bar{M}_{0V}(h)\bar{M}'_{0V}(-h) + C_{NV}\bar{N}_{eV}(h)N'_{eV}(-h)]dh, \tag{13}$$

式中 C_{MV}，C_{NV} 是归一化常数．由广义函数的 Fourier 变换理论[6]，可得出下式

$$\begin{aligned}\nabla'\times\bar{\mathbf{I}}\delta(\bar{R}-\bar{R}') = \int_{-\infty}^{\infty}\sum_V K[&C_{MV}\bar{M}_{0V}(h)\bar{N}'_{0V}(-h)\\ &+ C_{NV}\bar{N}_{eV}(h)\bar{M}'_{eV}(-h)]dh.\end{aligned} \tag{14}$$

其中用了矢量恒等式:

$$\overline{N}_{0V}(h)=\frac{1}{K}\nabla\times\overline{M}_{0V}(h),\quad \overline{M}_{eV}(h)=\frac{1}{K}\nabla\times\overline{N}_{eV}(h).$$

由并矢算子谱理论(5)式,立即可写出磁型并矢格林函数

$$\bar{\bar{G}}_m(\overline{R}/\overline{R}')=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_V\frac{K}{K^2-k^2}[C_{MV}\overline{M}_{0V}(h)\overline{N}'_{0V}(-h)+C_{NV}\overline{N}_{eV}(h)\overline{M}'_{eV}(-h)]dh. \tag{15}$$

因为所考虑的是广义柱形波导,所以标量波函数可写为

$$\Phi^{\pm}_{\substack{0\\e}V}=\phi_{\substack{0\\e}V}(\rho)\mathrm{e}^{\pm ihz}, \tag{16}$$

式中 $\phi_{\substack{0\\e}V}(\rho)$是二维标量 Helmholtz 方程的解. 由矢量恒等式 $\nabla\times[\Phi_{\substack{e\\0}V}(h)\hat{z}]=[\nabla_t\Phi_{\substack{e\\0}V}(h)]\times\hat{z}$, $\nabla\times\nabla\times\overline{A}=\nabla\nabla\cdot\overline{A}-\nabla^2\overline{A}$,并考虑到 $\frac{\partial}{\partial z}[\phi_{\substack{e\\0}}(\rho)]=0$, 则矢量本征函数可写为

$$\overline{M}^{e}_{0V}(\pm h)=\overline{m}^{e}_{0V}(\rho)\mathrm{e}^{\pm ihz}, \tag{17a}$$

$$\overline{N}^{e}_{0V}(\pm h)=\overline{n}^{\pm}_{\substack{e\\0}V}(\rho)\mathrm{e}^{\pm ihz}, \tag{17b}$$

式中

$$\overline{m}^{e}_{0V}(\rho)=[\nabla_t\phi^{e}_{0V}(\rho)]\times\hat{z}, \tag{18a}$$

$$\overline{n}^{\pm}_{\substack{e\\0}V}(\rho)=\frac{1}{K}[\pm ih\nabla_t+\hat{z}K^2_{CV}]\phi^{e}_{0V}(\rho). \tag{18b}$$

将(17)式代入(15)式,将 z 坐标函数分离出来,连续谱的积分由留数定理计算出,得到

$$\begin{aligned}\bar{\bar{G}}_m(\overline{R}/\overline{R}')=\sum_V\frac{\pi iK}{K_g}\{&C_{MV}[\overline{m}_{0V}(\rho)\overline{n}^{-}_{0V}(\rho')\mathrm{e}^{iK_g(z-z')}\mu(z-z')\\&+\overline{m}_{0V}(\rho)\overline{n}^{+}_{0V}(\rho')\mathrm{e}^{iK_g(z'-z)}\mu(z'-z)]\\&+C_{NV}[\overline{n}^{+}_{eV}(\rho)\overline{m}_{eV}(\rho')\mathrm{e}^{iK_g(z-z')}\mu(z-z')\\&+\overline{n}^{-}_{eV}(\rho)\overline{m}_{eV}(\rho')\mathrm{e}^{iK_g(z'-z)}\mu(z'-z)]\}.\end{aligned} \tag{19}$$

式中

$$\mu(z-z')=\begin{cases}1, & 当\ z>z';\\0, & 当\ z<z'.\end{cases} \tag{20}$$

(19)式整理后可写成

$$\begin{aligned}\bar{\bar{G}}_m(\overline{R}/\overline{R}')=\sum_V\frac{\pi iK}{K_g}\{&C_{MV}[\overline{M}_{0V}(K_g)\overline{N}'_{0V}(-K_g)\mu(z-z')\\&+\overline{M}_{0V}(-K_g)\overline{N}'_{0V}(K_g)\mu(z'-z)]\\&+C_{NV}[\overline{N}_{eV}(K_g)\overline{M}'_{eV}(-K_g)\mu(z-z')\\&+\overline{N}_{eV}(-K_g)\overline{M}'_{eV}(K_g)\mu(z'-z)]\}.\end{aligned} \tag{21}$$

如果将矩形或圆形波导的矢量本征函数代入(21)式,可得到文献[1,4]给出的磁型并矢格林函数. 但本文的推导未涉及具体的横截面形状,所以具有普遍意义.

广义柱形波导的电型并矢波动方程为

$$\nabla\times\nabla\times\bar{\bar{G}}_e(\overline{R}/\overline{R}')-k^2\bar{\bar{G}}_e(\overline{R}/\overline{R}')=\bar{\bar{I}}\delta(\overline{R}-\overline{R}'), \tag{22}$$

$$\hat{n}\times\bar{\bar{G}}_e(\overline{R}/\overline{R}')=0,\ 在波导壁上.$$

当 $z \to \pm\infty$ 时 $\bar{\mathbf{G}}_e(\bar{R}/\bar{R}')$ 满足 Sommerfeld 辐射条件．我们知道，在有源区域用本征函数 $\bar{M}$ 和 $\bar{N}$ 展开的电场需要一项附加项，通常确定附加项的方法是 $\bar{\mathbf{G}}_m(\bar{R}/\bar{R}')$ 法[1]．本文用一个不同的方法，步骤是先用不完备的正交基 $\bar{M}\bar{M}'$、$\bar{N}\bar{N}'$ 求出不完备的解 $\bar{\mathbf{G}}_{e0}(\bar{R}/\bar{R}')$．而完备的电型并矢格林函数可表示为

$$\bar{\mathbf{G}}_e(\bar{R}/\bar{R}') = \bar{\mathbf{G}}_{e0}(\bar{R}/\bar{R}') + \bar{\mathbf{G}}_{eL}(\bar{R}/\bar{R}'). \tag{23}$$

由并矢方程

$$\nabla' \times \bar{\mathbf{G}}_e(\bar{R}/\bar{R}') = \bar{\mathbf{G}}_m(\bar{R}/\bar{R}') \tag{24}$$

和分布意义下的恒等关系求出附加项 $\bar{\mathbf{G}}_{eL}(\bar{R}/\bar{R}')$．将广义函数 $\bar{\mathbf{I}}\delta(\bar{R}-\bar{R}')$ 按非完备的正交基 $\bar{M}\bar{M}'$、$\bar{N}\bar{N}'$ 展开

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{I}}\delta(\bar{R}-\bar{R}') = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{V} [&C_{MV}\bar{M}_{eV}(h)\bar{M}'_{eV}(-h) \\ &+ C_{NV}\bar{N}_{0V}(h)\bar{N}'_{0V}(-h)]dh.\end{aligned} \tag{25}$$

由(5)式，求出不完备的解

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{G}}_{e0}(\bar{R}/\bar{R}') = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{V} \frac{1}{K^2-k^2} [&C_{MV}\bar{M}_{eV}(h)\bar{M}'_{eV}(-h) \\ &+ C_{NV}\bar{N}_{0V}(h)\bar{N}'_{0V}(-h)]dh,\end{aligned} \tag{26}$$

式中的连续谱积分可由留数定理求出，得

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{G}}_{e0}(\bar{R}/\bar{R}') = \sum_{V} \frac{\pi i}{K_g} \{&C_{MV}\bar{m}_{eV}(\rho)\bar{M}_{eV}(\rho')[e^{iK_g(z-z')}\mu(z-z') \\ &+ e^{iK_g(z'-z)}\mu(z'-z)] \\ &+ C_{NV}[\bar{n}_{0V}^{+}(\rho)\bar{n}_{0V}^{-}(\rho')e^{iK_g(z-z')}\mu(z-z') \\ &+ \bar{n}_{0V}^{-}(\rho)\bar{n}_{0V}^{+}(\rho')e^{iK_g(z'-z)}\mu(z'-z)]\}.\end{aligned} \tag{27}$$

由广义函数的导数定义，我们有恒等关系式

$$\left.\begin{aligned}\mu'(z-z') &= \delta(z-z'), \\ \mu'(z'-z) &= -\delta(z-z').\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

将(27)式取旋度，并利用(28)式得

$$\begin{aligned}\nabla' \times \bar{\mathbf{G}}_{e0}(\bar{R}/\bar{R}') = \sum_{V} \frac{\pi i}{K_g} \{&KC_{MV}[\bar{m}_{eV}(\rho)\bar{n}_{eV}^{-}(\rho')e^{iK_g(z-z')}\mu(z-z') \\ &+ \bar{m}_{eV}(\rho)\bar{n}_{eV}^{+}(\rho')e^{iK_g(z'-z)}\mu(z'-z)] \\ &+ KC_{NV}[\bar{n}_{0V}^{+}(\rho)\bar{m}_{0V}(\rho')e^{iK_g(z-z')}\mu(z-z') \\ &+ \bar{n}_{0V}^{-}(\rho)\bar{m}_{0V}(\rho')e^{iK_g(z'-z)}\mu(z'-z)] \\ &+ C_{NV}(k_g^2/k^2)\nabla_t\phi_{0V}(\rho)\hat{z} \times \nabla_t\phi_{0V}(\rho')[-e^{ik_g(z-z')}\delta(z-z') \\ &+ e^{ik_g(z-z')}\delta(z'-z)] \\ &+ C_{NV}(jk_g)(k_{CV}^2/k^2)\phi_{0V}(\rho)\hat{z} \\ &\times \nabla_t\phi_{0V}(\rho')[e^{iK_g(z-z')}\delta(z-z') \\ &+ e^{iK_g(z'-z)}\delta(z'-z)] \\ &+ C_{MV}\bar{m}_{eV}(\rho)\hat{z} \times \bar{m}_{eV}(\rho')[-e^{ik_g(z-z')}\delta(z-z') \\ &+ e^{iK_g(z'-z)}\delta(z'-z)]\}.\end{aligned} \tag{29}$$

在分布意义下我们有恒等式

$$\left.\begin{aligned}&\delta(z-z')e^{iK_g(z-z')}-\delta(z'-z)e^{iK_g(z'-z)}=0,\\&\delta(z-z')e^{iK_g(z-z')}+\delta(z'-z)e^{iK_g(z'-z)}=2\delta(z-z').\end{aligned}\right\}\tag{30}$$

由并矢方程(24)式,得到广义柱形波导中的电型并矢格林函数的完备解

$$\bar{G}_e(\bar{R}/\bar{R}')=\bar{G}_{e0}(\bar{R}/\bar{R}')-\sum_V C_{NV}\left(\frac{2\pi K_{CV}^2}{k^2}\right)\hat{z}\hat{z}\phi_{0V}(\rho)\times\phi_{0V}(\rho')\delta(z-z').\tag{31}$$

将矩形或圆形波导的本征函数代入(31)式,本文得到的电型并矢格林函数的正规项 $\bar{G}_{e0}(\bar{R}/\bar{R}')$ 与文献[1,4]给出的结果相同,但附加项 $\bar{G}_{eL}(\bar{R}/\bar{R}')$ 在形式上有些不同. 如果将 δ 函数用本征函数展开即可看出本文的结果与文献[1,4]相同.

为了进行比较,考虑矩形和圆形波导的具体实例. 矩形波导的标量波函数为

$$\Phi_{\stackrel{e}{0}}^{\pm}(h)=\phi_{\stackrel{e}{0}}(\rho)e^{\pm ihz}=\begin{Bmatrix}\cos\dfrac{m\pi}{a}x\ \cos\dfrac{n\pi}{b}y\\[2ex]\sin\dfrac{m\pi}{a}x\ \sin\dfrac{n\pi}{b}y\end{Bmatrix}e^{\pm ihz},\tag{32}$$

式中 a 和 b 是矩形波导的宽边和窄边. 将(32)式代入(31)式就得到矩形波导电型并矢格林函数的附加项 $\bar{G}_{eL}(\bar{R}/\bar{R}')$

$$\begin{aligned}\bar{G}_{eL}(\bar{R}/\bar{R}')&=-\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi abK_C^2}\right)\left(\frac{2\pi K_C^2}{k^2}\right)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\sin\frac{m\pi}{a}x'\\&\quad\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y'\delta(z-z')\hat{z}\hat{z}\\&=-\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{ab}\right)\left(\frac{1}{k^2}\right)\sin\frac{m\pi}{a}x\ \sin\frac{n\pi}{b}y\ \sin\frac{m\pi}{a}x'\sin\frac{n\pi}{b}\\&\quad\times y'\delta(z-z')\hat{z}\hat{z}.\end{aligned}\tag{33}$$

利用分布论的关系式

$$\delta(x-x')\delta(y-y')=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{ab}\right)\sin\frac{m\pi}{a}x\ \sin\frac{n\pi}{b}y\ \sin\frac{n\pi}{a}x'\times\ \sin\frac{n\pi}{b}y',\tag{34}$$

则(33)式可写为

$$\bar{G}_{eL}(\bar{R}/\bar{R}')=-\left(\frac{1}{k^2}\right)\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')\hat{z}\hat{z},\tag{35}$$

(35)式与文献[1]的结果相同.

圆形波导的标量波函数为

$$\Phi_{\stackrel{0}{e}}^{\pm}(h)=\phi_{\stackrel{0}{e}}(\rho)e^{\pm ihz}=\begin{Bmatrix}J_n(\lambda r)\begin{matrix}\cos\\\sin\end{matrix}n\phi\\[1ex]J_n(\mu r)\begin{matrix}\cos\\\sin\end{matrix}n\phi\end{Bmatrix}e^{\pm ihz},\tag{36}$$

式中 $J_n(\lambda_{nm}r)\Big|_{r=a}=0$, $\dfrac{dJ_n(\mu_{nm}r)}{dr}\Big|_{r=a}=0$, a 是圆波导的半径. 由(31)式得到圆形波导电型并矢格林函数的附加项

$$\bar{G}_{eL}(\bar{R}/\bar{R}') = -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{2-\delta_0}{4\pi^2 K_C^2 I_\lambda}\right)\left(\frac{2\pi K_C^2}{k^2}\right) J_n(\lambda r) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} n\phi$$

$$\cdot J_n(\lambda r') \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} n\phi' \delta(z-z')\hat{z}\hat{z}$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{2-\delta_0}{2I_\lambda}\right)\left(\frac{1}{k^2}\right) J_n(\lambda r) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} n\phi$$

$$\cdot J_n(\lambda r') \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} n\phi' \delta(z-z')\hat{z}\hat{z}. \tag{37}$$

式中

$$I_\lambda = \int_0^a J_n^2(\lambda r) r dr = \frac{a^2}{2\lambda^2}\left(\frac{dJ_n(\lambda r)}{dr}\right)^2\Bigg|_{r=a}, \quad \delta_0 = \begin{cases}1, & n=0;\\ 0, & n \neq 0.\end{cases}$$

利用分布论的关系式

$$\frac{1}{r}\delta(r-r')\delta(\phi-\phi') = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{2-\delta_0}{2I_\lambda}\right) J_n(\lambda r) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} n\phi J_n(\lambda r') \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} n\phi', \tag{38}$$

则(37)式可写为

$$\bar{G}_{eL}(\bar{R}/\bar{R}') = -\left(\frac{1}{k^2}\right)\left(\frac{1}{r}\right)\delta(r-r')\delta(\phi-\phi')\delta(z-z')\hat{z}\hat{z}. \tag{39}$$

(39)式与文献[4]的结果相同.

从上面的例子可知,电型并矢格林函数的附加项是奇异函数,文献[1,4]用 δ 函数形式表示,而本文用本征函数的展开式表示. 从分布论可知,这两种表示式是等效的[7]. 由于本文的推导未涉及具体的横截面形状. 结果具有普遍意义.

五、结　论

本文利用并矢格林函数和矢量源函数内积的特点，将矢量空间的概念推广到并矢空间,建立了求解并矢格林函数的算子法，这样不仅简化了求解并矢波动方程的步骤，而且为研究并矢波动方程的性态提供了一个有效途径. 文末以广义柱形波导为例,具体阐明了本文方法的运用. 所得结果与文献[1,4]给出的矩形或圆形波导的并矢格林函数相同,但本文的推导未涉及具体的横截面形状,所以具有普遍实用意义.

本文曾得到李英、吴程里和周学松老师的有益讨论和建议,在此一并表示感谢.

参　考　文　献

[1] C. T. Tai, *Proc. IEEE*, **61**, (1973), 480.
[2] Y. Rahmat-samii, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-23** (1975), 762.
[3] J. J. H. Wang, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-26** (1978), 457.
[4] 霍美瑜,科学通报,6(1981),686.
[5] N. I. Akhiez, Theory of Linear Operators in Hilbert Space, McGraw-Hill, (1965), pp. 127.
[6] V. S. Vladimirow, Generalized Functions in Mathematical Physics, Mir Publishers, (1979), pp. 110.
[7] J. J. H. Wang, *IEEE Trans. on AP*, **AP-30** (1982), 463.

THE OPERATOR METHOD FOR THE DETERMINATION OF DYADIC GREEN'S FUNCTIONS

Pan Shenggen

(Shanghai University of Science and Technology)

The operator method for the determination of dyadic Green's functions is presented by the extention of concepts of vector space to dyadic space, and the new expression for the dyadic magnetic wave equation is derived strictly by using the theory of distribution. As an example, the dyadic Green's functions in generalized cylindrical waveguides are given.