高斯近似法下 LDPC 码 tanh 法则优化近似新方法

郑 贺① 胡捍英① 周华莹②
①(信息工程大学通信工程系 郑州 450002)
②(西南电子电信技术研究所 成都 610041)

摘 要 该文利用高斯近似法，提出一种基于最小均方误差(MMSE)准则的 tanh 法则优化近似新方法。提出反对称分布与同构广义对称分布新概念，推导出同构广义对称分布条件下若干重要结论，并给出 tanh 法则最优近似式的计算实现方法。加性高斯白噪声(AWGN)信道下，对一系列(3,6)规则低密度校验(LDPC)码的实验仿真显示，与传统 Hagenauer 近似法相比，该最优近似方法在不明显增加译码复杂度前提下，对 LDPC 码译码性能够带来一定改善。

关键词 LDPC 码，Tanh 法则，和积算法，高斯近似法，MMSE 准则

中图分类号：TN911.22 **文献标识码**：A **文章编号**：1009-5896(2006)10-1837-05

New Approach to Optimal Approximation of Tanh Rule for LDPC Codes under the Gaussian Approximation

Zheng He① HuHan-ying① Zhou Hua-ying②
①(*Dept. of Communications Engineering, Information Engineering University, Zhengzhou* 450002, *China*)
②(*Southwest Inst. of Electron & Telecom Techniques, Chengdu* 610041, *China*)

Abstract In this paper, a new approach is presented for optimizing the approximation of tanh rule based on Minimum Mean Square Error (MMSE) criterion under the Gaussian approximation. New concepts of anti-symmetric distribution and isomorphic generalized symmetric distribution are introduced. Under the isomorphic generalized symmetric distribution, several useful conclusions are drawn, by which a practical method for computing the optimal approximation is also presented. In comparison with the conventional approximation presented by Hagenauer, simulation results for several (3,6) regular Low-Density Parity-Check (LDPC) codes on the Additive White Gaussian Noise (AWGN) channel show that the approach can improve the decoding performance with a little increase in decoding complexity.

Key words LDPC codes, Tanh rule, Sum-product algorithm, Gaussian approximation, MMSE criterion

1 引言

Gallager提出的低密度校验(LDPC)码[1]是一类特殊的线性分组码，此类码的构造与译码可以由其稀疏校验矩阵对应的二分图(亦称为Tanner图[2])进行描述。在LDPC码的二分图上，存在两种不同类型的节点，称为变量节点与校验节点。二分图的每个变量节点相应于稀疏矩阵的每一列，每个校验节点相应于稀疏矩阵的每一行。根据二分图上变量节点与校验节点的度分布特点，通常可将LDPC码划分为[3,4]规则码与非规则码两种。规则LDPC码是指所有相同类型的节点均具有相同的度，即每个变量节点连接的校验节点个数皆相同，同时每个校验节点连接的变量节点个数也是相同的；非规则LDPC码则按照一定的分布规则来设定每个变量节点与检验节点的度。

Tanh法则[5-7]在LDPC码译码中有着广泛的应用。由于tanh法则含有复杂的指数、对数运算，为便于实现，在实际应用中需对该法则进行简化近似。tanh法则的最简近似方法是由Hagenauer给出的[5,8]，这里称其为Hagenauer近似法。众所周知，以tanh法则为核心运算的LDPC码迭代译码算法称为置信传播(Belief-Propagation，BP)[9]，或和积(Sum-Product，SP)[7]算法。相应地，以Hagenauer近似法为核心运算的译码算法则称为UMP BP-Based[10,11]，或Min-Sum算法。通过修正Hagenauer近似法，Chen和Fossorier提出了Normalized BP-Based[10,11]和Offset BP-Based [11]两类改进算法，并取得了较好的仿真性能。但是， tanh法则在某种准则下的最优化近似问题，目前研究的不多。

本文利用高斯近似法，提出一种基于最小均方误差(MMSE)准则的 tanh 法则最优近似方法，并给出相应的设计实现过程。加性高斯白噪声(AWGN)信道下，对(3,6)规则 LDPC 码进行实验仿真，并与标准 tanh 法则及其传统 Hagenauer 近似法进行译码性能比较。

2 LDPC 码的和积译码算法

LDPC码的译码是基于二分图进行的，对于基于图的LDPC码译码算法而言，tanh法则是其使用的基本数学工具之一。以LDPC码和积译码算法[7]为例，图上每个校验节点

2005-01-17 收到，2006-01-27 改回
国家自然科学基金(60472064)资助课题

在对来自所有相连变量节点的对数似然比(LLR)信息进行处理时，即遵循此法则[6,7]。具体地，考虑 (d_v, d_c) 规则LDPC码情况，其中 $d_v \ge 2$ 与 $d_c \ge 2$ 分别为变量节点与校验节点的度。与文献[7]中的符号使用一致，在不指定某个节点的情况下，记变量节点的输出消息为 v，校验节点的输出消息为 u。依据和积译码算法，变量节点的输出消息表示为

$$v = u_0 + \sum_{i=1}^{d_v-1} u_i \tag{1}$$

其中 u_i $(i=1,2,\cdots,d_v-1)$ 为除接收消息 v 的校验节点外，其余 d_v-1 个与该变量节点相连校验节点输入的LLR值；u_0 为该变量节点在信道输出端的LLR观测值。相应地，校验节点的输出消息，则满足如下tanh法则[7]：

$$\tanh\left(\frac{u}{2}\right) = \prod_{j=1}^{d_c-1} \tanh\left(\frac{v_j}{2}\right)$$

即等价于

$$u = 2\tanh^{-1}\left(\prod_{j=1}^{d_c-1} \tanh\left(\frac{v_j}{2}\right)\right) \tag{2}$$

其中，v_j $(j=1,2,\cdots,d_c-1)$ 为除接收消息 u 的变量节点外，其余 d_c-1 个与该校验节点相连变量节点输入的 LLR 值。这里需要声明的是，本文所提及的 tanh 法则均指其等价定义式，即文中给出的式(2)。

3 Tanh 法则的优化近似

由式(2)可见，tanh 法则中含有复杂的 $\tanh(\cdot)$ 及 $\tanh^{-1}(\cdot)$ 函数运算，本质上讲就是指数与对数运算，因此，在实际应用中需对该法则进行简化近似。本节即研究 Tanh 法则的最优化近似问题。由于式(2)右端可以写成符号与模之积，即

$$u = \left(\prod_{j=1}^{d_c-1} \mathrm{sgn}(v_j)\right) \cdot 2\tanh^{-1}\left(\prod_{j=1}^{d_c-1} \tanh\left(\frac{|v_j|}{2}\right)\right) \tag{3}$$

且式(3)的符号项无需近似，故tanh法则的近似问题实际上就是式(3)模的近似问题。一般地，tanh法则的Hagenauer近似式表示为[5,8]

$$u \approx \left(\prod_{j=1}^{d_c-1} \mathrm{sgn}(v_j)\right) \cdot \min_{j=1,2,\cdots,d_c-1} |v_j| \tag{4}$$

可见，校验节点输出近似消息的模为 $|v_1|, |v_2|, \cdots, |v_{d_c-1}|$ 中的最小值，即 $|u| \approx \min_{j=1,2,\cdots,d_c-1} |v_j|$。

事实上，该近似方法不是最优的，通常会带来一定的译码性能损失。这里提出一种基于 MMSE 准则的模最优近似方法。为表示方便，记 $|v|_{\min} = \min_{j=1,2,\cdots,d_c-1} |v_j|$，则一种实现简单的最优模近似式为 $|u| \approx \max\left\{(|v|_{\min} - \Delta_{\mathrm{opt}}), 0\right\}$ (该式与文献[11]中 Offset BP-Based 算法的校验节点计算式表示相同，但对于 Δ_{opt} 取值的确定方式本文与文献[11]则大不相同)。相应地，式(3)中 u 的最优近似式为

$$u \approx \left(\prod_{j=1}^{d_c-1} \mathrm{sgn}(v_j)\right) \cdot \max\left\{(|v|_{\min} - \Delta_{\mathrm{opt}}), 0\right\} \tag{5}$$

其中 Δ_{opt} 为 MMSE 准则下使目标误差函数 $E\left[\left(|u| - (|v|_{\min} - \Delta)\right)^2\right]$ 最小的 Δ 取值。容易证明，当 $\Delta_{\mathrm{opt}} = E\left[|v|_{\min}\right] - E[|u|]$ 时，该目标函数值最小。事实上，若 v_j ($j=1,2,\cdots,d_c-1$)为相互统计独立且具有相同概率分布的随机变量，则在不同分布条件下求得的 Δ_{opt} 值一般是不同的。以下着重讨论在高斯近似法[7]下，如何计算 Δ_{opt} 值。

在高斯近似法下，假定 $v_1, v_2, \cdots, v_{d_c-1}$ 为独立同分布的高斯随机变量。进一步，若其概率密度函数满足对称分布条件[3,7]，则只需用均值即可刻画其密度函数。

定义 1[7] 对于均值为 μ，方差为 σ^2 的高斯随机变量，若其概率密度函数 $f(x)$ 满足：$f(x) = e^x f(-x)$，即 $\sigma^2 = 2\mu$，则称该高斯变量服从对称分布。

相对于上述对称分布定义，本文提出关于反对称分布的概念，并将对称分布与反对称分布合称为广义对称分布。

定义 2 对于均值为 $\tilde{\mu}$，方差为 $\tilde{\sigma}^2$ 的高斯随机变量，若其概率密度函数 $\tilde{f}(x)$ 满足：$\tilde{f}(x) = e^{-x}\tilde{f}(-x)$，即 $\tilde{\sigma}^2 = -2\tilde{\mu}$，则称该高斯变量服从反对称分布。

类似地，反对称分布高斯随机变量的概率密度函数亦只需用均值即可描述。特别地，对于包含对称与反对称两种分布的广义对称分布而言，若定义 1 及定义 2 中的 μ 与 $\tilde{\mu}$ 满足条件：$\tilde{\mu} = -\mu$，则称该广义对称分布为关于 μ 的同构广义对称分布。在此条件下，对称分布与反对称分布高斯随机变量的概率密度函数可分别简化为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu}} e^{-(x-\mu)^2/(4\mu)}, \quad \tilde{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu}} e^{-(x+\mu)^2/(4\mu)}$$

为描述方便，引入函数 $Q(x) = \int_x^\infty q(t)\mathrm{d}t$，其中 $q(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$。此时，二者的概率密度函数可进一步表示为

$$f(x) = \frac{q\left((x-\mu)/\sqrt{2\mu}\right)}{\sqrt{2\mu}}, \quad \tilde{f}(x) = \frac{q\left((x+\mu)/\sqrt{2\mu}\right)}{\sqrt{2\mu}}$$

在二进制移相键控(BPSK)调制($\{0 \to +1, 1 \to -1\}$)AWGN信道下，记噪声方差为 σ_n^2，发送符号为 $c = \pm 1$，信道输出为 r。在先验等概条件下，符号 c 的后验 LLR 值可表示为

$$L(c\,|\,r) = \ln \frac{\Pr\{c=+1\,|\,r\}}{\Pr\{c=-1\,|\,r\}} = \frac{2}{\sigma_n^2} r$$

容易证明：在 $c=+1$ 条件下，高斯随机变量 $L(c\,|\,r)$ 服从均值为 $2/\sigma_n^2$ 的对称分布；在 $c=-1$ 条件下，$L(c\,|\,r)$ 服从均值为 $-2/\sigma_n^2$ 的反对称分布。因此，随机变量 $L(c\,|\,r)$ 服从关于 $2/\sigma_n^2$ 的同构广义对称分布。

定理 1 若 v_j ($j \ge 1$)为高斯随机变量，且满足关于 μ 的同构广义对称分布条件，即 $v_j \sim N(\mu, 2\mu)$ 或 $v_j \sim N(-\mu, 2\mu)$，则 $|v_j|$ 的概率密度函数为

$$g(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{1}{\sqrt{2\mu}}\left[q\left(\dfrac{x+\mu}{\sqrt{2\mu}}\right)+q\left(\dfrac{x-\mu}{\sqrt{2\mu}}\right)\right], & x>0\end{cases}$$

证明　根据概率分布函数的定义，有 $G(x)=\Pr\{|v_j|\le x\}$。若 $x\le 0$，则显然有 $G(x)=0$。因此，以下只需讨论 $x>0$ 情况。高斯对称分布条件下，$x>0$ 时，有

$$G(x)=\int_{-x}^{x}f(t)\mathrm{d}t=1-\left[Q\left(\frac{x+\mu}{\sqrt{2\mu}}\right)+Q\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2\mu}}\right)\right]$$

因此，$x\le 0$ 时，$|v_j|$ 的概率密度函数为 $g(x)=0$；$x>0$ 时，

$$g(x)=\frac{\mathrm{d}G(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\sqrt{2\mu}}\left[q\left(\frac{x+\mu}{\sqrt{2\mu}}\right)+q\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2\mu}}\right)\right]$$

类似地，在此同构广义对称分布条件下，对于反对称分布可以得到相同的结论。　　证毕

推论 1　若 v_j ($j\ge 1$)为服从关于 μ 的同构广义对称分布的高斯随机变量，则 $|v_j|$ 的数学期望为

$$E\left[|v_j|\right]=\mu\left(1+\frac{2}{\sqrt{\pi\mu}}e^{-\frac{\mu}{4}}-2Q\left(\sqrt{\frac{\mu}{2}}\right)\right)$$

证明　由 $E\left[|v_j|\right]=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot g(x)\mathrm{d}x$，并利用定理 1 的结论即可得证。　　证毕

定理2　若 $v_1,v_2,\cdots,v_{d_c-1}$ 为相互统计独立且具有相同关于 μ 的同构广义对称分布的高斯随机变量，则 $|v|_{\min}$ 的数学期望为

$$E\left[|v|_{\min}\right]=\frac{d_c-1}{\sqrt{2\mu}}\int_0^{\infty}x\cdot\left[Q\left(\frac{x+\mu}{\sqrt{2\mu}}\right)+Q\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2\mu}}\right)\right]^{d_c-2}\cdot\left[q\left(\frac{x+\mu}{\sqrt{2\mu}}\right)+q\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2\mu}}\right)\right]\mathrm{d}x$$

证明　利用分布函数的定义，可得 $|v|_{\min}=\min\limits_{j=1,2,\cdots,d_c-1}|v_j|$ 的分布函数为

$$\Pr\{|v|_{\min}\le x\}=1-\left(1-\Pr\{|v_1|\le x\}\right)^{d_c-1}$$

由定理 1 知，在关于 μ 的同构广义对称分布条件下，$x\le 0$ 时，$\Pr\{|v|_{\min}\le x\}=0$；　$x>0$ 时，可得

$$\Pr\{|v|_{\min}\le x\}=1-\left[Q\left(\frac{x+\mu}{\sqrt{2\mu}}\right)+Q\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2\mu}}\right)\right]^{d_c-1}$$

故 $|v|_{\min}$ 的概率密度函数为

$$h(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{d_c-1}{\sqrt{2\mu}}\left[Q\left(\dfrac{x+\mu}{\sqrt{2\mu}}\right)+Q\left(\dfrac{x-\mu}{\sqrt{2\mu}}\right)\right]^{d_c-2} & \\ \quad\cdot\left[q\left(\dfrac{x+\mu}{\sqrt{2\mu}}\right)+q\left(\dfrac{x-\mu}{\sqrt{2\mu}}\right)\right], & x>0\end{cases}$$

因此，由 $E\left[|v|_{\min}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot h(x)\mathrm{d}x$，结论显然得证。　　证毕

定理3　若 $v_1,v_2,\cdots,v_{d_c-1}$ 为相互统计独立且具有相同关于 μ 的同构广义对称分布的高斯随机变量，则式(3)中 $|u|$ 的数学期望为

$$E\left[|u|\right]=2\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\left[\frac{1}{\sqrt{2\mu}}\int_0^{\infty}\left(\tanh\left(\frac{x}{2}\right)\right)^{2k+1}\cdot\left[q\left(\frac{x+\mu}{\sqrt{2\mu}}\right)+q\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2\mu}}\right)\right]\mathrm{d}x\right]^{d_c-1}\bigg/(2k+1)\right\}$$

证明　当 $|z|<1$ 时，有

$$\ln(1+z)=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{z^{i+1}}{i+1},\quad \ln(1-z)=-\sum_{i=0}^{\infty}\frac{z^{i+1}}{i+1}$$

由 $\tanh^{-1}(z)$ ($z\in(-1,1)$)的定义式，可将其展成级数形式

$$\tanh^{-1}(z)=\frac{1}{2}\left[\ln(1+z)-\ln(1-z)\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{2k+1}。$$

故根据式(3)及上述级数展开式，可得

$$E\left[|u|\right]=2E\left[\tanh^{-1}\left(\prod_{j=1}^{d_c-1}\tanh\left(\frac{|v_j|}{2}\right)\right)\right]=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{E\left[\left(\prod_{j=1}^{d_c-1}\tanh\left(\frac{|v_j|}{2}\right)\right)^{2k+1}\right]}{2k+1}=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(E\left[\left(\tanh\left(\frac{|v_1|}{2}\right)\right)^{2k+1}\right]\right)^{d_c-1}}{2k+1}$$

再由定理 1，进一步可得

$$E\left[\left(\tanh\left(\frac{|v_1|}{2}\right)\right)^{2k+1}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\tanh\left(\frac{x}{2}\right)\right)^{2k+1}g(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\mu}}\int_0^{\infty}\left(\tanh\left(\frac{x}{2}\right)\right)^{2k+1}\left[q\left(\frac{x+\mu}{\sqrt{2\mu}}\right)+q\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2\mu}}\right)\right]\mathrm{d}x$$

综合上述结果，结论显然得证。　　证毕

显然，在高斯近似法下，Δ_{opt} 与同构广义对称分布的参数 μ 密切相关。如果已知 μ，则依据定理 2 与定理 3 的结论，就能够计算出相应的 Δ_{opt} 值，从而得到 MMSE 准则下最优的 tanh 法则近似表示式。在实际应用中，可以通过造表的方法获得一组 μ 与 Δ_{opt} 的对应数值，计算时查表即可。显然，这里如何准确地估计出 μ 值，成为一个非常关键的问题。关于这个问题，定理 1 和推论 1 给出了很好的解答。

在同构广义对称分布条件下，无论高斯随机变量服从对称分布还是反对称分布，其绝对值变量均服从定理 1 给出的同一分布。因此，推论 1 给出的期望值估计值 $\hat{m}_{|v|}$，可用 $\hat{m}_{|v|}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}|v_j|$ (n 为码长)来计算。得到估计值 $\hat{m}_{|v|}$ 以后，再根据推论 1，只要解方程

$$\hat{m}_{|v|}=\mu\left(1+\frac{2}{\sqrt{\pi\mu}}e^{-\frac{\mu}{4}}-2Q\left(\sqrt{\frac{\mu}{2}}\right)\right)$$

即可求出 μ 值。事实上，该方程是一个关于 μ 的超越方程，没有闭式解。同样，在实际应用中，可以构造一个 μ 与 $\hat{m}_{|v|}$

的数值对应表，查表计算即可。同时，还应注意到 $\lim\limits_{\mu\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{\pi\mu}}e^{-\mu/4}=0$，$\lim\limits_{\mu\to\infty}Q\left(\sqrt{\dfrac{\mu}{2}}\right)=0$。因此，当 μ 取值很大时，$\mu\approx\hat{m}_{|v|}$，这将有助于减小造表的复杂度。事实上，利用得到的数值对应表，还可以通过数据拟合或分段数据拟合的方法得出近似拟合多项式，并依据该多项式进行相应的数值计算。

4　实验仿真

基于以上讨论，假定迭代译码过程中所有变量节点消息均近似服从同构广义对称分布。在此前提下，利用提出的近似tanh(proposed approx. tanh)法则最优化设计方法，对AWGN信道下码率为 0.5，码长分别为 $n=34$，$n=1000$，$n=4000$ 及 $n=8000$ 的 $(3,6)$ 规则LDPC码进行译码性能仿真，并与标准tanh(standard tanh)法则及其Hagenauer近似法(hagenauer approx. tanh)进行性能比较。$n=34$ 与 $n=1000$ 的LDPC码稀疏校验矩阵构造使用了Wei提供的方法[12]，该方法适用于构造短码长LDPC码，以使获得的校验矩阵二分图具有较大的围长(Girth，即二分图中的最小环长)，本文将该方法与随机匹配法相结合，得到了二分图围长为6，码长分别为 $n=34$ 与 $n=1000$ 的 $(3,6)$ 规则LDPC码；$n=4000$ 与 $n=8000$ 的 $(3,6)$ 规则LDPC码稀疏校验矩阵，采用的是MacKay 在文献[9]中按类随机构造方法获得的矩阵。这里值得一提的是，文献[12]中找到的围长为6的 $(3,6)$ 规则LDPC码，其最小码长为 $n=38$，而 $n<38$ 的此类码在该文献中没有被发现。相比之下，本文在稀疏校验矩阵的构造过程中，找到了围长为 6 的 $n=34$ 及 $n=36$ 短码长 $(3,6)$ 规则LDPC码。

利用推论1，可以得到 μ 对 $\hat{m}_{|v|}$ 的关系曲线，如图1所示。在该图中，当 $0\le\hat{m}_{|v|}\le10$ 时(见图1中的放大曲线)，μ 与 $\hat{m}_{|v|}$ 之间是非线性关系，可以通过分段数据拟合或查表法来计算相应的 μ 值。本文采用后一种方法，根据该曲线构造出 $0\le\hat{m}_{|v|}\le10$，步长为 $\Delta\hat{m}_{|v|}=0.05$ 的 μ 与 $\hat{m}_{|v|}$ 数值对应表。当 $\hat{m}_{|v|}>10$ 时，μ 与 $\hat{m}_{|v|}$ 明显呈线性关系，故可用 $\mu\approx\hat{m}_{|v|}$ 来近似 μ 值。同时，由定理2及定理3，可得到 $E\left[|v|_{\min}\right]$，$E\left[|u|\right]$ 及 Δ_{opt} 对 μ 的关系曲线，如图2所示。当 $0\le\mu\le30$ 时，利用得到的 Δ_{opt} 对 μ 曲线(如图2中的放大曲线所示)，构造出步长为 $\Delta\mu=0.25$ 的数值对应表；为简化造表复杂度，根据图2，$\mu>30$ 时，取 $\Delta_{\text{opt}}\approx0.1$。

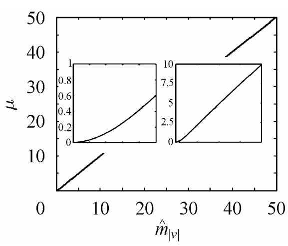

图1 参数 μ 对 $\hat{m}_{|v|}$ 曲线

Fig.1 Curves of μ vs. $\hat{m}_{|v|}$

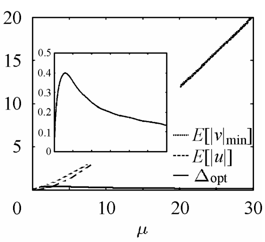

图2 $E\left[|v|_{\min}\right]$，$E\left[|u|\right]$ 及 Δ_{opt} 对 μ 曲线

Fig.2 Curves of $E\left[|v|_{\min}\right]$, $E\left[|u|\right]$ and Δ_{opt} vs. μ

基于LDPC码的迭代译码，并利用tanh及其近似法则，本文分别对AWGN信道下这几组 $(3,6)$ 规则LDPC码进行了实验仿真，最大迭代译码次数均设定为100次，仿真性能曲线如图3至图6所示。在迭代译码中，变量节点的输出消息用式(1)来计算，standard tanh、Hagenauer approx. tanh 以及 proposed approx. tanh 法则分别用式(3)，式(4)和式(5)来计算校验节点的输出消息。在迭代译码过程中，proposed approx. tanh 法则需对变量节点输出消息的绝对值均值进行估计并使用前面构造的两组数值对应表来查表计算相应的 Δ_{opt} 值。

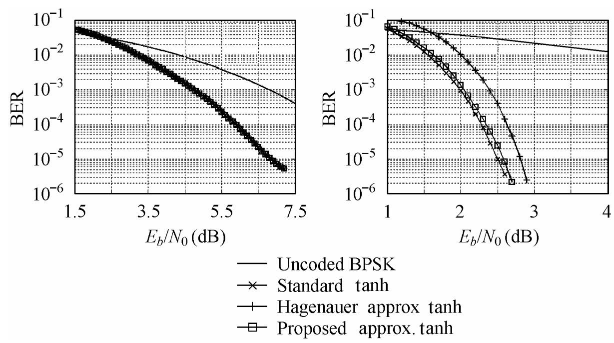

图3 n=34的(3, 6)规则LDPC码BER性能

Fig.3 BER performance of (3,6) regular LDPC code with length n=34

图4 n=1000的(3, 6)规则LDPC码BER性能

Fig.4 BER performance of (3,6) regular LDPC code with length n=1000

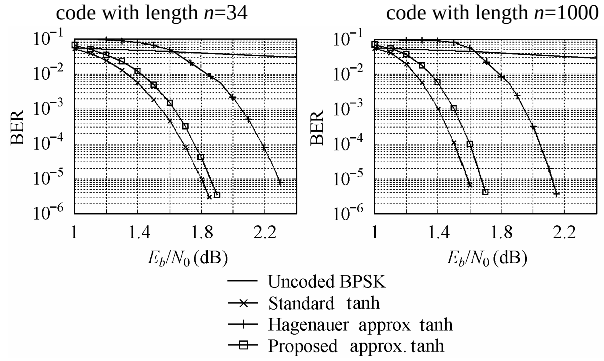

图5 n=4000的(3, 6)规则LDPC码BER性能

Fig.5 BER performance of (3,6) regular LDPC code with length n=4000

图6 n=8000的(3, 6)规则LDPC码BER性能

Fig.6 BER performance of (3,6) regular LDPC code with length n=8000

由仿真结果可见，就误比特率(BER)性能而言，proposed approx. tanh 法则优于 Hagenauer approx. tanh 法则，而次于 standard tanh 法则。具体地，当LDPC码的码长较短时(如 $n=34$)，由于 standard tanh 法则与 Hagenauer approx. tanh 法则的译码性能基本接近(如图3所示)，故 proposed approx. tanh 法则在译码性能上带来的改善不甚明显；当码长较长时，如图4至图6所示，译码性能的改善就表现得很明显。例如，译码 BER $=10^{-4}$ 至 10^{-6} 时，对于码率为 0.5，码长为 $n=1000$ 的 $(3,6)$ 规则LDPC码，proposed approx. tanh 法则

所需 E_b/N_0 较 Hagenauer approx. tanh 法则改善了约 0.2dB；$n=4000$ 时，E_b/N_0 改善了约 0.4dB；$n=8000$ 时，E_b/N_0 改善了约 0.45dB 。可见，随着码长的增加，与 Hagenauer Approx. Tanh 法则相比，proposed approx. tanh 法则在译码性能上的改善增益就越大。而且，从计算复杂度上讲，proposed approx. tanh 法则较之仅多了计算绝对值均值，两次查表及与 Δ_{opt} 做实数减运算。

5　结束语

本文在高斯近似法下，提出一种基于 MMSE 准则的 tanh 法则优化近似新方法。利用同构广义对称分布条件下推导出的若干重要结论，给出 tanh 法则最优近似式的计算实现方法。AWGN 信道下的实验仿真显示，与传统 Hagenauer 近似法相比，该最优近似方法在不明显增加译码复杂度前提下，对 LDPC 码译码性能带来了一定改善，而且码长越长，性能改善增益越大。

参 考 文 献

[1] Gallager R G. Low-Density Parity-Check Codes. Cambridge, MA: MIT Press, 1963, Chapter 1.

[2] Tanner R M. A recursive approach to low complexity codes. *IEEE Trans. on Inform. Theory*, 1981, IT-27(5): 533−547.

[3] Richardson T J, Shokrollahi M A, Urbanke R L. Design of capacity-approaching irregular low-density parity-check codes. *IEEE Trans. on Inform. Theory*, 2001, 47(2): 619−637.

[4] Luby M G, Mitzenmacher M, Shokrollahi M A, Spielman D A. Efficient erasure correcting codes. *IEEE Trans. on Inform. Theory*, 2001, 47(2): 569−584.

[5] Hagenauer J, Offer E, Papke L. Iterative decoding of binary block and convolutional codes. *IEEE Trans. on Inform. Theory*, 1996, 42(2): 429−445.

[6] Ha J, Kim J, McLaughlin S W. Rate-compatible puncturing of low-density parity-check codes. *IEEE Trans. on Inform. Theory*, 2004, 50(11): 2824−2836.

[7] Chung S Y, Richardson T J, Urbanke R L. Analysis of sum-product decoding of low-density parity-check codes using a Gaussian approximation. *IEEE Trans. on Inform. Theory*, 2001, 47(2): 657−670.

[8] Hagenauer J. Source-controlled channel decoding. *IEEE Trans. on Commun.*, 1995, 43(9): 2449−2457.

[9] MacKay D J C. Good error-correcting codes based on very sparse matrices. *IEEE Trans. on Inform. Theory*, 1999, 45(2): 399−431.

[10] Chen J, Fossorier M. Near optimum universal belief propagation based decoding of low-density parity check codes. *IEEE Trans. on Commun*., 2002, 50(3): 406−414.

[11] Chen J, Fossorier M. Density evolution for two improved BP-based decoding algorithms of LDPC codes. *IEEE Commun. Letter*s, 2002, 6(5): 208−210.

[12] Wei L. Several properties of short LDPC codes. *IEEE Trans. on Commun*., 2004, 52(5): 721−727.

郑　贺：　男，1979 年生，博士生，研究方向为信道编译码及调制/解调技术.

胡捍英：　男，1961 年生，教授，博士生导师，长期从事信号处理与通信方面的研究与教学工作.

周华莹：　女，1980 年生，助理工程师，主要从事移动通信方面的研究工作.