第 13 卷 第 6 期　　电子科学学刊　　Vol. 13, No. 6
1991 年 11 月　　JOURNAL OF ELECTRONICS　　Nov., 1991

广义模对称定理的推广

林守远
(南京电子技术研究所，南京)

摘要　本文将无耗互易网络的广义模对称定理推广到无耗非互易网络，并给出应用实例.

关键词　微波网络；广义模对称定理；互易网络；非互易网络

对无耗二端口网络，不论是否互易，其散射参数 S_{11} 和 S_{22} 的模相等，S_{12} 和 S_{21} 的模相等[1]，即

$$|S_{11}| = |S_{22}|, \quad |S_{12}| = |S_{21}| \tag{1}$$

文献 [2] 中提出了无耗互易网络的广义模对称定理：若把任意端口的无耗互易网络的散射矩阵写成 4 个分块矩阵，则有

$$|\det \boldsymbol{S}_{\mathrm{I\,I}}| = |\det \boldsymbol{S}_{\mathrm{II\,II}}| \tag{2}$$

式中 $\boldsymbol{S}_{\mathrm{II}}$ 和 $\boldsymbol{S}_{\mathrm{IIII}}$ 均为方阵(其阶数不一定相同，下同). 广义模对称定理实际上可推广到无耗非互易网络，现证明如下.

非互易网络的散射矩阵的分块矩阵为

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{S}_{\mathrm{I\,I}} & \boldsymbol{S}_{\mathrm{I\,II}} \\ \boldsymbol{S}_{\mathrm{II\,I}} & \boldsymbol{S}_{\mathrm{II\,II}} \end{bmatrix} \tag{3}$$

网络无耗，$\boldsymbol{S}$ 满足幺正性条件，即

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{S}_{\mathrm{I\,I}}\boldsymbol{S}^{\dagger}_{\mathrm{I\,I}} + \boldsymbol{S}_{\mathrm{I\,II}}\boldsymbol{S}^{\dagger}_{\mathrm{I\,II}} &= \mathbf{1} \\ \boldsymbol{S}_{\mathrm{II\,I}}\boldsymbol{S}^{\dagger}_{\mathrm{II\,I}} + \boldsymbol{S}_{\mathrm{II\,II}}\boldsymbol{S}^{\dagger}_{\mathrm{II\,II}} &= \mathbf{1} \\ \boldsymbol{S}_{\mathrm{I\,I}}\boldsymbol{S}^{\dagger}_{\mathrm{II\,I}} + \boldsymbol{S}_{\mathrm{I\,II}}\boldsymbol{S}^{\dagger}_{\mathrm{II\,II}} &= \mathbf{0} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

式中黑体字均为矩阵，有关矩阵的阶数是互相匹配的(下同). 对无耗网络还满足

$$|\det \boldsymbol{S}| = 1 \tag{5}$$

令

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{S}_{\mathrm{I\,I}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \tag{6}$$

则

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{S}^{\dagger} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{S}_{\mathrm{I\,I}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{S}^{\dagger}_{\mathrm{I\,I}} & \boldsymbol{S}^{\dagger}_{\mathrm{II\,I}} \\ \boldsymbol{S}^{\dagger}_{\mathrm{I\,II}} & \boldsymbol{S}^{\dagger}_{\mathrm{II\,II}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{S}_{\mathrm{I\,I}}\boldsymbol{S}^{\dagger}_{\mathrm{I\,I}} & \boldsymbol{S}_{\mathrm{I\,I}}\boldsymbol{S}^{\dagger}_{\mathrm{II\,I}} \\ \boldsymbol{S}^{\dagger}_{\mathrm{I\,II}} & \boldsymbol{S}^{\dagger}_{\mathrm{II\,II}} \end{bmatrix} \tag{7}$$

1990 年 2 月 27 日收到，1991 年 5 月 21 日修改定稿.

(7) 式左端的行列式的模为

$$|\det \boldsymbol{U}\boldsymbol{S}^{\dagger}| = |\det \boldsymbol{U}|\,|\det \boldsymbol{S}^{\dagger}| = |\det \boldsymbol{S}_{\mathrm{I\,I}}|\,|\det \boldsymbol{S}| = |\det \boldsymbol{S}_{\mathrm{I\,I}}| \tag{8}$$

(7) 式右端的行列式的模则为

$$\begin{aligned}
&\left|\det\begin{bmatrix} \boldsymbol{S}_{\mathrm{I\,I}}\boldsymbol{S}^{\dagger}_{\mathrm{I\,I}} & \boldsymbol{S}_{\mathrm{I\,I}}\boldsymbol{S}^{\dagger}_{\mathrm{II\,I}} \\ \boldsymbol{S}^{\dagger}_{\mathrm{I\,II}} & \boldsymbol{S}^{\dagger}_{\mathrm{II\,II}} \end{bmatrix}\right| \\
&= \left|\det\begin{bmatrix} \boldsymbol{S}_{\mathrm{I\,I}}\boldsymbol{S}^{\dagger}_{\mathrm{I\,I}} + \boldsymbol{S}_{\mathrm{I\,II}}\boldsymbol{S}^{\dagger}_{\mathrm{I\,II}} & \boldsymbol{S}_{\mathrm{I\,I}}\boldsymbol{S}^{\dagger}_{\mathrm{II\,I}} + \boldsymbol{S}_{\mathrm{I\,II}}\boldsymbol{S}^{\dagger}_{\mathrm{II\,II}} \\ \boldsymbol{S}^{\dagger}_{\mathrm{I\,II}} & \boldsymbol{S}^{\dagger}_{\mathrm{II\,II}} \end{bmatrix}\right| \\
&= \left|\det\begin{bmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{S}^{\dagger}_{\mathrm{I\,II}} & \boldsymbol{S}^{\dagger}_{\mathrm{II\,II}} \end{bmatrix}\right| = |\det \boldsymbol{S}^{\dagger}_{\mathrm{II\,II}}| = |\det \boldsymbol{S}_{\mathrm{II\,II}}|
\end{aligned} \tag{9}$$

(7) 式两端的行列式的模应相等，因此 (2) 式成立．总之，对任意端口无耗网络，不论是否互易，均满足广义模对称定理．

文献 [2] 中已给出广义模对称定理用于无耗互易网络的实例．这里再给出该定理用于无耗非互易网络的实例．

例 1 若无耗非互易三端口网络各端口均匹配，即 $S_{11} = S_{22} = S_{33} = 0$，由 (2) 式和 (5) 式可得

$$S_{12}S_{21} = S_{23}S_{32} = S_{31}S_{13} = 0 \tag{10}$$

和

$$S_{12}S_{23}S_{31} + S_{21}S_{32}S_{13} = 1 \tag{11}$$

则有

$$\left.\begin{aligned} S_{12} = S_{23} = S_{31} = 1 \\ S_{21} = S_{32} = S_{13} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

或

$$\left.\begin{aligned} S_{12} = S_{23} = S_{31} = 0 \\ S_{21} = S_{32} = S_{13} = 1 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

(12) 和 (13) 式对应于正旋或反旋的理想环行器．

例 2 对一般无耗非互易三端口网络，由 (2) 式可得

$$\left.\begin{aligned} |S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21}| = |S_{33}| \\ |S_{11}S_{33} - S_{13}S_{31}| = |S_{22}| \\ |S_{22}S_{33} - S_{23}S_{32}| = |S_{11}| \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

若只有一个端口匹配，例如 $S_{11} = 0$，则由 (14) 式可知，其余的 S_{ij} 均不为零，又假定网络是正旋环行器，则由 (14) 式可导得[1]

$$\left.\begin{aligned} |S_{12}| > |S_{33}| \qquad & |S_{21}| < \sqrt{1 - |S_{22}|^2 - |S_{22}S_{33}|^2} \\ |S_{23}| > |S_{22}S_{33}| \qquad & |S_{32}| < \sqrt{1 - |S_{22}|^2 - |S_{33}|^2} \\ |S_{31}| > |S_{22}| \qquad & |S_{13}| < \sqrt{1 - |S_{33}|^2 - |S_{22}S_{33}|^2} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

由 (15) 式可见，当端口 1 匹配时，端口 2 与 3 间的隔离较好，而环行损耗较大．如果假定网络是反旋环行器，也可得到类似结论．

此外，如使 (3) 式中的 $\boldsymbol{S}_{\mathrm{I\,II}}$ 和 $\boldsymbol{S}_{\mathrm{II\,I}}$ 均为方阵，其阶数也不一定相同(此时 $\boldsymbol{S}_{\mathrm{I\,I}}$ 和 $\boldsymbol{S}_{\mathrm{II\,II}}$

不一定是方阵)．令

$$V=\begin{bmatrix}0 & S_{\mathrm{I\,II}}\\ 1 & 0\end{bmatrix} \tag{16}$$

进行类似(7)式至(9)式的推导，可得

$$|\det S_{\mathrm{I\,II}}|=|\det S_{\mathrm{II\,I}}|$$

(2)式和(17)式与(1)式中的两个等式相对应，(17)式也应看做广义模对称定理的一个组成部份．

应用广义模对称定理，除能较简洁地分析无耗网络外，对综合所得的无耗网络，如有错误，也能较快地检查出来．

参　考　文　献

[1] 林守远，微波线性无源网络，科学出版社，1987年．
[2] 梁昌洪、邱长兴，无耗网络的几个定理，电子学报，19(1991)3，101—102，109．

EXTENSION OF THE GENERALIZED MAGNITUDE-SYMMETRY THEOREM

Lin Shouyuan

(Nanjing Research Institute of Electronic Technology, Nanjing)

Abstract　The generalized magnitude-symmetry theorem of lossless reciprocal network is extended to lossless non-reciprocal network. Two illustrations for application of the theorem are given.

Key words　Microwave network; Generalized magnitude-symmetry; reciprocal network; non-reciprocal network