第12卷 第2期　　电子科学学刊　　Vol. 12, No. 2
1990年3月　　JOURNAL OF ELECTRONICS　　Mar., 1990

处理对称与反对称结构电磁散射问题的统一理论*

郭英杰
（西安电子科技大学，西安）

摘要　利用散射体的几何和物理特征，减少用矩量法求解散射场过程中所需要的存储量和计算时间，是当前具有理论和实际意义的重要课题。本文利用群论方法，给出了处理对称与反对称结构电磁散射问题的统一方法和理论依据.

关键词　电磁散射；对称与反对称结构；广义镜像法；群论；积分方程法

1. 引言

大存储要求是当前限制矩量法应用的主要障碍。因此，如何充分利用散射体的几何和物理特征，有效地降低求解散射场过程中所需要的存储量，减少计算时间，已成为具有理论和实际意义的重要课题[1-3]。在文献[2,3]中，作者分别提出了处理对称和反对称结构的不对称电磁散射问题的广义镜像法（GIM）。本文利用基本的群理论，统一考虑对称与反对称结构，给出了处理三维结构电磁散射问题的一般方法和严格的理论依据。

2. 结构对称与反对称特性的普遍定义

散射体的对称与反对称特性，可通过一个8阶算子群G来描述

$$G=\{I,\ R_1,\ R_2,\ R_3,\ R_1R_2,\ R_1R_3,\ R_2R_3,\ R_1R_2R_3\} \tag{1}$$

G的作用空间为R^3，它由四个基本算子所产生，后者定义为

$$\left.\begin{aligned} I(x,y,z)&=(x,y,z)\\ R_1(x,y,z)&=(-x,y,z)\\ R_2(x,y,z)&=(x,-y,z)\\ R_3(x,y,z)&=(x,y,-z)\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

由于坐标系可以人为选择，G中实际上只含有下述几种有典型代表意义的子群

$$\left.\begin{aligned} H_0&=\{I\}\\ H_S^1&=\{I,\ R_1\}\\ H_S^2&=\{I,\ R_1,\ R_2,\ R_1R_2\}\\ H_S^3&=G\\ H_A^1&=\{I,\ R_1R_2\}\\ H_A^2&=\{I,\ R_1R_3\}\\ H_A^3&=\{I,R_1R_2R_3\}\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

* 1988年1月15日收到，同年10月修改定稿.

$$\left.\begin{aligned} H_A^4 &= \{I,\ R_1R_2,\ R_1R_3,\ R_2R_3\} \\ H_{SA} &= \{I,\ R_1,\ R_2R_3,\ R_1R_2R_3\} \end{aligned}\right\}$$

借助(3)式，我们可以给出结构对称、反对称和复对称的一般定义：

定义　设一结构的介电常数和磁导率为 $\varepsilon(\boldsymbol{r})$，$\mu(\boldsymbol{r})$，通过适当选择坐标系，总可使得至少对(3)式中的某一个子群 H 成立

$$\varepsilon[T(x,\ y,\ z)] = \varepsilon(x,\ y,\ z) \tag{4a}$$

$$\mu[T(x,\ y,\ z)] = \mu(x,\ y,\ z) \tag{4b}$$

$$(\forall T \in H)$$

令满足(4)式的阶数最高的子群为 H_M. 当 $H_M = H_S^i$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$，称此结构是对称的；当 $H_M = H_A^i$ $(1 \leqslant i \leqslant 4)$，称此结构是反对称的；若 $H_M = H_{SA}$，则称此结构是复对称的. H_M 称作结构的特征子群.

需要指出，采用"结构"一词，旨在强调散射体既可以是单一物体，也可以是组合体.

3. 体积分方程的处理

下面具体研究如何利用广义镜像法，对体积分方程进行预处理，以期达到减少矩量法求解所需要的存储量和计算时间的目的.

设散射体的磁导率等于自由空间的磁导率 μ_0，介电常数为 $\varepsilon(\boldsymbol{r})$. 则散射电场 $\boldsymbol{E}^s$ 的积分方程为

$$\frac{\boldsymbol{E}^s(\boldsymbol{r})}{j\omega} + \int_V (\varepsilon_0 - \varepsilon)\boldsymbol{E}^s(\boldsymbol{r}') \cdot \bar{\bar{G}}(\boldsymbol{r}'|\boldsymbol{r})dV = \int_V (\varepsilon - \varepsilon_0)\boldsymbol{E}^i(\boldsymbol{r}') \cdot \bar{\bar{G}}(\boldsymbol{r}'|\boldsymbol{r})dV$$

$$(\boldsymbol{r} \in V) \tag{5}$$

式中 $\boldsymbol{E}^i$ 代表入射电场，ε_0 和 $G(\boldsymbol{r}'|\boldsymbol{r})$ 分别代表自由空间的介电常数和电型并矢格林函数，ω 为角频率，V 为散射体所占的全部空间.

设 H 为散射体的特征子群，V_1 为 V 的基本构成单元，则

$$V = U\{T(V_1): T \in H\} \tag{6a}$$

$$\varepsilon(T\boldsymbol{r}) = \varepsilon(\boldsymbol{r}) \quad (\boldsymbol{r} \in V,\ T \in H) \tag{6b}$$

由(5)式可得[4]

$$\frac{1}{j\omega}\boldsymbol{E}^s(S\boldsymbol{r}) + \sum_{T \in H}\int_{V_1}(\varepsilon_0 - \varepsilon)\boldsymbol{E}^s(T\boldsymbol{r}') \cdot \bar{\bar{G}}(T\boldsymbol{r}'|S\boldsymbol{r})dV$$

$$= \sum_{T \in H}\int_{V_1}(\varepsilon_0 - \varepsilon)\boldsymbol{E}^i(T\boldsymbol{r}') \cdot \bar{\bar{G}}(T\boldsymbol{r}'|S\boldsymbol{r})dV \tag{7}$$

$$(\forall S \in H,\ \boldsymbol{r} \in V)$$

为简化(7)式，需要根据广义镜像法对入射场进行分解[2,3].

设散射体结构的特征子群为二阶群 $(N(H) = 2)$，令 $H = \{I,\ R\}$，有

$$\boldsymbol{E}^i(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}\{[\boldsymbol{E}^i(I\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}^i(R\boldsymbol{r})] + [\boldsymbol{E}^i(I\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{E}^i(R\boldsymbol{r})]\}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{S \in H}\alpha_S^i \boldsymbol{E}^i(S\boldsymbol{r}) \tag{8a}$$

其中 $\alpha_I^1 = \alpha_I^2 = \alpha_R^1 = 1$，$\alpha_R^2 = -1$. 当 $N(H) = 4$，令 $H = \{I,\ R_1,\ R_2,\ R_3\}$，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}^i(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4}\{&[\boldsymbol{E}^i(I\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}^i(R_1\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}^i(R_2\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}^i(R_3\boldsymbol{r})]\\ &+ [\boldsymbol{E}^i(I\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{E}^i(R_1\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}^i(R_2\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{E}^i(R_3\boldsymbol{r})]\\ &+ [\boldsymbol{E}^i(I\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}^i(R_1\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{E}^i(R_2\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{E}^i(R_3\boldsymbol{r})]\\ &+ [\boldsymbol{E}^i(I\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{E}^i(R_1\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{E}^i(R_2\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}^i(R_3\boldsymbol{r})]\}\\ = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4}&\sum_{S\in H}\alpha_S^j\boldsymbol{E}^i(S\boldsymbol{r})\end{aligned} \tag{8b}$$

α_S^j的值可从(8b)式中得到。类似地,可得到 $N(H)=8$ 时的分解式

$$\boldsymbol{E}^i(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{8}\sum_{j=1}^{8}\sum_{S\in H}\alpha_S^j\boldsymbol{E}^i(S\boldsymbol{r}) \tag{8c}$$

因此,一般地有

$$\boldsymbol{E}^i(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{N(H)}\sum_{j=1}^{N(H)}\sum_{S\in H}\alpha_S^j\boldsymbol{E}^i(S\boldsymbol{r}) \tag{8d}$$

将(7)式乘以 α_S^j 后对 S 求和,得

$$\frac{\sum\limits_{S\in H}\alpha_S^j\boldsymbol{E}^s(S\boldsymbol{r})}{j\omega} + \sum_{T\in H}\int_{V_1}(\varepsilon_0-\varepsilon)\boldsymbol{E}^s(T\boldsymbol{r}')\cdot\sum_{S\in H}\alpha_S^j\bar{\bar{G}}(T\boldsymbol{r}'|S\boldsymbol{r})dV = \sum_{T\in H}\int_{V_1}(\varepsilon_0-\varepsilon)\boldsymbol{E}^i(T\boldsymbol{r}')\cdot\sum_{S\in H}\alpha_S^j\bar{\bar{G}}(T\boldsymbol{r}'|S\boldsymbol{r})dV \tag{9}$$

可以证明

$$\sum_{S\in H}\alpha_S^j\bar{\bar{G}}(T\boldsymbol{r}'|S\boldsymbol{r}) = \alpha_T^j\sum_{S\in H}\alpha_S^j\bar{\bar{G}}(\boldsymbol{r}'|S\boldsymbol{r}) \tag{10}$$

代入(9)式得

$$\frac{1}{j\omega}\sum_{S\in H}\alpha_S^j\boldsymbol{E}^s(S\boldsymbol{r}) + \int_{V_1}(\varepsilon_0-\varepsilon)\sum_{T\in H}\alpha_T^j\boldsymbol{E}^s(T\boldsymbol{r}')\cdot\sum_{S\in H}\alpha_S^j\bar{\bar{G}}(\boldsymbol{r}'|S\boldsymbol{r})dV = \int_{V_1}(\varepsilon_0-\varepsilon)\sum_{T\in H}\alpha_T^j\boldsymbol{E}^i(T\boldsymbol{r}')\cdot\sum_{S\in H}\alpha_S^j\bar{\bar{G}}(\boldsymbol{r}'|S\boldsymbol{r})dV \quad (\boldsymbol{r}\in V) \tag{11}$$

令

$$\boldsymbol{E}_j^i(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{N(H)}\sum_{S\in H}\alpha_S^j\boldsymbol{E}^i(S\boldsymbol{r}) \tag{12a}$$

$$\boldsymbol{E}_j^s(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{N(H)}\sum_{S\in H}\alpha_S^j\boldsymbol{E}^s(S\boldsymbol{r}),\quad (\boldsymbol{r}\in V,\ j=1,2,\cdots,N(H)) \tag{12b}$$

$\boldsymbol{E}_j^i(\boldsymbol{r})$、$\boldsymbol{E}_j^s(\boldsymbol{r})$ 满足方程

$$\boldsymbol{E}_j^i(T\boldsymbol{r}) = \alpha_T^j\boldsymbol{E}_j^i(\boldsymbol{r}) \tag{13a}$$

$$\boldsymbol{E}_j^s(T\boldsymbol{r}) = \alpha_T^j\boldsymbol{E}_j^s(\boldsymbol{r}),\quad (\forall T\in H) \tag{13b}$$

可以看出, $\boldsymbol{E}_j^i(\boldsymbol{r})$ 和 $\boldsymbol{E}_j^s(\boldsymbol{r})$ 分别对应于通过引入广义镜像源得到的子问题中的源场与散射场[2,3],除常数因子(± 1)外, 它们在V的 $N(H)$ 个部分上的分布是相同的。将(12)式代入(11)式,利用(10)和(13)两式,我们最后得到

$$\frac{1}{j\omega}\boldsymbol{E}_j^s(\boldsymbol{r})+\int_{V_1}(\varepsilon_0-\varepsilon)\boldsymbol{E}_j^s(\boldsymbol{r}')\cdot\sum_{S\in H}\alpha_S^j\bar{\bar{G}}(\boldsymbol{r}'|S\boldsymbol{r})dV$$
$$=\int_{V_1}(\varepsilon_0-\varepsilon)\boldsymbol{E}_j^i(\boldsymbol{r}')\cdot\sum_{S\in H}\alpha_S^j\bar{\bar{G}}(\boldsymbol{r}'|S\boldsymbol{r})dV$$
$$(\boldsymbol{r}\in V_1,\ j=1,2,\cdots,N(H))\tag{14}$$

至此，已将建立在整个散射体V上的积分方程(5)式化成 $N(H)$ 个建立在V的构成单元V_1上的积分方程(14)式．这 $N(H)$ 个积分方程是去耦的,因此可以独立求解．与直接求解(5)式相比,用矩量法逐一求解(14)式中各方程所需的未知数数目在相同精度下降至 $1/N(H)$，存储降至 $1/N^2(H)$．由于求解线性代数方程组所需的时间,与方程组阶数的立方成正比,总计算时间也得到节省．各独立解的迭加,给出散射体内的总散射场

$$\boldsymbol{E}^s(T\boldsymbol{r})=\sum_{j=1}^{N(H)}\alpha_T^j\boldsymbol{E}_j^s(\boldsymbol{r})\quad(T\in H,\ \boldsymbol{r}\in V_1)\tag{15}$$

外部散射场可以通过体等效电流求得．

以上是基于体积分方程式(5)式进行讨论的．由(13)式和场的唯一性定理知,从面积分方程出发也会得到相同的结论．理想导体散射作为有耗介质体散射的极限情况，结论不变．在文献[2,3]中,我们是通过引入镜像源,对原始问题进行分解．而(12)和(13)两式则直接给出了子问题中源场的显式表达及散射场的对称性质，这给处理复杂问题带来了方便．(12)和(13)两式不但在散射体内部成立，在散射体外部也成立．当采用其它方法(如 EBCM，BEM 和 LSM 等）求解有限物体的散射时,均可利用此两式对方程进行预处理．

本工作承蒙导师任朗教授、茅于宽教授和汪文秉教授的指导和帮助,谨此致谢．

参　考　文　献

[1] 郭英杰,谐振区电磁散射方法的理论及其应用,西安交通大学博士论文,1987．
[2] 郭英杰,茅于宽,西北电讯工程学院学报,1986 年,第 4 期,第 9—15 页．
[3] Ying-Jie Guo, 1988 IEEE AP-S Int. Symp. Digest, 918—921.

AN UNIFIED APPROACH FOR DEALING WITH THE EM SCATTERING FROM SYMMETRIC AND ANTI-SYMMETRIC STRUCTURES

Guo Yingjie
(Xidian University, Xi'an)

Abstract　It is of both theoretical and practical importance to reduce the storage and CPU time of moment methods by utilizing the geometrical and physical features of the scatterer. An unified approach based on the group theory was presented to deal with the EM scattering from symmetric and anti-symmetric structures.

Key words　EM scattering; Symmetric and anti-symmetric structure; Generalized image method; Group theory; Integral equation method