

## 空分多址系统中的快速 PDA 算法<sup>1</sup>

王 兵 赵玉萍 邹 黎 梁庆林

(北京大学信息科学技术学院 卫星与无线通信研究所 北京 100871)

**摘 要:** 空分多址系统中 (SDMA) 的多用户检测技术 (MUD) 是决定系统性能的关键。由于最优算法的不可实现性, 寻找次最优的简单实用的算法是人们研究的热点。迭代式概率数据辅助 (PDA) 算法的性能接近于最优算法, 但其运算量降低了一半。该文分析了迭代式 PDA 算法错误判决的分布, 提出了快速 PDA 算法, 引入最大似然因子, 将迭代式转化为一次判决方式, 进一步减小了运算量。仿真结果表明快速 PDA 算法与迭代式 PDA 算法的性能十分接近。

**关键词:** SDMA, MUD, PDA

**中图分类号:** TN929.5 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-5896(2004)04-0505-06

## Fast PDA Multiuser-Detection Algorithm in SDMA System

Wang Bing Zhao Yu-ping Zou Li Liang Qing-lin

(School of Electron. Engineer and Computer Sci., Peking University, Beijing 100871, China)

**Abstract** Compared with optimal maximum-likelihood multiuser detection algorithm (MUD) in Space Division Multiuser Access (SDMA) system, probabilistic data association (PDA) algorithm is a near-optimal MUD with low complexity. This paper analyzes the relation between error judging and estimated likely-probability in the 1st iteration of PDA, then proposed the fast PDA which correcting the judging output in the 1st iteration of PDA with Euclidean distance factor. Fast PDA reduces complexity of PDA through eliminating its iterations. Simulation results show that BER of fast PDA is very close to PDA with iterations.

**Key words** SDMA, MUD, PDA

### 1 引言

继时分多址 (TDMA)、频分多址 (FDMA)、码分多址 (CDMA) 技术的研究及实用之后, 空分多址 (SDMA) 系统得到了广泛关注。SDMA 系统利用在接收端和发射端设置多个天线增加的空间维度, 降低系统误码率, 取得成倍的频带利用率, 从而提高系统容量。Foschini<sup>[1]</sup> 已经证明了在瑞利衰落下多天线系统的容量将随着天线个数呈线性增加, 这个结论为 SDMA 系统的研究指出了方向。在 SDMA 系统中, 多用户检测 (MUD) 技术是决定系统性能的关键技术之一。目前, SDMA 系统中的 MUD 技术大多移植于 CDMA 系统, 最优算法是最大似然算法 (ML), 但该算法运算量大, S.Verdu<sup>[2]</sup> 已证明了它是 NP-Hard 问题; 人们转而研究可行的次最优算法<sup>[2]</sup>, 典型的有解相关 (Decorrelator) 和最小均方误差 (MMSE) 算法, 以及各种条件下的非线性干扰抵消法<sup>[3,4]</sup> 等。

概率数据辅助 (PDA) 算法<sup>[5]</sup> 是一种近似最优的算法, 它将待估计的信号与其他多个信号分解, 并将其它用户在空间的混合信号看成是多维高斯分布, 从而获得待估计信号的条件似然

<sup>1</sup> 2002-10-07 收到, 2003-05-26 改回

自然科学基金重大研究计划资助项目 (批准号: 90104014)

概率。相对于最优的 ML 算法,其复杂度低,在很多环境下都具有优良的性能<sup>[6]</sup>。但其获得全部信号估计的运算量仍然不小于用户数的 4 次方,而且随着迭代次数的增加,运算量将成倍增加。本文考察了 PDA 算法的错误判决分布,将 PDA 算法由迭代方式化简为一次判决方式,同时利用一定条件下最大似然判决因子来修正判决结果。仿真结果表明,本文提出的简化方法与迭代式 PDA 算法的性能十分接近,其运算量仅是一次迭代的运算量。

本文安排如下:第 2 节是系统模型和迭代式 PDA 算法描述;第 3 节对迭代式 PDA 算法进行了分析,提出了快速 PDA 算法,并给出仿真结果;第 4 节是结论。

## 2 SDMA 系统模型及 PDA 算法

### 2.1 系统模型

假设平坦瑞利衰落环境中离散 SDMA 系统具有  $n$  个发射天线,  $m$  个接收天线,那么离散基带空分多址系统可以表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{W} = [\mathbf{H}_1 \cdots \mathbf{H}_n] \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_m \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & h_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{1m} & \cdots & h_{nm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_m \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $\mathbf{Y}$  是  $m$  维接收信号向量,  $y_j (1 \leq j \leq m)$  是第  $j$  个接收天线上的接收信号;  $\mathbf{B}$  是  $n$  维发送向量,仅考虑 BPSK 调制,那么第  $j$  个发射天线上的信号  $b_j \in \{+1, -1\}$ ;  $\mathbf{W}$  是  $m$  维加性高斯白噪声向量,第  $i$  个接收天线上的噪声信号  $n_i \sim CN(0, \sigma^2)$ ;  $\mathbf{H}$  是信道冲激响应,用  $m \times n$  维矩阵表示,其中  $h_{ij}$  是从发射天线  $i$  到接收天线  $j$  的冲激响应,在瑞利信道下  $h_{ij}$  服从均值为零、方差为 0.5 的复高斯随机分布。

### 2.2 迭代式 PDA 算法

文献 [6] 对迭代式 PDA 算法进行了系统的研究。在此仅进行简单描述。

式 (1) 可以重写为

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}_j b_j + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}} \mathbf{H}_k b_k + \mathbf{W} = \mathbf{H}_j b_j + \mathbf{W}_j \quad (2)$$

其中的所有信号都为复数信号。那么  $\mathbf{W}_j$  就是观测信号  $b_j$  的加性噪声,包括来自其它天线信号的干扰和加性高斯白噪声,且  $\mathbf{W}_j$  可以近似成高斯分布<sup>[5,6]</sup>,则其他信号的先验概率  $p_k$  ( $p_k$  是  $b_k = +1$  的概率) 为已知时  $b_j$  的条件似然概率为<sup>[6]</sup>

$$p_j(\tilde{\mathbf{Y}}|b_j, \{p_k, k \neq j\}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{2m} |\Omega_j|}} e^{-\frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{Y}} - \mu_j)^T \Omega_j^{-1} (\tilde{\mathbf{Y}} - \mu_j)} \quad (3)$$

式中  $\tilde{\mathbf{Y}} = (\text{Re}(\mathbf{Y}^T) \text{Im}(\mathbf{Y}^T))^T$ , 是接收信号的实数矢量,上标 T 表示矩阵的转置。其条件均值  $\mu_j$  和条件方差  $\Omega_j$  分别为

$$\mu_j = E[\tilde{\mathbf{Y}}] = \tilde{\mathbf{H}}_j b_j + \sum_{k \neq j} \tilde{\mathbf{H}}_k (2p_k - 1) \quad (4)$$

$$\Omega_j = E[(\tilde{\mathbf{Y}} - \mu_j)(\tilde{\mathbf{Y}} - \mu_j)^T] = \sum_{k \neq j} [4\tilde{\mathbf{H}}_k \tilde{\mathbf{H}}_k^T (p_k - p_k^2)] + \sigma^2 \mathbf{I}_{2m} \quad (5)$$

式中  $\tilde{H}_k = (\text{Re}(\mathbf{H}_k^T) \text{Im}(\mathbf{H}_k^T))^T$  是信道冲激响应的实数形式,  $\sigma^2$  是信道高斯噪声的方差。  $\mathbf{I}_{2m}$  是  $2m \times 2m$  维单位矩阵。可以得到  $b_j$  的条件似然比为

$$\lambda_j = \frac{p_j(\tilde{\mathbf{Y}}|b_j = +1, \{p_k, k \neq j\})}{p_j(\tilde{\mathbf{Y}}|b_j = -1, \{p_k, k \neq j\})} = e^{2[\tilde{\mathbf{Y}} - \sum_{k \neq j} \tilde{H}_k(2p_k - 1)]^T \Omega_j^{-1} \mathbf{H}_j} \quad (6)$$

由此可以得到发送信号  $b_j$  的条件似然概率

$$p_j(\tilde{\mathbf{Y}}|b_j = +1, \{p_k, k \neq j\}) = \frac{\lambda_j}{1 + \lambda_j} \quad (7)$$

它可以作为计算其他发送信号条件似然比时用到的先验知识  $p_j$ 。在第一次迭代中假设  $p_j = 0.5$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ 。按照式 (3)–(7) 估计所有发送信号的似然概率  $p_j$ , 每一个信号的估计概率都成为估计其他信号的先验概率; 按照这个规则进行再一次迭代, 当  $p_j$  与上一次迭代时得到的值之差小于某一设定门限  $\varepsilon$  时, 认为该概率已收敛, 此时根据最大似然法则可以进行硬判决:

$$\hat{b}_j = \text{sgn}(p_j - 0.5), \quad b_j \in \{+1, -1\} \quad (8)$$

迭代式 PDA 算法流程:

初始化  $p_{j,l} = 0.5$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ,  $l = 1$ , 设置迭代初始次数  $l = 1$  及迭代终止门限  $\varepsilon$ ,

\* $p_{j,l}$  是第  $l$  次迭代得到的概率。

对  $l = 1, 2, \dots$ ,  $l$  是迭代次数; 并设  $j = 1$ :

(1) 根据式 (6), (7) 计算  $\lambda_{j,l}$ ,  $p_{j,l}$ ;

(2) 如果  $|p_{j,l+1} - p_{j,l}| \leq \varepsilon$ , 根据式 (8) 进行判决;

(3) 将  $p_{j,l}$  替换先验概率上一次迭代中的  $p_{j,l}$ , 且  $j = j + 1$ , 重复步骤 (1) 和 (2);

⋮

### 3 快速 PDA 算法

#### 3.1 快速 PDA 算法

从上面的算法中可以看出, 即使采用文献 [6] 中的提前判决, PDA 算法也至少需要 2 次迭代才能判断得到的概率是否收敛。但实际上, PDA 算法的收敛性能很好。为充分利用这个良好的特性, 先分析第 1 次迭代中的判决错误与似然概率之间的关系。

假设在第 1 次迭代中进行硬判决, 并统计出现错误判决  $b_j \neq \hat{b}_j$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$  时的似然概率  $p_{\text{err}} = \{p_j, p_j \in \{p_j, (b_j \neq \hat{b}_j), j = 1, 2, \dots, n\}\}$ 。在信噪比  $\text{SNR} = -4\text{dB}$ , 发送端和接收端各有 2 个天线, 发送了 10000 组测试信号, 其发生错误判决时的概率呈现如图 1 所示的累计分布, 这个分布很容易让人想到高斯分布。从图 1 可以看出判决错误最容易发生在似然概率 0.5 的附近。

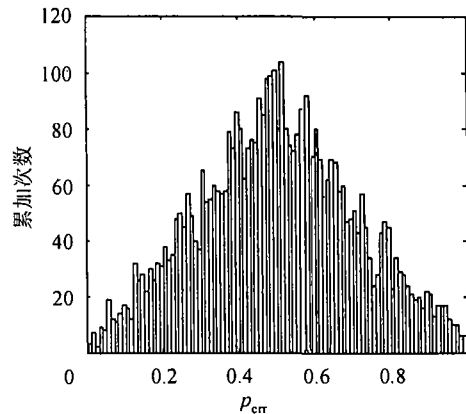


图 1 错误判决时似然概率累计分布

为进一步统计在不同条件下的错误判决时的概率分布, 在相同天线数 (4 天线) 不同信噪比 (SNR=-4 dB, 0 dB, 4 dB) 下和相同信噪比 (SNR=-4 dB) 不同天线数 (2 天线、4 天线、8 天线) 情况下得到了发生错误判决时概率分布的比例, 如图 2 和图 3 所示, 图中横轴是  $\text{abs}(p_{\text{err}} : 0.5)$ , 表示似然概率与概率 0.5 的接近程度, 纵轴“小于横轴概率的比例”表示判决错误在概率 0.5 附近的集中程度。信噪比是每个接收天线上的信噪比。仿真中都假设发射天线与接收天线数目相同。

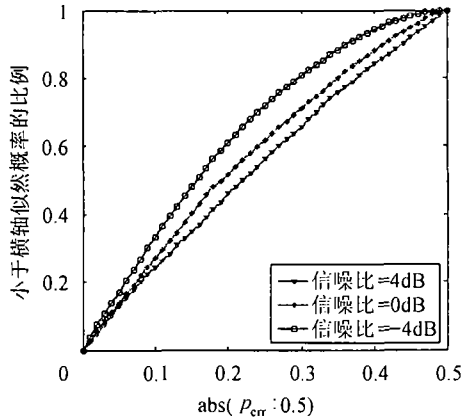


图 2 不同信噪比下错误判决时条件概率分布

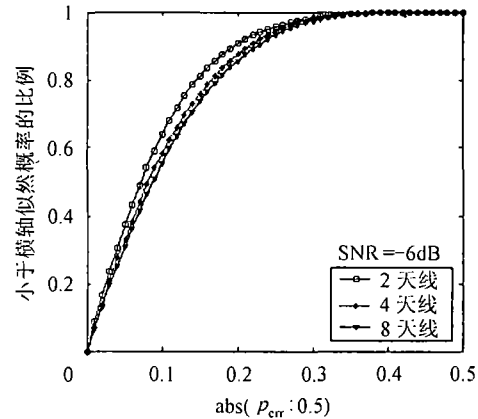


图 3 不同天线数下错误判决时条件概率分布

在低信噪比条件下, 可以看出用 PDA 算法估计出条件概率为 0.5 附近的待估计信号具有极大不确定性, 比如 4 天线系统中信噪比为 -6 dB 时, 40% 的判决错误发生在条件概率为 (0.4~0.6) 之间, 而且这个不确定区域与所用天线数目基本无关。为进一步监测这些不确定信号, 引入联合检测的最小距离判决算子 (即最大似然因子)  $J$ :

$$J = \|\tilde{Y} - \tilde{H} \cdot B\|^2 \quad (9)$$

$B$  是多个天线上发送信号码集,  $b_j \in \{+1, -1\}$ 。

设用 PDA 算法得到的码集为  $B_p = \{\hat{b}_j = \text{sgn}(p_j - 0.5), j = 1, 2, \dots, n\}$ , 其中  $p_j$  由式 (7) 得到。重新构造另一个新码集  $B_D = \{\check{b}_j, j = 1, 2, \dots, n\}$ , 其中

$$\check{b}_j = \begin{cases} -\text{sgn}(p_j - 0.5), & |p_j - 0.5| < \Delta, \\ \text{sgn}(p_j - 0.5), & |p_j - 0.5| > \Delta, \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (10)$$

也就是将  $B_p$  中具有不确定性的个别符号置换成发送码集中的另一个符号形成一个新的假想码集  $B_D$ 。  $\Delta$  是确定判决信号翻转的概率门限, 根据判决错误时条件概率在 0.5 附近集中的程度而定。对码集  $B_p$  和  $B_D$  分别计算其判决算子  $J$ , 运用最大似然译码的思想, 选择具有较小距离的码集作为最后判决, 即最终判决得到的码集将满足:

$$\bar{B} = \arg(\min_{B_p, B_D} J) \quad (11)$$

快速 PDA 算法流程:

初始化  $p_j = 0.5$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , 设置新码集构造门限  $\Delta$ :

- (1) 根据式 (6),(7) 计算  $\lambda_j$ ,  $p_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ;
- (2) 根据式 (8) 进行判决, 得到发送码集  $B_p$ ;
- (3) 对  $B_p$  码集中  $|p_j - 0.5| \leq \Delta$  的部分信号按照式 (10) 进行信号的重新选择, 得到码集  $B_D$ ;
- (4) 对码集  $B_p$  和  $B_D$  进行式 (11) 的判决, 得到最终判决结果。

这样的快速 PDA 算法, 其运算量只有迭代式 PDA 算法的一半。

另外, 从图 2 中可以看出, 在低信噪比下, 判决错误大多发生在所估计的条件概率在 0.5 附近; 然而在高信噪比时, 这个特征就消失了, 此时, 由于天线间干扰的增大, 几乎任何估计的条件概率都可能发生错误, 门限  $\Delta$  无法确定, 本文提出的快速算法也就没有意义了, 它仅相当于对 2 个码集  $B_p$  和  $B_D$  进行了一次最大似然译码过程。所以, 快速算法更适用于低信噪比情况。

### 3.2 仿真结果

文献 [6] 中已经验证了 PDA 算法与 ML 算法的性能极其接近, 在此仅对 PDA 算法和快速 PDA 算法进行了仿真比较。

仿真时采用平坦瑞利衰落信道模型, 加性高斯白噪声, 图 4 分别比较了 8 个接收天线条件下不同用户数时采用 2 种不同算法的系统误码率性能, 其中 PDA 算法中迭代终止门限采用文献 [6] 中推荐的  $\varepsilon = 0.01$ , 快速 PDA 算法中新码集构造门限  $\Delta = 0.1$ ; 图 5 比较了 4 个接收天线、4 个用户系统中采用不同门限  $\Delta$  时快速 PDA 算法误码率性能。

由图 4 可以看出, 快速 PDA 算法几乎与迭代式 PDA 算法有着非常近似的误码率性能。另外, 在快速 PDA 算法中, 构造新码集  $B_D$  用到的门限  $\Delta$  对误码率性能的影响也很小。

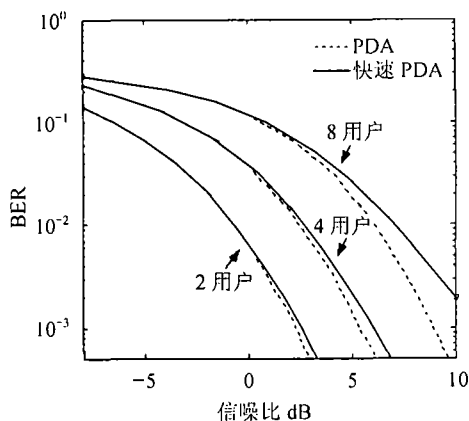


图 4 PDA 算法与快速 PDA 算法比较

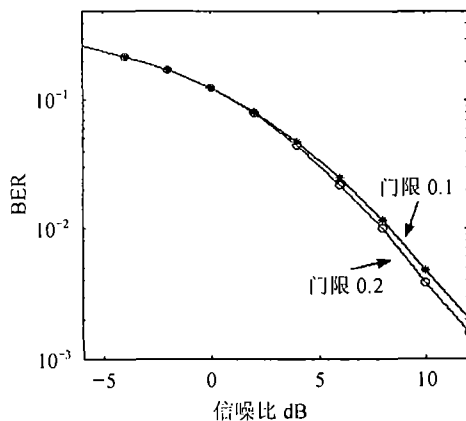


图 5 快速 PDA 算法中不同门限比较

## 4 结论

本文对空分多址系统中迭代式 PDA 多用户检测算法进行了研究, 在迭代式 PDA 算法的基础上, 分析了该算法中条件概率与错误判决之间的关系, 将迭代式转化为一次判决, 并引入最大似然检测算子, 对可能的错误判决进行再一次检测并修正。在平坦瑞利衰落信道下的仿真结果表明, 本文的快速算法与迭代式 PDA 算法的性能十分接近, 而运算量仅为原算法的一半, 离算法的实用性又向前进了一步。

本文虽然用仿真得到了错误判决与 PDA 算法估计出的条件概率在不同条件下的关系, 但没有得到这些关系的理论分析, 这还有待于进一步研究。

## 参 考 文 献

- [1] Foschini J G, Gans M J. On limits of wireless communications in a fading environment when using multiple antennas. *Wireless Personal Communications*, 1998, 6(3): 311-335.
- [2] Verdu S. *Multuser Detection*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1998, 第四章.
- [3] X. Wang, Poor H V. Iterative (Turbo) soft interference cancellation and decoding for coded CDMA. *IEEE Trans. on Communications*, 1999, 47(7): 1046-1061.
- [4] Reynolds D, X. Wang. Turbo multiuser detection with unknown interferers. *IEEE Trans. on Communications*, 2002, 50(4): 616-622.
- [5] J. Luo, Pattipati K R, Willett P K, Hasegawa F. Near-optimal multiuser detection in synchronous CDMA using probabilistic data association. *Electronics Letters*, 2001, 5(9): 361-363.
- [6] 陈江. 衰落信道中的空分多址系统. [博士论文], 北京: 北京大学电子学系, 2002-9-9.

王 兵: 女, 1966 年生, 博士生, 研究方向: 多载波系统、无线传输技术、无线通信中的信号处理.

赵玉萍: 女, 1961 年生, 副教授, 研究方向: 多载波系统、无线资源管理、无线传输协议等.

邹 黎: 女, 1976 年生, 博士生, 研究方向: 多载波系统、无线传输技术、无线通信中的信号处理.

梁庆林: 男, 1941 年生, 教授, 博士生导师, 研究方向: 扩展频谱通信技术、卫星与无线通信系统等.