

# 离散子波提升算法研究及其性能分析<sup>1</sup>

王布宏 王永良 李荣峰

(空军雷达学院重点实验室 武汉 430010)

**摘要** 论文基于矩阵变换和变换矩阵级联分解的思想,提出一种新的多相矩阵表示形式,对离散子波提升算法的机理进行了完整的理论分析,对子波提升算法和子波变换双通道滤波实现理想重构条件进行了等价性证明,并利用互补滤波器组的对偶性提出一种新的子波提升分解算法的级联矩阵分解形式,使提升算法的机理解释更加完善,然后基于文中提出的矩阵级联分解形式,以(2,2)双正交子波变换为例说明了离散子波提升分解算法的实现,并就算法的可逆性、运算量和原位实现等问题进行了简要讨论。

**关键词** 子波变换,多相表示,提升

**中图分类号** TN911.72, O177.6

## 1 引言

传统的子波基是由一个子波母函数经过平移和伸缩形成的一组函数序列。它利用信号的时频局部相关性,用具有时频局部性的小波基对信号进行分解表示,从而提取信号的时频局部信息。针对信号的不同相关特性,设计不同的小波基函数对信号进行分解表示,可以最大限度消除序列的相关性,更加准确地提取信号时频信息。子波母函数的移位和伸缩,对应于频域是对子波母函数频谱的线性运算,因此傅氏变换是构造传统子波变换的主要工具<sup>[1,2]</sup>。基于子波构造时域相关等价解释的子波提升分解算法<sup>[3-5]</sup>,是一种时域构造子波的方法。它使子波基的构造摆脱了对傅氏变换的依赖,形成了时域构造子波的统一理论框架。

基于子波变换的多相表示和多相矩阵 Euclid 分解算法的子波提升分解和构造算法<sup>[1]</sup>,使任何现有的基于 FIR 双通道子带滤波实现的子波变换均有其相应的时域提升分解表示。相反利用子波变换的提升分解表示,通过设计不同的分割、预测、修正算子可以构造特定性质的子波变换,以适应不同的应用场合。本文首先对离散子波的提升分解算法的机理进行了详细的理论分析和解释,在算法的理论推导过程中使用了与文献[4]不同的多相矩阵表示形式,以用矩阵变换和变换矩阵级联分解的观点来解释提升算法的机理;并对提升分解算法的理想重构条件与传统子波变换双通道滤波实现理想重构条件的等价性进行了证明;最后还基于互补滤波器的对偶性质,给出了一种新的子波提升分解算法的矩阵表示形式,使提升算法的机理解释更加完善。接着,基于文中给出的提升算法的级联矩阵分解表示,以(2,2)双正交子波变换为例说明了提升算法的实现,并就算法实现的具体性能,包括可逆性、原位实现、运算量的减半等问题进行了简要讨论。

## 2 离散子波提升算法的原理及机理分析

### 2.1 离散子波变换双通道子带 FIR 滤波实现及其理想重构条件

传统子波变换的实现<sup>[6-9]</sup>是基于多分辨率分析的双通道子带滤波实现,输入序列经过高通(带)分解滤波器 $\tilde{g}(z^{-1})$ ,经下采样提取子波高频系数,通过低通分解滤波器 $\tilde{h}(z^{-1})$ ,经下采样提取低频尺度系数。逆变换实现时,子波高频系数和低频尺度系数首先上采样然后分别经过相应的对偶合成滤波器 $g(z)$ 和 $h(z)$ ,最终将二者输出叠加合并形成重构序列。当滤波器组 $(\tilde{h}, \tilde{g}, h, g)$ 满足理想重构条件时,可以完全重建原始输入序列。理想重构条件为<sup>[9]</sup>

<sup>1</sup> 2001-05-08 收到, 2001-12-24 定稿

全国高等学校优秀青年教师教学科研奖励计划 (TRAPOYT) 资助

$$h(z)\tilde{h}(z^{-1}) + g(z)\tilde{g}(z^{-1}) = 2 \tag{1}$$

$$h(z)\tilde{h}(-z^{-1}) + g(z)\tilde{g}(-z^{-1}) = 0 \tag{2}$$

**2.2 离散子波提升算法机理分析**

基于子波变换的多相表示和劳伦多项式矩阵分解的离散子波的提升 (Lifting) 算法, 由 Daubechies 和 Sweldens 在文献 [4] 中提出, 它的提出为离散子波变换的全时域实现及构造提供了统一理论框架. 文献 [4] 中指出任何一个由 FIR 滤波器通过双通道子带滤波实现的子波变换均可以由级联交替的提升和对偶提升环节来实现. 为了便于用矩阵变换和变换矩阵级联分解的思想对子波变换提升分解算法的机理进行论述, 本文在下面提升算法的推导过程中使用了与文献 [4] 不同的多相矩阵的表示方法 (采用了多相矩阵  $\tilde{P}(z)$  的转置形式), 并对子波变换双通道子带滤波实现和提升算法实现的理想重构条件进行了等价性证明. 同时基于互补滤波器的对偶性, 导出子波提升分解算法的另一种级联矩阵分解的形式, 对文献 [4] 中的算法机理解释进行了完善, 最后得到了提升分解算法的统一机理解释.

**2.2.1 离散子波变换的多相表示及理想重构条件** 如图 1 所示, 基于先 FIR 滤波后下采样等效于分别由输入偶序列与冲激响应的偶序列卷积, 输入奇序列与冲激响应的奇序列卷积, 而后叠加输出的事实可以引入离散子波变换的多相表示:

$$y_e(z) = h_e(z)x_e(z) + z^{-1}h_o(z)x_o(z) \tag{3}$$

将离散子波变换双通道子带实现中的先双通道 FIR 滤波后下采样用上述多相表示实现, 则引入了离散子波变换的多相表示:

$$\begin{bmatrix} \lambda(z) \\ \gamma(z) \end{bmatrix} = \tilde{P}(Z^{-1}) \begin{bmatrix} x_e(z) \\ z^{-1}x_o(z) \end{bmatrix}, \quad \tilde{P}(Z) = \begin{bmatrix} \tilde{h}_e(z) & \tilde{h}_o(z) \\ \tilde{g}_e(z) & \tilde{g}_o(z) \end{bmatrix} \tag{4}$$

可见离散子波变换可以理解为对输入信号序列进行奇偶分割后通过多相矩阵进行线性变换的映射结果. 同理对于离散子波逆变换, 我们基于先上采样 (插 0) 后 FIR 滤波等效于原序列分别对滤波器冲激响应的奇偶序列进行卷积后合并输出的事实构造逆变换的多相表示:

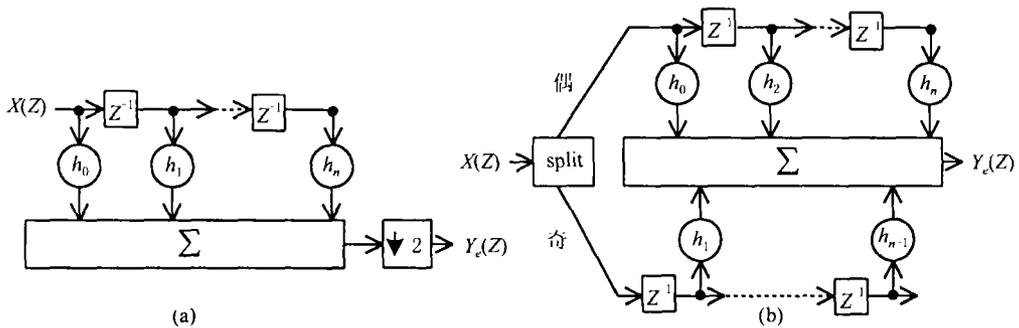


图 1 先 FIR 滤波后下采样图解及其等效的多相表示图解

$$\begin{bmatrix} y_e(z) \\ y_o(z) \end{bmatrix} = P(Z) \begin{bmatrix} \lambda(z) \\ \gamma(z) \end{bmatrix}, \quad P(Z) = \begin{bmatrix} h_e(z) & g_e(z) \\ h_o(z) & g_o(z) \end{bmatrix} \tag{5}$$

显然, 如图 2 所示多相表示的离散子波变换及重构过程可以看作级联矩阵  $P(z)\tilde{P}(z^{-1})$  对输入的奇偶分割序列进行变换后奇偶合并的过程, 其理想重建条件为

$$\tilde{P}(z^{-1})P(z) = I \quad (6)$$

当  $\det(P(Z)) = 1$  即  $(h, g)$  为互补滤波器组时, 由理想重建条件和 Cramer 求逆可得满足理想重构的分解、合成滤波器间的关系为

$$\tilde{g}(z) = z^{-1}h(-z^{-1}) \quad (7)$$

$$\tilde{h}(z) = -z^{-1}g(-z^{-1}) \quad (8)$$

可见构造实现一个可逆的基于 FIR 滤波器的子波变换可以等价于构造一个行列式为 1 的多相矩阵  $P(z)$ .  $P(z)$  一旦选定, 通过上述理想重建条件的约束, 利用滤波器的多相关系即可立即构造出子波变换双通道子带滤波器组. 相反, 任何一个由傅氏变换构造的离散子波变换 (有时需要一标量加权保证滤波器组互补性) 均有相应的多相矩阵与之相对应.

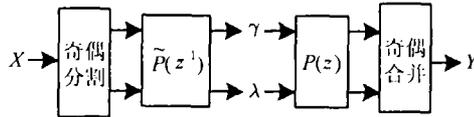


图 2 离散子波变换及逆变换的多相表示实现

2.2.2 两种理想重构条件等价性的证明 (1) 将 (7),(8) 式中的  $\tilde{g}(z)$  和  $\tilde{h}(z)$  代入 (2) 式左边得 0 即可证明与 (2) 式的等价关系. (2) 将 (7),(8) 式中的  $\tilde{g}(z)$  和  $\tilde{h}(z)$  代入 (1) 式左边得:

$$z[h(-z)g(z) - h(z)g(-z)] = 2 \quad (9)$$

由  $\det(P(Z)) = 1$  得:  $h_e(z)g_o(z) - h_o(z)g_e(z) = 1$ . 将上式中  $Z$  用  $Z^2$  进行变量代换得:

$$h_e(z^2)g_o(z^2) - h_o(z^2)g_e(z^2) = 1 \quad (10)$$

将滤波器的多相表达式:  $h(z) = h_e(z^2) + z^{-1}h_o(z^2)$ ,  $h_e(z^2) = [h(z) + h(-z)]/2$ ,  $h_o(z^2) = [h(z) - h(-z)]/(2z^{-1})$ , 代入 (10) 式得

$$[h(z) + h(-z)][g(z) - g(-z)] - [h(z) - h(-z)][g(z) + g(-z)] = 4/z$$

$$z[h(-z)g(z) - h(z)g(-z)] = 2$$

即可证明 (7), (8) 式与 (1) 式的等价性.

2.2.3 提升与对偶提升的多相矩阵表示 基于互补滤波器之间的相互联系, 通过提升和对偶提升后仍可以保持滤波器组间的互补性. 对于互补滤波器组  $(\tilde{h}, \tilde{g})$ , 提升和对偶提升关系指出固定  $\tilde{h}$  或  $\tilde{g}$  重新构造互补滤波器组  $(\tilde{h}, \tilde{g}_{\text{new}})$  或  $(\tilde{h}_{\text{new}}, \tilde{g})$  的方法.

**提升关系** 用分解高 (带) 通滤波器  $\tilde{g}$  的加权对低通分解滤波器  $\tilde{h}$  进行修正, 仍保持滤波器组  $(\tilde{g}, \tilde{h})$  的互补性. 通过理想重构条件可以构造相应的合成滤波器组  $(h, g)$  提升关系.

$$g_{\text{new}}(z) = g(z) + h(z)s(z^2), \quad \tilde{h}_{\text{new}}(z) = \tilde{h}(z) - \tilde{g}(z)s(z^{-2})$$

$$P_{\text{new}}(z) = P(z) \begin{bmatrix} 1 & s(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{P}_{\text{new}}(z) = \begin{bmatrix} 1 & -s(z^{-1}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{P}(z)$$

**对偶提升关系** 用分解低通滤波器  $\tilde{h}$  的加权对高(带)通分解滤波器  $\tilde{g}$  进行修正, 仍保持滤波器组  $(\tilde{g}, \tilde{h})$  的互补性. 通过理想重构条件可以构造相应的合成滤波器组  $(h, g)$  对偶提升关系.

$$h_{\text{new}}(z) = h(z) + g(z)t(z^2), \quad \tilde{g}_{\text{new}}(z) = \tilde{g}(z) - \tilde{h}(z)t(z^{-2})$$

$$P_{\text{new}}(z) = P(z) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t(z) & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{P}_{\text{new}}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -t(z^{-1}) & 1 \end{bmatrix} \tilde{P}(z)$$

相反, 对于现有的子波变换对应的多相矩阵  $P(z)$  可以看作是多相矩阵  $P_{\text{old}}(z)$  经过提升和对偶提升运算的结果. 经过矩阵分解, 就可以从子波变换的多相矩阵  $P(z)$  提取一个提升环节, 从而求出  $P_{\text{old}}(z)$ , 可以预想, 通过对  $P_{\text{old}}(z)$  继续进行提升环节的提取, 可以一直进行下去, 直到  $P_{\text{old}}(z)$  为单位阵或一个常数矩阵(对角线上的元素为常数).

**2.2.4 离散子波变换的提升分解和构造算法** 利用劳伦多项式的长除法和劳伦多项式矩阵分解的性质, 可以引入子波变换提升分解的矩阵分解形式, 现有的基于 FIR 滤波器的离散子波变换均可以分解为单位多相矩阵开始的不同提升或对偶提升环节的级联. 同时如果我们从单位多相矩阵(对应奇偶分割)开始, 通过提升或对偶提升环节的级联就可以构造不同的的离散子波变换. 这就是子波提升分解构造算法的实质.

文献 [4] 中通过劳伦多项式的 Euclid 求最大公因式算法和互补滤波器组提升关系, 得出了子波变换互补滤波器组对应多相矩阵的提升分解表达式如 (11), (12) 式所示:

$$P(z) = \prod_{i=1}^m \begin{bmatrix} 1 & s_i(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t_i(z) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 1/K \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\tilde{P}(z) = \begin{bmatrix} 1/K & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \prod_{i=m}^1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -t_i(z^{-1}) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -s_i(z^{-1}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

**2.2.5 子波提升分解算法的另一种矩阵分解形式和统一机理解释** 基于互补滤波器组的对偶关系即  $(h, g)$  为互补滤波器,  $(\tilde{h}, \tilde{g})$  也为互补滤波器, 我们可以得到区别于文献 [4] 的提升分解的另外一种表达式 (13), (14) 式:

$$\tilde{P}(z^{-1}) = \begin{bmatrix} 1/K & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \prod_{i=m}^1 \begin{bmatrix} 1 & t_i(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s_i(z) & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$P(z) = \prod_{i=m}^1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -s_i(z) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -t_i(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 1/K \end{bmatrix} \quad (14)$$

显然我们可以用级联矩阵  $P(z)\tilde{P}(z^{-1}) = I$  来验证矩阵分解的正确性和相应子波变换的理想重构特性.

文献 [4] 中 (11),(12) 式和本文分解算法 (13),(14) 式中的  $s(z)$  环节可以看作利用序列的时域相关性, 用奇(偶)序列对偶(奇)序列进行的预测环节, 而  $t(z)$  可以看作是利用预测误差对

预测序列进行修正, 以保持初始输入序列的某种低频特性, 以适用特殊的应用。通常使用预测算子时利用序列样点间的相关性去除了输入序列中的高频信息, 预测算子的阶数对应了对偶子波函数的消失矩  $N$ , 若输入序列的相关特性恰好满足小于  $N$  阶的多项式关系, 则提取的高频子波系数均为 0。而使用修正算子时保留了输入序列中的低频信息, 修正算子的阶数对应于子波函数的消失矩  $\tilde{N}$ , 即使用修正环节保持输入序列的前  $\tilde{N}$  阶矩特性保持不变。因此我们可以将用提升算法构造子波的方法, 看作根据输入信号的时域相关特性, 设计良好的预测算子, 然后根据实际需要设计良好的修正算子, 利用预测误差对预测序列进行修正, 使其与原始输入序列保持某种相同的低频特性。通过分割、预测(对偶提升)与修正(提升)环节构造子波变换的提升算法统一机理解释如图 3 所示(图中  $P$  和  $U$  分别代表预测和修正算子)。

对应正交子波的情形由于  $h = \tilde{h}$ ,  $g = \tilde{g}$ , 因此  $P(z) = \tilde{P}^T(z)$  我们得到了一个多相矩阵的两个不同的分解方式, 分别对应奇偶序列的相互预测。

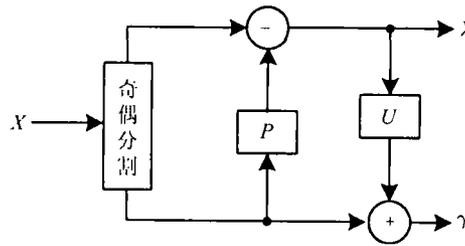


图 3 提升算法统一机理解释

### 3 离散子波提升算法举例及性能分析

#### 3.1 离散子波提升算法示例

基于本文提出的提升分解算法的矩阵分解形式(13),(14)式, 取(2,2)的双正交子波变换为例, 对算法的实现结构进行说明。(2,2)双正交子波变换分解互补滤波器组  $(\tilde{h}, \tilde{g})$ (为了保证互补性,  $\tilde{h}$  乘 -2) 为

$$\begin{aligned} \tilde{h}(z^{-1}) &= z^{-2}/4 - z^{-1}/2 - 3/2 - z/2 + z^2/4, & \tilde{g}(z^{-1}) &= z^{-2}/4 - z^{-1}/2 + 1/4 \\ \tilde{h}_e(z^{-1}) &= z^{-1}/4 - 3/2 + z/4, & \tilde{h}_o(z^{-1}) &= -1/2 - z/2 \\ \tilde{g}_e(z^{-1}) &= z^{-1}/4 + 1/4, & \tilde{g}_o(z^{-1}) &= -1/2 \\ \tilde{P}(z^{-1}) &= \begin{bmatrix} z^{-1}/4 - 3/2 + z/4 & -1/2 - z/2 \\ z^{-1}/4 + 1/4 & -1/2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

对应的提升分解矩阵级联表达式为(15)式, 相应的滤波器级联实现如图 4 所示:

$$\tilde{P}(z^{-1}) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/4 + z/4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -z^{-1}/2 - 1/2 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

在本例中预测环节用相邻偶数样点取均值的方法预测中间的奇数点, 用长度为 2 的分段线性序列对原序列进行逼近, 用小波高频系数  $\gamma$  来表示预测误差, 然后为了算法实现的简易性和原位运算的需要, 用  $\gamma$  对偶数序列进行修正, 以保证偶数序列的均值与原始输入序列具有相同的均值(一阶矩特性:  $\sum \lambda_j = 2 \sum \lambda_{j-1}$ ), 从而得到尺度低频系数  $\lambda$ 。

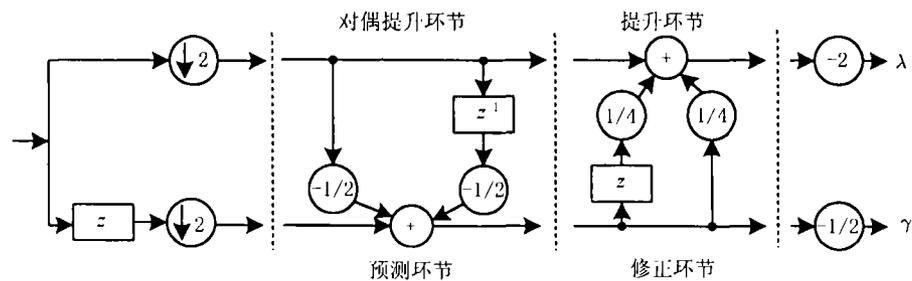


图 4 (2, 2) 双正交子波提升分解实现结构图

### 3.2 提升算法实现性能讨论

对于子波变换的提升算法实现, 只要正变换一确定, 反变换的实现只需逆向执行正变换的操作, 将正负号互换. 可见提升算法实现离散子波变换时具有可逆简易性. 另外, 提升算法可以实现原位运算, 使子波变换实时实现时存贮器的要求大大降低. 可以证明, 如果输入原始序列为  $2^n$  个样点, 并存贮在单元  $0 \sim 2^n - 1$  中, 进行  $j = n$  次提升原位运算后,  $\gamma_j(k)$  在存贮器的第  $2^{-j-1} + 2^{-j}k$  单元中,  $\lambda_j(0)$  在存贮器的第 0 单元中. 最后在算法实现的运算量方面, 传统的子波变换的双子带实现过程中, 先滤波后下采样, 滤波过程计算的一半无用的输出样点 (奇数序列) 被忽略. 子波变换的多相实现实质上是先对滤波器系数进行下采样后滤波的过程, 同时采用并行运算, 节省了一半的运算量. 同理对于逆变换先上采样 (插 0) 后滤波, 由于滤波器输入序列中有大量的 0 值存在, 浪费了运算时间和运算量. 多相实现采用先并行滤波后奇偶合并 (上采样) 节省了一半的运算量. 限于篇幅有限, 对算法性能的详细讨论本文作者将另文发表.

## 4 结束语

论文对基于时域提升分解的离散子波分解和构造方法进行了全面详尽的论述, 提升分解算法脱离了传统子波变换对傅氏变换的依赖性, 形成一种时域构造子波的全新方法和框架. 任何一现有的基于 FIR 滤波器的两子带滤波实现的子波变换均可以分解为一系列对偶提升 / 提升交替级联的环节. 提升算法具有可逆简易性、较传统子波变换实现运算量减半、可以进行原位运算等优良性能. 同时子波提升的时域实现机制, 可以使其用于无法用傅氏变换构造子波情形——二代子波<sup>[10]</sup>, 而且它在  $M$  带子波、子波包、自适应子波、非线性子变等方面也有较好的应用. 同时, 由于劳伦多项式长除法的不唯一性, 针对提升分解的不唯一性, 如何建立一种优化准则, 针对不同的应用选择最佳的分解方式是需进一步研究的方向.

## 参 考 文 献

- [1] C. K. Chui, An Introduction to Wavelets, San Diego, Academic Press, 1992, Chapter 1.
- [2] I. Daubechies, Ten Lectures on Wavelets, CBMS-NSF Regional Conf. Series in Appl. Math 61, SIAM, 1992.
- [3] W. Sweldens, The lifting scheme: A custom-design construction of biorthogonal wavelets, J. Appl. Comp. Harm. Anal, 1996, 3(2), 186-200.
- [4] I. Daubechies, W. Sweldens, Factoring wavelet transforms into lifting steps, Tech. Rep, Bell Lab, 1997.
- [5] W. Sweldens, The lifting scheme: A new philosophy in biorthogonal wavelet constructions, Tech. Rep., University of South Carolina, 1995.
- [6] 赵松年, 熊小芸, 子波变换与子波分析, 北京, 电子工业出版社, 1997, 第五章.

- [7] 彭玉华, 小波变换与工程应用, 北京, 科学出版社, 2000, 第四、六章.
- [8] W. Sweldens, B. Jawerth, An overview of wavelet based multiresolution analysis, Tech. Rep., University of South Carolina, 1995.
- [9] M. Vetterli, C. Herley, Wavelets and filter banks: Theory and design, IEEE Trans. on ASSP, 1992, 40(9), 2207–2232 .
- [10] W. Sweldens, P. Schroder, Building your own wavelets at home, Tech. Rep., University of South Carolina, 1995 .

## ANALYSIS AND RESEARCH ON A NOVEL METHOD OF CONSTRUCTING WAVELETS: LIFTING FACTORIZATION

Wang Buhong    Wang Yongliang    Li Rongfeng

*(Key Research Lab, Air Force Radar Academy, Wuhan 430010, China)*

**Abstract** Analysis and research on a novel method of constructing wavelets—lifting factorization is addressed. To arrive at a generalized interpretation of lifting based on the linear transform and transform matrix factorization, a new polyphase matrix representation is proposed. Moreover the equivalence of the conditions for perfect reconstruction between dual-subband FIR filtering implementation and the lifting is also proved. Additionally based on the duality theorem of complementary filter pairs, a new lifting factorization representation is suggested which brings lifting factorization to completion. Finally, to clarify the theory a concrete example of lifting factorization corresponding to  $(2, 2)$  biorthogonal wavelet transform is presented, and the algorithm performance including reversibility, in-place implementation and computational complexity is also analyzed in brief.

**Key words** Wavelet transform, Polyphase representation, Lifting

王布宏: 男, 1975年生, 博士生, 主要从事雷达和通信信号处理研究.

王永良: 男, 1965年生, 教授、博士生导师, 主要从事雷达技术、阵列信号处理、自适应信号处理研究.

李荣峰: 男, 1971年生, 博士生, 主要从事雷达阵列信号处理的研究.