

一种周期螺栓交织器的设计

刘文明 朱光喜

(华中科技大学电子与信息工程系 武汉 430074)

摘要 该文分析了对 Turbo 编码器性能影响的因素,在螺栓交织器的基础上提出了一种周期螺栓交织器,该交织器能使得可分序列变为不可分序列,增加了编码输出序列的重量。仿真结果表明,该交织器具有较优越的性能。

关键词 Turbo 码, 螺栓交织器, 本原多项式, 可分序列

中图分类号: TN911.22

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2006)11-2124-03

Design of Period Bolt Interleaver for Turbo Code

Liu Wen-ming Zhu Guang-xi

(Dept. of Electronics and Information Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract A new design method of period bolt interleaver based on bolt interleaver is proposed by analyzing the factors influencing the performance. This interleaver can greatly make divisible sequence be indivisible sequence and improve the weight of the output of Turbo coder. It is proved an effective method by simulation.

Key words Turbo code, Bolt interleaver, Primitive polynomial, Divisible sequence

1 引言

1993年,法国的Berrou等人提出了一种新型的纠错码——Turbo码^[1],它采用并行级联的方法实现编码,软输入软输出(Soft input Soft output)的迭代译码方法实现译码,其性能逼近Shannon限。仿真结果表明Turbo码在低信噪比下,仍能保持很好的性能,因而得到了广泛的关注与研究。

交织器对Turbo码的性能有着巨大的影响^[2,3],交织器的结构影响着Turbo码的码字重量分布,一个好的交织器能够减少低码重码字的数量,即使得码字重量谱“细化”,在以往的交织器设计中,码字重量为2的输入信息序列被认为对低码重码字的分布有较大的影响,所以交织器的设计主要考虑如何打乱重量为2的输入序列,以避免低码重码字的产生。在文献[4]中,作者设计了一种交织器,对这一问题进行了优化,但是仿真结果表明,这种交织器并不能使得Turbo码的性能有明显的改善。因此,仅考虑如何打乱重量为2的输入序列,对于Turbo码交织器的设计而言,仍是远远不够的。文献[5]提出一种基于周期性设计的螺栓交织器,能有效地使输入码重为2,4等低码重的码字序列,交织后得到码重较大的码字,提高了系统的性能。但该方法不能使可分序列变为不可分序列,对于一些低码重的可分序列,交织后还是可分序列。我们知道,由于成员编码器为迭代系统卷积码(RSC),编码多项式为反馈多项式,不可分序列产生无限的输出,相当于无限冲击响应,增加了码字重量。因此,改变输入序列的可分性,对于提高系统的性能有着重要的意义。本文针对

文献[5]中的缺点,根据反馈多项式的周期性,提出了一种在螺栓交织的基础上进行周期内交织去除可分序列,增加低码重序列的输出码字重量的交织器设计方法。

2 Turbo 码的编码结构

Turbo 码编码器由两个相同(可以不同)的迭代系统卷积码(Recursive Systematic Convolution Codes)编码器构成。图1中RSC1, RSC2 编码器的编码效率为1/2,信息数据在进入RSC2之前,先经过交织器进行交织,编码后删除一定量的校验比特,从而提高编码效率。编码器RSC1, RSC2 都有r级寄存器,传递函数为 $G(D) = [1, F(D)/B(D)]$,其中 $F(D)$ 和 $B(D)$ 分别为前馈和反馈多项式。

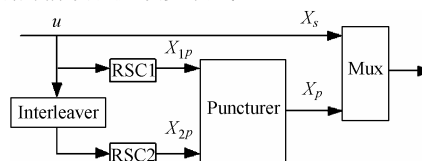


图1 编码器结构图

Fig.1 Construction of Turbo codes

3 交织器设计的数学模型和优化准则

3.1 交织器设计的理论分析

码字重量为2-6的低码重序列在 $10^{-6} - 10^{-1}$ 的误码范围内对性能有着决定性的影响^[3]。因此,本交织器主要针对系统性能影响较大的这些码字进行处理,使低码字重量的输入序列经交织后编码输出的码重较大。

一个长为N的信息序列,多项式表示形式为 $S = \sum_{i=0}^{N-1} s_i D^i$ 。为了分析的方便,我们定义如下概念。

定义1 序列S的扩展 $sp(S) = \max(i|s_i = 1) - \min(i|s_i = 1)$ 。

2005-03-09 收到, 2005-12-12 改回

国家 863 计划项目(2003AA12331005)和国家自然科学基金重大项目(60496315)资助课题

定义 2 在 $GF(2)$ 中, 若 $S(D) \equiv 0 \pmod{B(D)}$, 则 $S(D)$ 为可分序列。

定义 3 RSC 编码器的反馈多项式的循环周期为 L , 其校验密度 P_d 为 RSC 的反馈多项式的一个循环周期内的 1 的个数与 L 的比值。

若 RSC 的反馈多项式为本原多项式, 码字重量 2 的输入多项式有如下形式 $S(D) = (1 + D^m)D^s$, $s \geq 0$, 则产生的校验比特中 1 的个数为 $\omega_p = P_d Lu + 2$ 。

定义 4 序列 S 的延时 $\text{del}(S) = \min(i | s_i = 1)$ 。

定义 5 序列 S 输入 RSC 编码器得到码字的重量 $\omega(S)$ 近似为

$$\omega(S) = \begin{cases} (N - \text{del}(S))P_p P_d + \omega_H(S), & B(D) \nmid S(D) \\ \text{sp}(S)P_p P_d + \omega_H(S), & B(D) \mid S(D) \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\omega_H(S)$ 为 S 的汉明重量, $B(D)$ 为 RSC 的反馈多项式, P_p 为校验比特的删除比率, P_d 为 RSC 的校验密度。

由于反馈多项式是无限冲击响应, 式(1)可以看出, 码字重量较小的输入序列产生码重较小的校验输出有两种情况:

- 类型 I 多项式扩展较小的可分序列;
- 类型 II 多项式延时较大的不可分序列(扩展较小)。

交织器必须使这些“坏”的输入序列变为“好”的输入序列。根据前面的分析, Turbo 码交织器设计遵循以下原则: 对于类型 I 的序列, 通过交织使得第 2 个编码器的输入序列不是可分序列, 并使其扩展变大; 对于类型 II 的序列, 使其扩展变大, 延时变小。

我们按照以下步骤进行设计: 首先在整个编码长度内, 利用编码器的周期性, 进行螺栓交织。可以使得序列扩展变大, 但不能改变序列的可分性。然后在反馈周期内进行周期内的交织, 改变序列的可分性, 使得可分序列变为不可分序列。

因此, RSC 编码器的脉冲响应周期 L 是一个很重要的参数, 在设计交织器的过程中, 要首先确定 L 的值。例如, RSC 的反馈多项式 $B(D) = 1 + D + D^3$, 为本原多项式。所以, RSC 传输函数的脉冲响应周期 $L = 7$ 。

3.2 螺栓交织器的设计模型

输入序列 $s(D)$ 根据 RSC 编码器的周期 L 可以用以下形式表示:

$$s(D) = \sum_{k=0}^{L-1} D^k s^{(k)}(D^L) \quad (2)$$

式(2)中, $D^k s^{(k)}(D^L)$ 表示所有的满足 $i - k \equiv 0 \pmod{L}$ 的 s_i , 其具体表达式如下:

$$s^{(k)}(D) = \sum_{j=0}^{N-1} s_{j,k} D^j, \quad s_{j,k} \text{ 为 } s(D) \text{ 中 } D^{j+k} \text{ 的系数}$$

$s^{(k)}(D^L)$ 为 $s(D)$ 的第 k 个同余元素, 简称为 $s^{(k)}(D)$, 当 $s(D)$ 仅含有一个同余元素时, 我们称其为同余序列。

下面对同余序列进行螺栓交织器的设计, 为了将扩展较小的同余序列交织成扩展较大的同余序列, 我们需要设计旋转矢量。同余序列 $s^{(k)}(D)$ 的长度 $N = R \times M$, ($R > M$), 交

织器通过一组 M 维的旋转矢量 $\mathbf{h} = [h_0, h_1, \dots, h_{M-1}]$ 来定义交织器。序列 $z(D)$ 可以表示为:

$$z(D) = \sum_{K=0}^{M-1} D^K z^{(K)}(D^M), \quad z^{(K)}(D) \text{ 的阶数为 } R-1, \text{ 交织}$$

$$\text{后, } z^*(D) = \sum_{K=0}^{M-1} D^{K-h_K M} z^{(K)}(D^M) \pmod{D^{RM} - 1}.$$

为了更好地说明交织器的结构, 我们通过一个例子来说明。 $R = 7$, $M = 5$, $N = R \times M = 35$, 给定的 M 维交织矢量为 $\mathbf{h} = [0 \ 2 \ 5 \ 1 \ 3]$, \mathbf{Z} 及交织后的 \mathbf{Z}^* 如下面所示:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \\ 25 & 26 & 27 & 28 & 29 \\ 30 & 31 & 32 & 33 & 34 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}^* = \begin{bmatrix} 0 & 26 & 12 & 33 & 24 \\ 5 & 31 & 17 & 3 & 29 \\ 10 & 1 & 22 & 8 & 34 \\ 15 & 6 & 27 & 13 & 4 \\ 20 & 11 & 32 & 18 & 9 \\ 25 & 16 & 2 & 23 & 14 \\ 30 & 21 & 7 & 28 & 19 \end{bmatrix}$$

恰当地选择 \mathbf{h} , 可以使得 $\omega = 2$, $\omega = 4$ 等码字重量较小、扩展较小的序列得到很好的分离, 增加其扩展。对于输入序列 S , 最多会有 L 组同余序列, 需要选择 L 个不同的 \mathbf{h} 来分别置换这些同余序列。在此, 我们引入二组 L 维矢量 \mathbf{d} 以及 \mathbf{e} , $h_k = d_k h + e_k$, 其中 d_k 与 R 互质。

采用线性方法得到 L 个不同的 \mathbf{h} , 适当选择 \mathbf{d} , \mathbf{e} 可以使得同余序列在相同位置上元素的最小距离取得最大。 L 个同余序列在相同位置上的元素经交织后相隔变大, 从而增加序列的扩展。

3.3 周期交织器的设计模型

可分序列经过螺栓交织后还是可分序列, 下面进一步讨论周期内的交织方式, 使得可分序列变为不可分序列, 增加其编码输出码字重量。

将螺栓交织后得到的序列按照顺序分成长度为 L 的小的分块, 然后在每个分块内进行周期交织。接下来将讨论在 RSC 的一个脉冲响应周期 L 内, 如何进行周期内的交织。

为了消除周期内的可分序列, 分析信息多项式 S 整除反馈多项式 $B(D)$ 的几种情况, 以确定周期内的交织方式。输入信息序列的长度等于周期 $L = 7$, 其输入重量 ω 在 1 到 7 之间变化, 在周期长度 L 内有下面的定理成立, 特别说明, 我们在 $GF(2)$ 内讨论^[6]。

定理 1 在 $GF(2)$ 中, 如果一个重量为 u 的序列为 $B(D)$ 的可分序列, 则对其各位取反得到的序列 \bar{u} 仍为可分序列。

推论 如果一个重量为 u 的序列为 $B(D)$ 的不可分序列, 则对其各位取反得到的序列 \bar{u} 也为不可分序列。

定理 2 如果一个交织器能够将重量为 u 的可分序列交织为不可分序列, 那么该交织器能够避免重量为 $L - u$ 的信息序列在交织前后同时为可分序列。

根据以上定理, 在长度 L 内, 讨论码字重量为 1, 2, 3, 4, 5, 6 的序列:

(1) $\omega = 1$ 对于反馈卷积码, 输入序列重量为 1, 则 $S -$

定不被 $B(D)$ 整除。

(2) $\omega=2$ 设 $S(D)=D^m+D^n=D^n(D^{m-n}+1)$, $m>n$, 注意到 $m-n<L$, 由于 $B(D)$ 为本原多项式, 所以 $m-n<L$ 时, $(D^{m-n}+1)$ 不被 $B(D)$ 整除。因此当输入序列重量为 2 时, 不被 $B(D)$ 整除。

(3) $\omega=3$ 当 $S(D)$ 为 $B(D)$ 或 $B(D)$ 的移位时, $S(D)$ 才可能被 $B(D)$ 整除, 当把 $S(D)$ 交织为不等于 $B(D)$ 或 $B(D)$ 的移位时, 可以得到不可分序列。

(4) $\omega=4$ 因此对于 $\omega=4$ 的可分序列, 采用(4)中的交织器能得到不可分序列。

(5) $\omega=5, \omega=6$ 由定理 1, 2 可知, 不存在可分序列。

综合上述分析, 对于 RSC 寄存器长度为 3 的 Turbo 码, 如果一个交织器可以使得重量为 3, 在交织前后均可被 RSC 反馈多项式整除的信息序列个数取得最小值, 那么这样的交织器就是所要寻找的最优周期交织器。例如, 对于(13,17)RSC 编码器所构成的 Turbo 码, {4, 1, 5, 6, 0, 2, 3} 就是一个最优周期交织器。只有全“1”序列在交织前后才同时是可分序列, 它确保了在 RSC 一个脉冲响应周期 L 内, 重量为 $1, 2, \dots, L-1$ 的信息多项式在交织前后不能同时被整除。因此, 周期内进行交织使得周期内可分序列变为不可分序列, 下面讨论在整个分组长度范围内, 周期内的交织所带来的好处。

3.4 交织器的分析

下面讨论周期交织对码字重量较小的 2 类“坏”信息序列的影响, 本文主要针对扩展较小(一般 $sp(S)<2L$), 重量为 2-6 的码字序列进行分析与讨论。显然, 螺栓交织使得序列的扩展增加、时延减小, 周期交织使得可分序列变为不可分序列。下面进行具体分析。

(1) 形如 $S(D)=(1+D^{mL}+\dots+D^{nL})D^s$ 形式 对于 $S(D)=(1+D^{mL}+\dots+D^{nL})D^s$ 形式的可分序列, 只有码字重量为 2, 4, 6 的序列为可分序列。周期交织不能改变其可分性, 但螺栓交织使得其扩展增大, 从而使得其编码码字重量增大。此外, 在实际系统中, 出现该种情况的可能较小, 经过周期螺栓交织器后, 其对系统性能的影响可以忽略不计。

(2) 形如 $S(D)\neq(1+D^{mL}+\dots+D^{nL})D^s$ 的形式 显然, 通过上面的分析, 经过周期交织可使得序列变为不可分序列。

通过上面的分析可以看到, 本交织器与螺栓交织器相比在周期内进行交织能使得重量为 3, 4, 5, 6 的可分序列变为不可分序列。因此, 与螺栓交织相比, 本交织器可以有效去除可分序列, 增大编码码字重量, 提高系统的纠错性能。

4 仿真

根据以上方法, 设计了 $r=3$, $(1, 1+D+D^2+D^3/1+D+D^3)$ 的 Turbo 码编码器, 选取分组长度 $N=952$ 的交织器进行仿真, 选取参数为: $R=17$, $M=8$, $L=7$, $\mathbf{h}=[0, 1, 4, 9, 5, 2, 7, 11]$, $\mathbf{d}=[1, 7, 10, 2, 15, 12, 16]$ 以及 $\mathbf{e}=[0, 13, 58, 116, 76, 6, 48]$ 。迭代次数为 5, 采用加性高斯白噪声信道,

BPSK 调制方式, MAP 迭代译码算法, 编码效率为 1/3。本文分别测试了 4 种交织方式的误码率性能, 其仿真结果如图 2 所示。可以看到: 与其它几种方法相比, 本文提出的交织方法具有较优的性能, 在整个统计范围内, 本文提出的交织方法都优于螺栓交织器, 在 10^{-5} 误码率时, 与螺栓交织器以及随机交织器相比都有 0.2dB 的增益, 与块交织器相比有 0.4dB 的增益, 具有较大的性能优势; 在实现上, 本文提出的交织方式是确定性交织器, 只需要存储几个参数就能即时生成交织方式, 节省了存储空间, 具有实现简单的优点, 因此是一种较好的交织器。

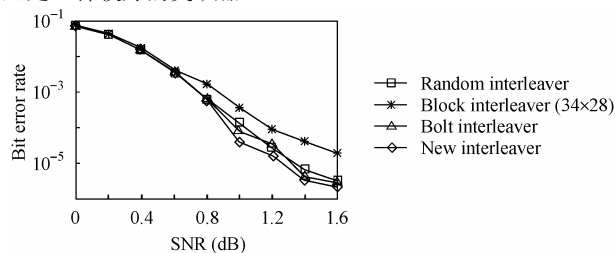


图2 分组长度 $N=952$ 高斯信道下各种交织器的性能
Fig.2 BER performance of interleavers for Turbo codes in AWGN channel with block length $N=952$

5 结束语

由上面的论述可以知道, 基于反馈多项式的周期性和交织距离的统计特性以及序列可整除性的交织器的设计方法, 是一种易于实现, 性能优越的方法, 明显提高了 Turbo 码的纠错性能。在现代通信系统中, 尤其是对误码率性能要求较高的数据应用系统, 是具有重要意义的。

参考文献

- [1] Berrou C, Thitimajshima P. Near Shannon limit error correcting coding and decoding: Turbo codes [A]. in Proc. ICC'93[C]. Geneva, Switzerland: ICC, 1993: 1064-1070.
- [2] Benedetto S, Montorsi G. Unveiling Turbo codes: Some results on parallel concatenated coding schemes. *IEEE Trans. on Information Theory*, 1996, 42(2): 409-428.
- [3] Benedetto S, Montorsi G. Design of parallel concatenated convolutional codes. *IEEE Trans. on Communication*, 1996, 44(5): 591-600.
- [4] Khandani A. Design of turbo interleaver using Hungarian method. *IEE Electronics Letters*, 1998, 34(1): 63-65.
- [5] Bars P L, Dantec C L, Piret P. Bolt interleavers for Turbo codes. *IEEE Trans. on Information Theory*, 2003, 49(2): 391-400.
- [6] Qi F, Wang M Z, Sheikh A U H, Shao D R. Class of Turbo code interleavers based on divisibility. *IEE Electronics Letters*, 2000, 36(1): 46-48.

刘文明: 男, 1977年生, 博士生, 目前研究兴趣主要在 Turbo 码、LDPC 码等方面。

朱光喜: 男, 1945年生, 教授, 博士生导师, 主要从事无线通信系统和多媒体信息处理的科研与教学。