

基于小波的广义时频分布及其与Cohen类的关系

王李军 熊刚 赵惠昌 张淑宁
(南京理工大学电光学院抗干扰实验站 南京 210094)

摘要: STFT, WT, WVD 和 Cohen 类是目前信号分析和处理的有力工具。本文用 WT 的二次型时频形式分析了线性时频特性, 研究了尺度图和变化窗谱图与 Cohen 类之间的关系; 将尺度图纳入到 Cohen 类的框架, 从而使 WT 广义化为时频域、时延频偏域的双线性时频分布以及谱相关域的二维频率分布; 定义了尺度图、小波模糊函数(WAF)和小波谱相关函数(WSCF); 分析了它们的物理意义。推导并仿真了单频、双频和高斯白噪声的 WSCF, 分析了各自的特性。最后通过引入一种离散小波变换的加密算法, 解决了小波时频分布的计算问题。

关键词: 小波, 尺度图, 小波谱相关, 二次时频分布, Cohen 类

中图分类号: TN911.6 文献标识码: A 文章编号: 1009-5896(2005)12-1927-05

The Generalized Time-Frequency Distribution Based on Wavelet and Its Relation with Cohen's Class

Wang Li-jun Xiong Gang Zhao Hui-chang Zhang Shu-ning

(Lab of Anti-jamming, School of Electronic Eng. and Optoelectronic Tech., NUST, Nanjing 210094, China)

Abstract STFT, WT, WVD and Cohen's class are the useful tools of signal processing. This paper analyzes the bilinear TF based on WT, and the relation between the scalogram, VWS and Cohen's class, Furthermore, the scalogram is classified into Cohen's class, and then WT is generalized to TF domain(scalogram), ambiguity domain(wavelet AF) and frequency/frequency delay domain(WSCF). The WSCF characteristics of mono-frequency, dual-frequency, WGN, and fractal stochastic noise are analyzed. Finally, a dense algorithm of discrete WT is introduced to the computation of generalized TF distribution based on WT.

Key words Wavelet, Scalogram, Wavelet spectral correletion, Bilinear TFD, Cohen's class

1 引言

Cohen 类时频分析是一种信号的二次型时频表示, 它通过引入特定的核函数, 可得到不同的时频表示, 同时通过对核函数采取一定的约束条件, 可获得不同特性的时频分布。Cohen 类可等价拓展到 4 个域进行分析, 即瞬时相关域、谱相关域、模糊域和时频域, 不同的域对应不同的广义时频函数^[1], 它们在信号检测以及分析处理中都有大量应用。

小波变换(WT)是一种线性时频表示, 已经有文献针对小波变换模的平方, 所谓的尺度图(Scalogram), 研究了基于小波的二次型时频表示^[2,3], 但是同 Cohen 类时频表示一样, 基于小波的二次型时频分布同样可以拓展到 4 个等价的域进行分析。由于小波具有变尺度的多分辨率分析能力, 基于这种思想提出的基于小波的广义二次时频表示可望在信号检测和处理方面优于 Cohen 类时频分析。

基于上述依据, 本文分析了线性时频分析——WT 的二次型时频形式, 研究了尺度图和变化窗谱图与 Cohen 类的关

系, 将尺度图纳入到 Cohen 类的框架, 从而使 WT 广义化为时频域、时延频偏域的双线性时频分布以及谱相关域的二维频率分布, 定义了尺度图、小波模糊函数(WAF)和小波谱相关函数(WSCF), 分析了它们的物理意义。推导并仿真了单频、双频和高斯白噪声的 WSCF, 分析了各自的特性, 最后, 通过引入一种离散 WT 的加密算法, 解决了小波时频分布的计算问题。

2 几种常用的时频分析方法

假定信号 $f(t)$ 的傅氏变换为 $F(\omega)$, 其瞬时自相关和谱相关函数^[4,5]可分别定义为

$$R(t, \tau) = f(t + \tau/2)f^*(t - \tau/2) \quad (1)$$

$$R_F(\omega, \theta) = \iint R_f(t, \tau)e^{-j(t\theta + \tau\omega)} dt d\tau \quad (2)$$

Cohen 类时频分布将多种时频分布纳入了统一的框架^[6], 其表达式为

$$C_f(t, \omega; \phi) = \frac{1}{2\pi} \iiint e^{j(-\theta t - \tau\omega + \theta u)} \phi(\theta, \tau) R_f(u, \tau) du d\tau d\theta \quad (3)$$

运用卷积定理, 可得

$$\begin{aligned}
 C_f(t, \omega; \phi) &= \iint A_f(\theta, \tau) \phi(\theta, \tau) e^{j(-\theta t - \tau \omega)} d\tau d\theta \\
 &= \int \left[\frac{1}{2\pi} \int R_f(u, \tau) \psi(t-u, \tau) du \right] e^{-j\omega\tau} d\tau \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int \left[\frac{1}{2\pi} \int R_f(\xi, \theta) \Psi(\omega - \xi, \theta) d\xi \right] e^{j\theta t} d\theta \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \iint W_f(u, \xi) \Phi(t-u, \omega - \xi) du d\xi \quad (4)
 \end{aligned}$$

其中时频域、瞬时相关域和谱相关域的核函数分别为

$$\left. \begin{aligned}
 \psi(t, \tau) &= \int \phi(\theta, \tau) e^{-j\theta t} d\theta \\
 \Psi(\omega, \theta) &= \int \phi(\theta, \tau) e^{-j\tau\omega} d\tau \\
 \Phi(t, \omega) &= \int \phi(\theta, \tau) e^{-j(\theta t + \tau\omega)} d\theta d\tau
 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中模糊函数(ambiguity function) $A_f(\theta, \tau)$ 和 Wigner 分布 $W_f(t, \omega)$ 分别为

$$A_f(\theta, \tau) = \frac{1}{4\pi^2} \int R_f(\omega, -\theta) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (6)$$

$$W_f(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int R_f(\omega, \theta) e^{j\theta t} dt \quad (7)$$

短时傅氏变换以及谱图是又一种常用的时频分析工具, 文献[2]在短时傅氏变换(STFT)的基础上, 提出了一种变换窗的短时傅氏变换(VWSTFT), 其定义如下:

$$\begin{aligned}
 VT_f(t, \omega) &= \langle f(u), h(t, \omega, (t-u)e^{j\omega u}) \rangle \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int F(\xi) H_0^*(t, \omega, \omega - \xi) e^{j(\xi - \omega)t} d\xi \quad (8)
 \end{aligned}$$

其中 $H(t, \omega, \xi) = \int h(t, \omega, u) e^{-ju\xi} du$ 。

波形 $h(t, \omega, (t-u)e^{j\omega u})$ 是一个以时间量 t 和频率量 ω 为中心, 随 u 变化的函数, 和 STFT 的所加的窗函数相比, VWSTFT 中的窗函数 $h(t, \omega, u)$ 是随着时间和频率变化的。与谱图的定义类似, 定义变换窗谱图(VS)为 VSTFT 模的平方:

$$\begin{aligned}
 VS_f(t, \omega) &= |VT_f(t, \omega)|^2 \\
 &= \frac{1}{2\pi} \iiint e^{j(-\theta t - \tau\omega + \theta u)} \phi(t, \omega, \theta, \tau) R_f(u, \tau) du d\tau d\theta \quad (9)
 \end{aligned}$$

其中模糊域核函数

$$\phi(t, \omega, \theta, \tau) = \int h(t, \omega, u + \tau/2) h_0^*(t, \omega, u - \tau/2) e^{ju\theta} du$$

因此 VWS 属于 Cohen 类时频表示, 根据信号在时频域的特性, 核函数 $\phi(t, \omega, \theta, \tau)$ 为一模糊域依赖于时域和频域的二维滤波器。在瞬时相关域、谱相关域, 模糊域和时频域 VWS 可以等价的表示为

$$\begin{aligned}
 VS_f(t, \omega) &= \iint A_f(\theta, \tau) \phi(t, \omega, \theta, \tau) e^{-j(\theta t + \tau\omega)} d\tau d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \iint R_f(u, \tau) \psi(t, \omega, t-u, \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau du \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \iint R_f(\xi, \theta) \Psi(t, \omega, \omega - \xi, \theta) e^{j\theta t} d\xi d\theta \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \iint W_f(u, \xi) \Phi(t, \omega, t-u, \omega - \xi) du d\xi \quad (10)
 \end{aligned}$$

根据 4 个域核函数之间的关系, 可得

$$\left. \begin{aligned}
 \psi(t, \omega, u, \tau) &= \int \phi(t, \omega, \theta, \tau) e^{-j\theta u} du \\
 &= 2\pi h(t, \omega, u + \tau/2) h^*(t, \omega, u - \tau/2) \\
 \Psi(t, \omega, \theta, \xi) &= \int \phi(t, \omega, \theta, \tau) e^{-j\tau\xi} d\tau \\
 &= H(t, \omega, \xi + \theta/2) H^*(t, \omega, \xi - \theta/2) \\
 \Phi(t, \omega, u, \xi) &= \iint \phi(t, \omega, \theta, \tau) e^{-j(\theta t + \tau\xi)} d\theta d\tau \\
 &= 2\pi \int h(t, \omega, u + \tau/2) \\
 &\quad \cdot h^*(t, \omega, u - \tau/2) e^{-j\xi\tau} d\tau
 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

3 从 Cohen 类到基于小波的广义时频分布

假定小波母函数为 $g(t)$, 那么我们可以将小波变换看成一种特殊的 VWSTFT, 此时令: $h^*(t, \omega, u) = \sqrt{|\omega|} h_0^*(\omega u)$, 其中 $h_0(u) = g(-u)e^{ju}$, 则有

$$\begin{aligned}
 WT_f(t, \omega) &= a^{-1/2} \int f(u) g^*((t-u)/a) du \\
 &= \sqrt{|\omega|} \int f(u) g^*(\omega(t-u)) du \\
 &= \sqrt{|\omega|} \int f(u) h_0^*(\omega(t-u)) e^{-j\omega(t-u)} du \\
 &= VT_f(t, \omega) e^{j\omega t} \quad (12)
 \end{aligned}$$

这样小波变换可以转化为一种特殊的 VWSTFT, 即与小波变换对应的加窗函数为

$$h(t, \omega, u) = \sqrt{|\omega|} g(-\omega u) e^{j\omega u} \quad (13)$$

进一步, 可以给出变窗口谱图与尺度图之间存在下面的关系:

$$\begin{aligned}
 VS_f(t, \omega) &= |VT_f(t, \omega)|^2 = |WT_f(t, 1/\omega)|^2 \\
 &= \frac{1}{2\pi} \iiint \phi(\omega, \theta, \tau) R_f(u, \tau) e^{j(-\theta t - \tau\omega + \theta u)} du d\tau d\theta \quad (14)
 \end{aligned}$$

其中 $\phi(\omega, \theta, \tau) = 2\pi A_{h_0}(\theta/\omega, \omega\tau)$ 。

通过式(11)的关系可以得到:

$$\left. \begin{aligned}
 \psi(\omega, u, \tau) &= \int \phi(\omega, \theta, \tau) e^{-j\theta u} du \\
 &= 2\pi |w| R_{h_0}(\omega u, \omega\tau) \\
 \Psi(\omega, \xi, \theta) &= \int \phi(\omega, \theta, \tau) e^{-j\tau\xi} d\tau \\
 &= \frac{1}{|w|} R_{h_0}(\xi/\omega, \theta/\omega) \\
 \Phi(\omega, u, \xi) &= \iint \phi(\omega, \theta, \tau) e^{-j(\theta t + \tau\xi)} d\theta d\tau \\
 &= 2\pi W_{h_0}(\omega u, \xi/\omega)
 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

基于小波的广义时频分布在瞬时相关域、谱相关域, 模糊域和时频域可以等价表示为

$$\begin{aligned}
 VS_f(t, \omega) &= |WT_f(t, \omega)|^2 \\
 &= \iint A_f(\theta, \tau) \phi(\omega, \theta, \tau) e^{-j(\theta t + \omega\tau)} d\theta d\tau \\
 &= \frac{1}{2\pi} \iint R_f(u, \tau) \psi(\omega, t-u, \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau du \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \iint R_f(\xi, \theta) \Psi(\omega, \omega - \xi, \theta) e^{j\theta t} d\xi d\theta \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \iint W_f(u, \xi) \Phi(\omega, t-u, \omega - \xi) du d\xi \quad (16)
 \end{aligned}$$

将 $h_0(u) = g(-u)e^{ju}$ 代入到式(15)中, 可得基于小波的广义时频分布的核函数在各个等价域的时频表示为

$$\left. \begin{aligned} \phi_{WT}(\omega, \theta, \tau) &= 2\pi A_g(-\theta/\omega, -\omega\tau)e^{j\omega\tau} \\ \psi_{WT}(\omega, u, \tau) &= 2\pi | \omega | R_g(-\omega u, -\omega\tau)e^{j\omega\tau} \\ \Psi_{WT}(\omega, \xi, \theta) &= \frac{1}{|\omega|} R_G(1 - \xi/\omega, -\theta/\omega) \\ \Phi_{WT}(\omega, u, \xi) &= 2\pi W_g(-\omega u, 1 - \xi/\omega) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

可得基于小波的广义时频分布可以表示为

$$\begin{aligned} |WT_f(t, a)|^2 &= \iint A_f(\theta, \tau) A_g(-a\theta, -\tau/a) e^{-j\theta t} d\theta d\tau \\ &= \frac{1}{|a|} \iint R_f(u, \tau) R_g((u-t)/a, -\tau/a) d\tau du \\ &= \frac{|a|}{4\pi^2} \iint \left[\int R_f(\xi, \theta) R_g(a\xi, -a\theta) d\xi \right] e^{j\theta t} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint W_f(u, \xi) W_g((u-t)/a, a\xi) du d\xi \end{aligned} \quad (18)$$

上式即体现了基于小波的广义时频分布与 Cohen 类时频分布的关系。

由式(18)的分析, 我们可以分别定义3个基于小波的广义时频分布: 尺度图(scaleograms)、小波谱相关函数(WSCF)和小波模糊函数(WAF), 分别表示为

$$|WT_f(t, a)|^2 = \frac{1}{2\pi} \iint W_f(u, \xi) W_g((u-t)/a, a\xi) du d\xi \quad (19)$$

$$WSC_f(a, f_d) = \frac{a}{2\pi} \int_R R_\psi(a\omega, -af_d) R_f(f_d, \omega) d\omega \quad (20)$$

$$WA_f(\theta, \tau, a) = 2\pi A_f(\theta, \tau) A_g(-a\theta, -\tau/a) e^{j\tau/a} \quad (21)$$

从上面3式可以清楚地看出, 尺度图、WSCF和WAF分别与威格纳分布、谱相关函数和模糊函数的联系。文献[2]已经对尺度图的特性进行了分析, 显示了其与Cohen时频分布的关系。

对于WAF, 可以看出它是由信号的AF和母小波的AF, 以及一个与尺度有关的量三者的乘积组成。对于每一个给定的尺度 a , 相当于对信号作一次固定的小波窗分析, 如果做 J 阶的小波分解, 那么小波模糊函数图是由 J 个不同的加窗函数对应产生的模糊函数组成的, 这 J 个模糊函数各自在时间和频率轴的分辨率都是不一样的, 这给我们分析WAF带来一定的困难, 同时对于信号的特征的分析和提取也是不利的, 在此不做深入讨论, 下面具体对小波谱相关函数进行分析。

4 小波谱相关函数(WSCF)及其特性分析

由式(20)的分析, 可见小波谱相关等于母小波函数的谱相关函数和信号的谱相关函数乘积的积分。为了更清楚地显示上式的来历, 下面将从谱相关的定义^[7,8]出发, 推导WSCF的表达式, 由定义

$$\begin{aligned} WSC_f(a, \theta) &= \int_R |W_{a,b}|^2 e^{-i\theta b} db \\ &= \frac{1}{2\pi} \iiint W_f(t, \omega) W_\psi \leq \left(\frac{t-b}{a}, a\omega \right) e^{-i\theta b} dt d\omega db \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint_R W_f(t, \omega) \left[\int_R W_\psi \left(\frac{t-b}{a}, a\omega \right) e^{-i\theta b} db \right] dt d\omega \end{aligned} \quad (22)$$

由 $\int_R W_\psi(b, \omega) e^{-i\theta b} = R_\psi(\omega, \theta)$ 并令 $\frac{t-b}{a} = b'$, 代入上式可得

$$\begin{aligned} \int_R W_\psi \left(\frac{t-b}{a}, a\omega \right) e^{-i\theta b} &= -a \int_R W_\psi(b', a\omega) e^{-i\theta(t-ab')} db' \\ &= -a R_\psi(a\omega, -a\theta) e^{-j\theta t} \end{aligned} \quad (23)$$

代入式(22)可得

$$\begin{aligned} WSC_f(a, \theta) &= \frac{a}{2\pi} \iint_R W_f(t, \omega) R_\psi(a\omega, -a\theta) e^{-j\theta t} dt d\omega \\ &= \frac{a}{2\pi} \int_R R_\psi(a\omega, -a\theta) \left[\int_R W_f(t, \omega) e^{-j\theta t} dt \right] d\omega \\ &= \frac{a}{2\pi} \int_R R_\psi(a\omega, -a\theta) R_f(\omega, \theta) d\omega \end{aligned} \quad (24)$$

$$\text{其中 } R_f(\omega, \theta) = \left[\int R_\psi(t, \tau) e^{-ja\omega\tau} d\tau \right] e^{ja\theta t} dt。$$

显然与式(20)得出了相同的结论, 上式即体现了WSC与常规谱相关函数以及Cohen类广义谱相关的关系。值得注意的是, 在小波母函数的谱相关函数 $R_\psi(a\omega, -af_d)$ 中, 尺度量 a 同时作用于双谱平面的频率域和频偏域。在Cohen类的广义谱相关表示中, 不可能出现频偏和频率的乘积项, 因为在时频域函数的时间变量和频率变量之间不存在耦合关系, 但是对于小波的时频能量函数, 尺度量不仅决定了带通滤波器的中心频率, 而且控制了时间窗口的大小, 从而确定了对应的尺度分解级数的小波系数个数, 在通过傅氏变换求小波谱相关的过程中, 在时频域的时间和尺度的耦合关系转化为谱相关域的频率和频偏的耦合关系, 见下式:

$$R_\psi(a\omega, -a\theta) = \hat{\psi}[a(\omega - \theta)] \hat{\psi}^*[a(\omega + \theta)] \quad (25)$$

这种耦合关系在我们利用Mallat算法计算WSCF, 以及通过WSCF提取特征时, 将带来一定的困难。在第5节中, 我们将引入了一种离散小波的加密算法来解决这个计算问题。

下面将通过几种常用信号的WSCF分析, 来体现在小波谱相关和谱相关函数的不同, 以及它对于信号的分析和处理的作用。在此分析了单频正弦信号, 双频正弦信号和高斯白噪声的WSCF, 计算中统一采用了symlets二阶小波, 且采用了第5节介绍的时间和尺度加密算法。

(1)单频正弦信号: $f(t) = \sin \omega_1 t$, 根据单频信号谱相关函

数的特点^[1], 由式(1)可以得到, 单频正弦信号的 WSCF 为

$$WSC(\theta, a) = \begin{cases} \frac{|a|}{8\pi}(R_G(a\omega_1, 0) + R_G(-a\omega_1, 0)), & \theta = 0 \\ \frac{|a|}{8\pi}R_G(0, \pm 2a\omega_1), & \theta = \pm 2\omega_1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (26)$$

图 1(a)是通过仿真计算的结果(取 $\omega_1 = 10$), 可以看到, WSCF 为平行于尺度轴呈现为 3 个“鱼鳞片”形状, 中间一片位于循环频率为零的尺度截面, 另外两片分别位于循环频率 $\pm 2\omega_1$ 的尺度截面, 图 2(a)给出了尺度为 10 的循环频率截面图, 这一点和普通的谱相关函数类似。

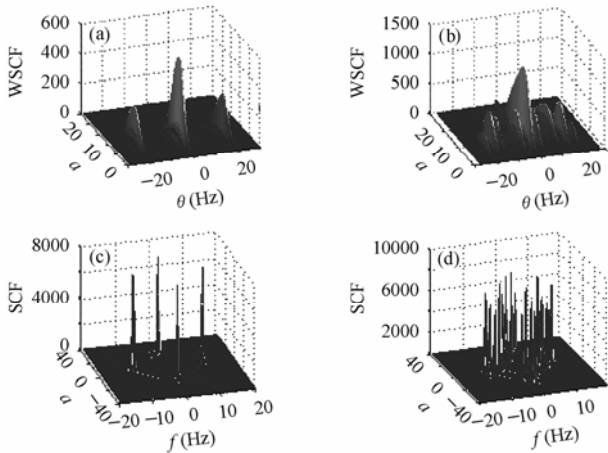


图 1 信号的 SCF 和 WSCF 对照分析

- (a) 单频信号的 WSCF (b) 双频信号 WSCF
- (c) 单频信号的 SCF (d) 双频信号 SCF

(2)考虑两个单音的情况: $f(t) = \sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)$, 根据其谱相关函数^[1]可以推导出其 WSCF 为

$$WSC(\theta, a) = \begin{cases} \frac{|a|}{8\pi}(R_G(\pm a\omega_1, 0) + R_G(\pm a\omega_2, 0)), & \theta = 0 \\ \frac{|a|}{8\pi}R_G(0, -a\theta), & \theta = \pm 2\omega_1, \pm 2\omega_2 \\ \frac{|a|}{8\pi}R_G(\pm a(\omega_1 + \omega_2), -a\theta), & \theta = \pm(\omega_1 - \omega_2) \\ \frac{|a|}{8\pi}R_G(\pm a(\omega_1 - \omega_2), -a\theta), & \theta = \pm(\omega_1 + \omega_2) \end{cases} \quad (27)$$

仿真计算的结果如图 1(b)所示(取 $\omega_1 = 10, \omega_2 = 8$), 与单频率信号类似, 两个单音信号的 WSCF 也呈现为“鱼鳞片”状, 但由于小波谱相关是能量谱分布, 属于二次型分布, 所以存在交叉项, 图中可见, 除了在循环频率为 $\pm 2\omega_1, \pm 2\omega_2$ 时存在平行于尺度轴的谱相关截面(自项)外, 在循环频率为 $\pm(\omega_1 \pm \omega_2)$ 处, 也存在谱相关函数(交叉项), 图 2(b)给出了它的尺度为 10 处的循环频率截面图。

为了对比分析, 我们还给出了单频信号和两个单频信号的谱相关函数, 分别如图 1(c), 1(d), 结合公式(20), 可以看

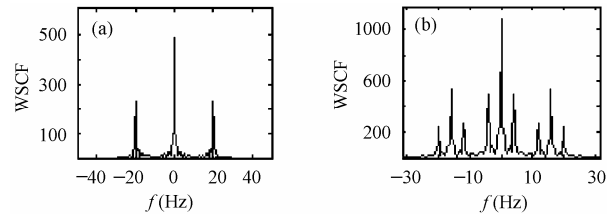


图 2 尺度 $a=10$ 时的 WSCF 截面

- (a) 单频信号 (b) 双频信号

出, 小波谱相关函数实质上是信号的谱相关函数沿频率轴的积累, 再通过小波母函数的谱相关加权后的结果(即先对频率轴累积, 再沿尺度轴展开)。

(3)高斯白噪声(WGN)的情况: 对于理想的高斯白噪声而言, 当循环频率 $\theta \neq 0$ 时, 谱相关值为零, 即 WGN 只在循环频率为零时, 存在谱相关值, 根据小波谱相关函数的定义, 我们可以得到

$$WR_x(a, \theta) = \begin{cases} \frac{a}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} R_\psi(a\omega, 0)R_f(\omega, 0)d\omega, & \theta = 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (28)$$

即理想 WGN 的小波谱相关函数同样是分布在零循环频率截面上的一堵墙, 如图 3(b)所示, 值得注意的是, 此时对应的是尺度轴, 计算采用的是将在第 4 节中介绍的加密算法实现的, 图 3(a)为 WGN 的谱相关。

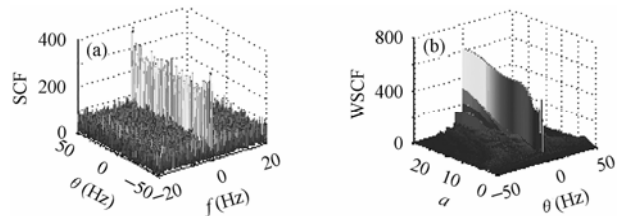


图 3 高斯白噪声的 SCF 和 WSCF

- (a) 高斯白噪声的 SCF (b)高斯白噪声的 WSCF

以上的分析, 虽然都是基于 symlets 小波的(不同的小波母函数可能性质有所差异), 但我们可以从中看出, 小波谱相关函数在信号特征提取方面类似于谱相关函数, 对噪声有较好的抑制作用, 这一点对于通信和雷达信号的检测和估计是有用的。

5 广义小波时频分布中的加密算法

对于广义小波时频分布, 无论是尺度图还是 WSCF 都不可能直接利用 Mallat 算法和 FFT 算法来进行计算和仿真分析, 因为在 Mallat 算法中, 通过滤波器组实现离散栅格上的小波变换时, 尺度是按 2 的幂级数增长的 ($a_0 = 2, a = 2^j$), 数据点数则每经一级作一次二抽样, 使数据减半, 这样的过程存在两个问题:

- (1)在对小波变换模的平方沿着时间轴做 FFT 时, 各尺度

对应的循环频率的分辨率、点数都是不相等的, 则从时频或谱相关三维平面观察信号的特征是不可能, 而且由于每经一级后数据减少一半, 因此 j 愈大, $x_k^{(j)}, d_k^{(j)}$ 数据愈稀, 以致难以看清波形变化全貌。工作中往往希望时移能逐点进行, 也就是加大时间轴方向的栅格密度。

(2) $a_0 = 2$ 意味着以 2 为分频基数。实际工作时(除数据压缩情况外), 往往需要加大尺度方向的栅格密度, 也就是尺度变换不是以 2 为基, 而比 2 更密 ($1 < a_0 < 2$)。

根据文献[3, 9], 可以采用下面的加密算法来解决上述问题:

(1) 时间间隔的加密——逐点计算 基本思想是, 对于基本环节中高通滤波后二抽样过程取消, 使细节信号(小波变换)的奇偶分量都得到输出。同时把低通滤波后的二抽样过程改成用交替切换办法, 保留全部结果, 但分成两路输出, 送到下一级去, 如图 4(a)所示, 把这样的环节逐级组合起来便得到图 4(b)。

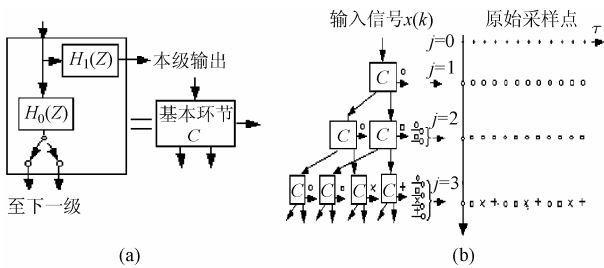


图 4 小波变换的时间加密示意

(a) 基本环节(一级分解) (b) 多级分解方法

(2) 尺度的加密 令尺度 $a = 2^{j-m/M}$, $m = 0, 1, \dots, M-1$, 先通过连续小波变换(CWT)计算出 $a = 2^{m/M}$, $m = 0, 1, \dots, M-1$ 各点上的小波系数, 如图 5(a)所示, 然后对每一结果应用 $a_0 = 2$ 的 Mallat 算法得到如图 5(b)所示的小波变换。图中是 $M=3$ 情况的示意, 同一标号的输出属同一组, 各组滤波器参数相同。注意图上时间间隔 $\Delta\tau$ 并不随 $2^{m/M}$ 而变, 始终是 2^j 情况下的间隔。

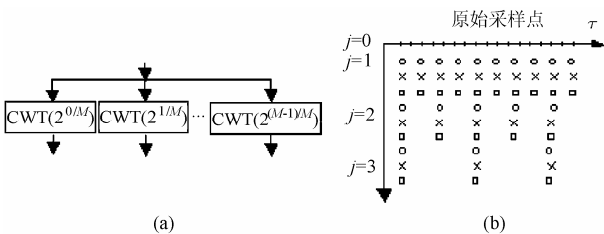


图 5 小波变换的尺度栅格加密示意

(a) 通过 CWT 计算 M 次小波系数 (b) 尺度栅格的加密

通过时间和尺度上的加密处理, 我们计算得到的小波谱相关就成为一个规则的矩阵, 第 3 节中各种 WSCF 的仿真计算均是采用了上述加密方法计算得到的。

6 结论

将线性时频分析——小波变换的研究发展成为广义的

二次型能量时频分布, 研究了其与 Cohen 类时频分布的关系, 将其拓展表示为时频域、模糊域和谱相关域的几种等价形式, 提出了所谓的尺度图、小波模糊函数(WAF)和小波谱相关函数(WSCF), 重点分析了儿种信号和噪声的小波谱相关函数, 通过理论分析和仿真表明: 小波谱相关函数在信号特征提取方面类似于谱相关函数, 对噪声有较好的抑制作用, 这一点对于通信和雷达信号的检测与估计是有利的。对于基于小波的广义时频分布的研究, 可以应用于复杂噪声环境下各种类型信号的检测、估计以及噪声抑制等, 这些有待于进一步研究。

参 考 文 献

- [1] 王宏禹 著. 非平稳随机信号分析与处理. 北京: 国防工业出版社, 1999. 1. 1: 206 - 219.
- [2] Jeong J, Williams W J. Variable-windowed spectrograms: connecting Cohen's class and the wavelet transform. *IEEE signal processing, Fifth ASSP Workshop on Spectrum Estimation and Modeling*, 1990: 270 - 274.
- [3] 杨福生 著. 小波变换的工程分析与应用(第一版). 北京: 科技出版社, 1999, 2: 13 - 22
- [4] 罗利春 著. 无线电侦察信号分析与处理. 北京: 国防工业出版社, 2003, 1. 1:70 - 80.
- [5] Kadambe S, Faye B B. A comparison of the existence of cross terms' in the Wigner distribution and the squared magnitude of the wavelet transform and the short-time Fourier transform. *IEEE Trans. on SP*, 1992, 40(10): 2498 - 2516.
- [6] 张贤达 著. 现代信号处理(第二版). 北京: 清华大学出版社, 2002, 10: 464 - 470
- [7] Rioul O, et al.. Fast algorithm for discrete and continuous wavelet transform. *IEEE Trans. on IT*, 1993, 38(2): 569 - 586.
- [8] Rioul O, Flandrin P. Time-scale energy distributions: A general class extending wavelet transforms. *IEEE Trans. on SP*, 1992, 40(7): 1746 - 1757.
- [9] Li Y, Yi M, Yang Q, Xiao X C, Tai H-M, Low SNR BPSK signal chip rate estimation using a wavelet based spectral correlation algorithm. *Proc. IEEE 45th IEEE International MWSCAS, Iulsa, Oklahma, USA: 2002: 247 - 249.*

王李军: 男, 1978 年生, 博士生, 从事时频分析、小波变换的理论及其在 GPS 系统干扰和抗干扰中的应用研究。

熊 刚: 男, 1977 年生, 博士生, 从事混沌信号处理、小波、时频分析及其在引信信号识别中的应用。

赵惠昌: 男, 1958 年生, 教授, 博士生导师, 主要从事无线电近炸引信的理论和技术研究、特别是无线电引信对抗技术研究。曾作为课题组负责人主持完成和在研“八五”、“九五”、“十五”国防重点预研项目。完成各层次研究课题十多项, 获省部级科技进步奖 3 项, 国家发明专利 2 项, 出版教材 2 部, 在各类刊物上发表研究性论文 40 多篇。

张淑宁: 女, 1977 年生, 博士生, 从事电子对抗理论和信号处理研究。