

# 氢激光器球形贮存泡的填充因子\*

史美琪

(北京大学无线电电子学系)

## 提 要

本文推导了氢原子激光器球形贮存泡填充因子的普遍表达式。计算了谐振腔和贮存泡的尺寸分别取各种不同值情况下的填充因子,并画出了填充因子和贮存泡尺寸之间的关系曲线。

## 一、引 言

1960年 N. F. Ramsey 等人做成了第一台氢原子激光振荡器,这就是“氢原子钟”。它的频谱极纯,短期频率稳定性极高,已经成为实际应用的频率基准。

氢激光器的振荡频率在微波频段内,约为 1420MHz,通过对各种频移的修正以后,可以从此振荡频率计算出氢原子基态超精细结构跃迁频率的绝对值。

氢原子激光器的示意图如图 1 所示。其中微波振荡器通常采用圆柱形谐振腔,用来贮藏微波辐射能量,提供场与原子相互作用及受激辐射反馈的条件。圆柱形腔的工作模式为  $H_{011}$  模。放在谐振腔中的贮存泡的作用是囚禁氢原子,使处在上能级的激活原子可以长时期逗留在微波谐振腔中与微波辐射场相互作用。为了有利于激光器起振和提高效率,必须考虑的问题之一是贮存泡的几何形状、尺寸和安放位置。

由于跃迁几率取决于氢原子偶极子与谐振腔中  $z$  方向的磁场相互作用,因此引进了贮存泡的填充因子

$$\eta = \frac{\langle H_{10} \rangle_b^2}{\langle H^2 \rangle_c}, \quad (1)$$

其中  $\langle H_{10} \rangle_b$  是泡中平均射频磁场,带下角标“c”的量是属于腔的相应的量。

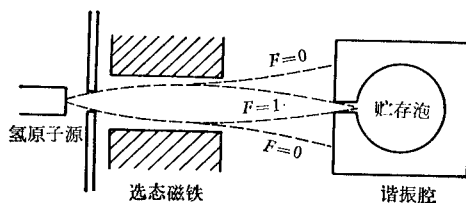


图 1 氢激光器示意图

\* 1983年6月23日收到。

$\eta$  与谐振腔中的电磁场结构、泡子的形状和位置有关。

对于腔长  $l$  与直径  $D$  相等的圆柱形腔, 工作于  $H_{011}$  模, 贮存泡是半径为  $R$  的球形泡, 位于腔的中央, 文献 [2] 计算了一条  $\eta-R/l$  曲线, 得到  $R$  的选择原则, 但  $\eta$  的数值有误。文献 [3] 对文献 [2] 的结果进行了订正。这条曲线近年来广为各国学者引用。但是腔长  $l$  与直径不等的情形下贮存泡半径  $R$  与  $\eta$  的关系曲线尚未见有文献给出计算结果, 本文对此作了计算。

本文推导了  $\eta$  的普遍公式, 并将计算机计算的结果制成了  $\eta-R/a$  关系曲线 ( $a$  为腔的半径), 对于恰当选取贮存泡的尺寸和位置具有参考价值。

## 二、计算公式的推导

为了计算填充因子  $\eta$ , 必须分别计算  $\langle H_{10} \rangle_b^2$  和  $\langle H^2 \rangle_c$ 。圆柱腔  $H_{011}$  模的场结构如图 2 所示。当坐标原点取在图 3 所示的圆柱腔的中心时,  $H_{011}$  模的场分量表达式为

$$\left. \begin{aligned} E_\varphi &= -j2D\omega\mu k_c J_1(k_c \rho) \sin \beta \left( z - \frac{l}{2} \right), \\ H_r &= -2D\beta k_c J_1(k_c \rho) \cos \beta \left( z - \frac{l}{2} \right), \\ H_z &= -2Dk_c^2 J_0(k_c \rho) \sin \beta \left( z - \frac{l}{2} \right), \\ E_r &= E_z = H_\varphi = 0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中  $k_c = \frac{\mu_{01}}{a}$ ,  $\beta = \frac{\pi}{l}$ ,  $\mu_{01}$  是  $J_0(k_c a) = J_1(k_c a) = 0$  的根, 其值为  $\mu_{01} = 3.832$ 。

由于谐振腔谐振时,  $\langle H^2 \rangle_c = \langle E^2 \rangle_c$ 。对于圆柱腔  $H_{011}$  模, 电场只有一个分量  $E_\varphi$ , 为了方便起见, 有

$$\eta = \frac{\langle H_{10} \rangle_b^2}{\langle H^2 \rangle_c} = \frac{\mu \langle H_{10} \rangle_b^2}{\mu \langle H^2 \rangle_c} = \frac{\mu \langle H_{10} \rangle_b^2}{\epsilon \langle E^2 \rangle_c} \quad (3)$$

其中  $\epsilon$ 、 $\mu$  分别为谐振腔内填充的介质的介电常数和磁导率。设  $|E|_c^2$  表示电场的平方对谐振腔的体积分, 即

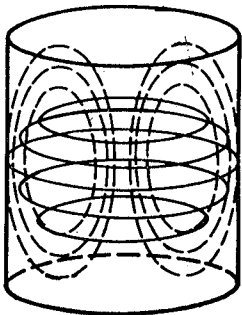


图 2 圆柱腔  $H_{011}$  模电磁场分布  
——电力线。 ----磁力线

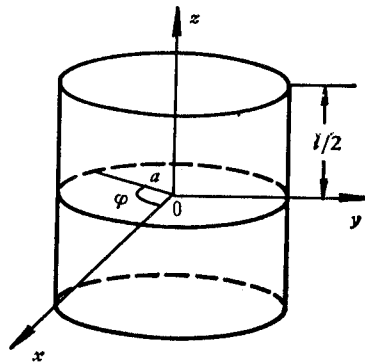


图 3 计算球形泡  $\eta$  的坐标原点的选择

$$|E|_c^2 = \int_c |E|^2 dv.$$

在变量为  $\rho$ 、 $\varphi$ 、 $z$  的圆柱坐标下,

$$|E|_c^2 = [2D\omega\mu k_c]^2 \int_0^a J_1^2(k_c \rho) \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-l/2}^{l/2} \sin^2 \beta \left( z - \frac{l}{2} \right) dz.$$

利用

$$\int_0^a J_m^2(k_i r) r dr = \frac{a^2}{2} \left\{ [J'_m(k_i a)]^2 + \left( 1 - \frac{m^2}{k_i^2 a^2} \right) J_m^2(k_i a) \right\}$$

和贝塞耳函数的递推关系  $\nu J_\nu + x J'_\nu = x J_{\nu-1}$  得

$$|E|_c^2 = 2\pi l (D\omega\mu\mu_{01})^2 J_0^2(\mu_{01}),$$

则

$$\langle E^2 \rangle_c = \frac{|E|_c^2}{\pi a^2 l} = 2(D\omega\mu k_c)^2 J_0^2(\mu_{01}). \quad (4)$$

由于贮存泡的存在引起谐振腔的场结构的畸变可忽略,引入的介质损耗也可忽略,因此在计算置于腔的中央的球形贮存泡中的  $H_{10}$  时,只需考虑腔内  $H_z$  在球形区域的体积分.为此,首先建立球坐标与圆柱坐标之间的变量替换关系,设球坐标的变量为  $r$ 、 $\theta$ 、 $\varphi$ ,则  $\rho = r \sin \theta$ ,  $z = r \cos \theta$ ,于是  $H_z$  对球形贮存泡区域的体积分  $H_{10}$  为

$$H_{10} = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} H_z r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = -4D\pi k_c^2 \int_0^R r^2 dr I_1(r),$$

其中

$$I_1(r) = \int_0^\pi J_0(k_c r \sin \theta) \sin \beta \left( r \cos \theta - \frac{l}{2} \right) \sin \theta d\theta.$$

令  $x = \cos \theta$ , 则得

$$I_1 = \int_{-1}^1 J_0(k_c r \sqrt{1-x^2}) \sin \beta \left( rx - \frac{l}{2} \right) dx,$$

利用贝塞耳函数的幂级数表示得:

$$I_1 = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{1}{(m!)^2} \left( \frac{k_c r}{2} \right)^{2m} I_2.$$

其中

$$I_2 = \int_{-1}^1 (1-x^2)^m \sin \beta \left( \frac{l}{2} - rx \right) dx,$$

利用三角函数的幂级数表示得:

$$I_2 = \sum_{g=0}^{\infty} \frac{(-1)^g (\beta l / 2)^{2g+1}}{(2g+1)!} I_3,$$

其中

$$I_3 = \int_{-1}^1 (1-x^2)^m \left( 1 - \frac{2r}{l} x \right)^{2g+1} dx.$$

利用二项式定理:

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^k C_k^n x^n,$$

则

$$I_3 = \sum_{n=0}^{2g+1} (-1)^n C_{2g+1}^n \left(\frac{2r}{l}\right)^n \int_{-1}^1 (1-x^2)^m x^n dx,$$

只有当  $n$  为偶数时, 才有  $\int_{-1}^1 (1-x^2)^m x^n dx \neq 0$ , 令  $n = 2p$ , 则

$$I_3 = \sum_{p=0}^g C_{2g+1}^{2p} \left(\frac{2r}{l}\right)^{2p} \int_{-1}^1 (1-x^2)^m x^{2p} dx.$$

令  $x^2 = y$ ,  $dx = \frac{1}{2} y^{-1/2} dy$ , 则

$$I_3 = \sum_{p=0}^g C_{2g+1}^{2p} \left(\frac{2r}{l}\right)^{2p} \int_0^1 (1-y)^m y^{p-1/2} dy$$

利用由第一类欧勒积分所定义的  $B$  函数与  $\Gamma$  函数的关系:

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

$$I_3 = \sum_{p=0}^g C_{2g+1}^{2p} \left(\frac{2r}{l}\right)^{2p} \frac{\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)\Gamma(m+1)}{\Gamma\left(m+p + \frac{3}{2}\right)}.$$

利用  $\Gamma$  函数的性质  $\Gamma(m+1) = m!$  以及  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ ,

$$I_3 = \sum_{p=0}^g C_{2g+1}^{2p} \left(\frac{2r}{l}\right)^{2p} m! \frac{\left(p - \frac{1}{2}\right)\left(p - \frac{3}{2}\right)\cdots\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(m+p + \frac{1}{2}\right)\left(m+p - \frac{1}{2}\right)\cdots\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

利用  $(m)!! \cdot (m-1)!! = m!$  以及  $(2m)!! = 2^m \cdot m!$ ,

$$I_3 = \sum_{p=0}^g C_{2g+1}^{2p} \left(\frac{2r}{l}\right)^{2p} \frac{2^{2m+1} m! (m+p)! (2p)!}{p! (2m+2p+1)!}.$$

代入  $I_2$  得

$$I_2 = m! \sum_{g=0}^{\infty} (-1)^g (\beta l)^{2g+1} \sum_{p=0}^g 2^{2(m-g+p)} \left(\frac{r}{l}\right)^{2p} \frac{(m+p)!}{p! (2m+2p+1)! (2g-2p+1)!}.$$

代入  $I_1$  得

$$I_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m!} (k_c r)^{2m} \sum_{g=0}^{\infty} (-1)^g (\beta l)^{2g+1} \sum_{p=0}^g 2^{2(p-g)} \left(\frac{r}{l}\right)^{2p} \cdot \frac{(m+p)!}{p! (2g-2p+1)! (2m+2p+1)!}.$$

代入  $I$  得

$$I = \int_0^R r^2 dr I_1(r) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m!} (k_c R)^{2m} \sum_{g=0}^{\infty} (-1)^g (\beta l)^{2g+1}$$

$$\cdot \sum_{p=0}^g 2^{2(p-g)} \left(\frac{R}{l}\right)^{2p} \frac{(m+p)!}{p!(2g-2p+1)!(2m+2p+1)!(2m+2p+3)} R^3,$$

$$H_{10} = -4D\pi k_c^2 l,$$

$$\langle H_{10} \rangle_b = \frac{H_{10}}{\frac{4}{3}\pi R^3} = -3Dk_c^2 \left[\frac{l}{R^3}\right]. \quad (5)$$

将(4)式和(5)式代入(3)式得

$$\eta = \frac{9k_c^2 \lambda^2}{8\pi^2 J_0^2(\mu_{01})^2} \left[\frac{l}{R^3}\right]^2. \quad (6)$$

### 三、结果与讨论

根据(6)式用计算机计算了圆柱腔长度  $l$  取不同值时填充因子  $\eta$  与贮存泡大小的对应关系, 制作了它们的关系曲线, 如图 4 所示. 这里横坐标为贮存泡半径  $R$  相对于腔半径  $a$  的归一化值:  $R/a$ . 图中的八条曲线分别为: ①  $l = 40$ ; ②  $l = 35$ ; ③  $l = 30$ ; ④  $l = 27.68(l = 2a)$ ; ⑤  $l = 25$ ; ⑥  $l = 20$ ; ⑦  $l = 15$ ; ⑧  $l = 11$ . 单位为 cm. 曲线 ④ 与文献 [3] 一致.

由图可见, 泡越小,  $\eta$  越大. 这是由于圆柱腔  $H_{011}$  模的  $H_z$  沿径向按  $J_0(k_c \rho)$  分布,  $\rho$  越小,  $H_z$  越大; 而  $\rho = r \sin \theta$ ,  $\rho$  越小,  $r$  也就越小,  $\langle H_{10} \rangle_b$  则越大. 当  $\rho \rightarrow 0$  时,  $H_z \rightarrow H_{z\max}$ , 而泡的体积趋于一点, 这时  $\langle H_{10} \rangle_b$  趋于极大. 随着贮存泡的体积的增大,  $H_z$  对球形贮存泡区域的体积分  $H_{10}$  也增大, 但  $H_{10}$  的增大速度小于贮存泡体积的增大速度, 尤其当  $R > 0.63a$  以后,  $H_z$  方向改变, 贮存泡的体积增大反使  $H_{10}$  下降, 所以  $\eta - R/a$  曲线是单调下降的.

图中表明在  $R/a$  相同的情况下,  $l$  越大, 填充因子  $\eta$  也越大, 这是由于谐振波长  $\lambda$  一

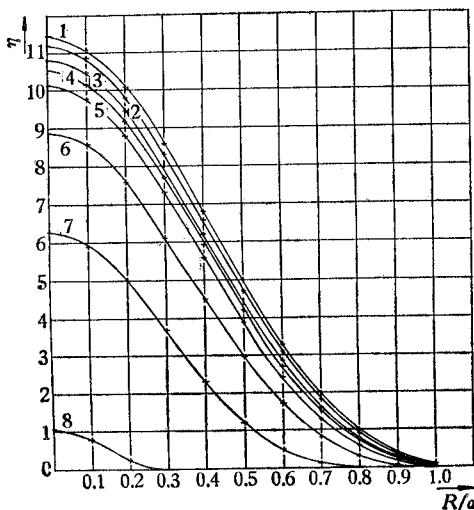


图 4  $\eta - R/a$  关系曲线

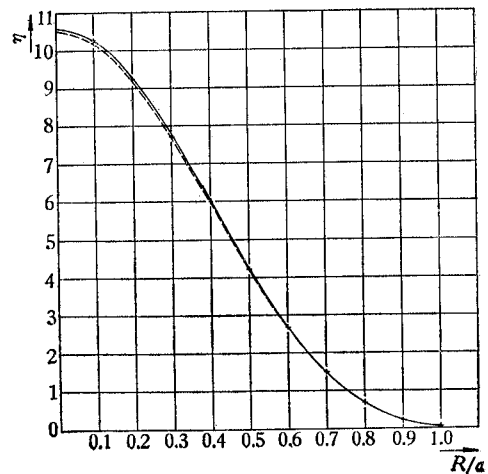


图 5 两条曲线的比较

定时,  $l$  越大则  $a$  越小, 根据 (2) 式, 这时  $H_z$  与  $H_r$  的振幅比也越大, 从而使得  $H_{10}$  相应增大, 因而  $\eta$  也就越大。

当  $R \rightarrow a$  时,  $\eta \rightarrow 0$ ,  $l$  的变化对  $\eta$  的影响不明显, 此时曲线变得密集了。贮存泡越小,  $l$  的变化对  $\eta$  的影响越显著, 此时曲线明显地散开。

图 5 还画出了  $l = 27.68\text{cm}$  ( $l = 2a$ ) 和  $l = 28.1\text{cm}$  (陕西天文台实际选用的尺寸) 两条  $\eta - R/a$  曲线。虚线是前者, 实线是后者。由图可见, 由于  $l$  相差无几, 故两条曲线已看不出明显的区别来。这表明实际工作中当  $l$  接近  $2a$  时, 沿用  $l = 2a$  的曲线进行设计也是可以的。

在设计谐振腔和贮存泡的尺寸和贮存泡的安放位置时必须考虑到激射器的起振条件, 通常需要谐振腔保持极高的  $Q$  值, 贮存泡要有尽可能大的填充因子, 本文的工作可以为腔和球形贮存泡尺寸的正确选择提供定量的依据。

本项工作过程中, 曾与傅济时同志进行过多次有益的讨论, 在此表示感谢!

### 参 考 文 献

- [ 1 ] 北大无线电系量子电子学教研室讲义, 量子电子学基础, 1979年。
- [ 2 ] D. Kleppner, H. M. Goldenberg and N. F. Ramsey, *Phys. Rev.*, **126**(1962), 603.
- [ 3 ] D. Kleppner, H. C. Berg, S. B. Crampton and N. F. Ramsey, *ibid.*, **138**(1965), 972.
- [ 4 ] 郭敦仁编, 数学物理方法, 人民教育出版社, 1978年。

## THE FILLING FACTOR OF SPHERICAL STORAGE BULB FOR THE HYDROGEN MASER

Shi Meiqi

(Department of Radio Electronics, Beijing University)

In this paper the general expression of the filling factor of spherical storage bulb for the hydrogen maser is derived. The filling factors for the cases where sizes of cavity and spherical storage bulb chosen arbitrarily were calculated and the relationship between the filling factor and the normalized radius of spherical storage bulb is presented.