第 23 卷 第 12 期　　电子与信息学报　　Vol.23 No.12
2001 年 12 月　　JOURNAL OF ELECTRONICS AND INFORMATION TECHNOLOGY　　Dec. 2001

求解复极点模型最优解的一种新方法 [1]

谢维波

(华侨大学计算机科学系　福建泉州　362011)

摘　要　该文给出了信号极点估计的非线性最小二乘求解方法. 解的结构满足的最优化条件是充分而必要的, 因而迭代收敛的结果是唯一而最优的. 文中的数值举例说明了本文结论的正确性.

关键词　信号极点, Prony 方法, 非线性最小二乘, 基本对称函数

中图号　TN911.72

1 引　言

考虑指数衰减的复正弦信号和, 其模型表达如下:

$$f(k)-\sum_{n=0}^{N-1}A_nZ_n^k=\varepsilon_k \tag{1}$$

其中 $f(k)$ 为观测数据, ε_k 为高斯白噪声, N 为模型阶数, $k=0,\cdots,M$ 。未知的复数 A_n 和 Z_n 分别为信号的第 n 个留数和极点。由 $(M+1)$ 点 $f(k)$ 计算信号的阶数, 留数和极点是一个经典的信号处理问题. 长期以来, 就该问题的研究, 人们作出了不懈的努力。取得的成果有: Prony 方法, Tufts and Kumaresan 提出的谐波恢复线性预测法, 谐波恢复最大似然法, Pisarenko 的谐波分解法, MUSIC 法, ESPRIT 法 [1], 各种 ESPRIT 法的直接矩阵束 [2−4]。

文献 [5] 研究了 (1) 式模型的非线性最小二乘求解问题, 对于本文的研究给予极大的启发。众所周知, 对于 (1) 式模型的最小二乘辨识, 属于非线性最小二乘问题 [6], 该问题等价于 AR 参数与 MA 参数完全一致的 ARMA(N,N) 模型, 从 ARMA 模型辨识的角度, 它是不可辨识的 [6]。这也说明, 这个模型的本质在于非线性, 最优辨识的方法是无法避开非线性处理的。剩下的问题就是如何构造一个有效迭代, 它应该是很好地反映了模型的性质, 亦即: 在众多满足必要性条件的可能解中确定最优解。

2 最优解的结构

对 (1) 式模型最小二乘辨识的误差函数 Q 为

$$Q=\sum_{k=0}^{M}\varepsilon_k^2=\sum_{k=0}^{M}\left[f(k)-\sum_{n=0}^{N-1}A_nZ_n^k\right]^2 \tag{2}$$

极小化 Q 应满足如下必要条件:

[1] 2000-04-06 收到, 2000-10-18 定稿

$$\frac{\partial Q}{\partial A_m} = (-2)\sum_{k=0}^{M}\left[f(k) - \sum_{n=0}^{N-1} A_n Z_n^k\right] Z_m^k = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial Z_m} = (-2)\sum_{k=0}^{M}\left[f(k) - \sum_{n=0}^{N-1} A_n Z_n^k\right] A_m k Z_m^{k-1} = 0 \tag{4}$$

其中 $m = 0,\cdots,N-1$ 。一般性地假设 $A_m \neq 0$ ，由 (3)， (4) 式结合 (1) 式得：

$$\sum_{k=0}^{M} \varepsilon_k Z_m^k = 0 \tag{5}$$

$$\sum_{k=0}^{M} \varepsilon_k k Z_m^{k-1} = 0 \tag{6}$$

(5)， (6) 式所体现出来的，正是 Q 极小化时， ε_k 所应满足的必要性条件。将这种条件等价地转化为如下表达。

首先，由 Z_m ， $m = 0,\cdots,N-1$ 构造的基本对称函数，记为 b_m ， $m = 0,\cdots,N$ ， $b_N = 1$ 。

定义

$$\left[\sum_{m=0}^{N} b_m Z^m\right]^2 = \sum_{m=0}^{2N} B_m Z^m \tag{7}$$

其中 $B_{2N} = 1$ ，则 (5)， (6) 式可等价地表达为

$$\sum_{k=0}^{M} \varepsilon_k Z^k = \left[\sum_{m=0}^{2N} B_m Z^m\right]\left[\sum_{p=0}^{M-2N} \alpha_p Z^p\right] \tag{8}$$

简言之， Q 极小化时的 ε_k 应具有这样的性质：以 ε_k 构成的多项式 $\sum_{k=0}^{M}\varepsilon_k Z^k$ ，应以 Z_m ， $m = 0,\cdots,N-1$ ，为二重根。这是一个有趣的结论。由 (8) 式易得 ε_k 的表达式：

$$\varepsilon_k = \sum_{p=0}^{M-2N} B_{k-p}\alpha_p \tag{9}$$

(9) 式所表达的 $\varepsilon_k, k = 0,\cdots,M$ ，并非真实的噪音序列，而只是最优辨识时对真实噪音序列的估计。本文对二者不加区别，但愿不会造成混淆。

记 $\alpha = [\alpha_0 \;\; \alpha_1 \;\; \cdots \;\; \alpha_{M-2N}]^T$ 是人为引进的中间向量，它的任意一组取值，都使由 (9) 式定义的 ε_k 满足 Q 极小化时的必要性条件，亦即，本非线性问题的极小值，存在大量的驻点。然而正是由于 (9) 式的获得，为进一步确定最优解奠定了基础。显然，最优解亦应满足 (9) 式，现在的问题是：如何选择一组中间向量 $\alpha = [\alpha_0 \;\; \alpha_1 \;\; \cdots \;\; \alpha_{M-2N}]^T$ 的值，使已经极小化的 Q 最小化，亦即为使 Q 最小，如何确定 α 。记 $\varepsilon = [\varepsilon_0\varepsilon_1\cdots\varepsilon_M]^T$ ，得到 (9) 式的矩阵表达：

$$\varepsilon = C\alpha \tag{10}$$

C 为 $(M+1)\times(M-2N+1)$ 矩阵，其第一列为 $[B_0B_1\cdots B_{2N}0\cdots0]^T$，余列将 $\{B_0B_1\cdots B_{2N}0\cdots0\}$ 依次循环右移一位形成，最后一列为 $[0\cdots0B_0B_1\cdots B_{2N}]^T$，则

$$Q=\alpha^TC^TC\alpha \tag{11}$$

其中 C^TC 为 $(M-2N+1)\times(M-2N+1)$ 的对称 Toplitze 矩阵。由于 C 阵是列满秩的，对称 Toplitze 矩阵是一个正定矩阵 [7]，这保证 (11) 式定义的 $Q\geq0$。

另外对 (1) 式进行如下处理：

$$f(k+\tau)-\sum_{n=0}^{N-1}A_nZ_n^{k+\tau}=\varepsilon_{k+\tau}$$

其中 $K=0,\cdots,2N$， $\tau=0,\cdots,M-2N$，结合 (9) 式并用矩阵的形式表达，得

$$\sum_{k=0}^{2N}f(k+\tau)B_k=\sum_{k=0}^{2N}\varepsilon_{k+\tau}B_k$$

$$(FF)B=(C^TC)\alpha \tag{12}$$

其中 $B=[B_0B_1\cdots B_{2N}]^T$， FF 为 $(M-2N+1)\times(2N+1)$ 的矩阵，其 τ 行， k 列的元素为 $f(k+\tau-2)$。 C^TC 为正定矩阵，其逆存在，满足 (12) 式的 α 向量有唯一解：

$$\alpha=(C^TC)^{-1}(FF)B \tag{13}$$

这样，由 (10)，(13) 式给出了 (1) 式模型辨识的最优解的结构。将 (13) 式代入 (11) 式得

$$Q=B^T(FF)^T(C^TC)^{-1}(FF)B$$

不难看出， $(FF)B=C^Tf$ 是一个恒等式，其中 $f=[f(0)\quad f(1)\quad\cdots\quad f(M)]^T$，则最小化的 Q 可表达为

$$Q=f^TC(C^TC)^{-1}C^Tf \tag{14}$$

对 C 阵奇异值分解为 USV^T，则有下列结果：

$$Q=f^TU_1U_1^Tf \tag{15}$$

记 $U=[U_1,U_2]$，而 U_1 为 U 的前 $M-2N+1$ 列，那么 ε 可表达为

$$\varepsilon=U_1U_1^Tf \tag{16}$$

可见 ε 等于数据向量 f 在 U_1 子空间的投影，而 U_1 是 C 阵的列所张成的正交子空间，即噪音子空间。那么 U_2 是 $2N$ 维的信号子空间。

3 数值仿真

给定 $M+1$ 点数据：

$$f(k)=\cos(0.2\pi k)+1.5\cos(0.24\pi k+\pi/3)+0.1\text{randn} \tag{17}$$

构成数据向量 f，其中 randn 是均值为 0，方差为 1 的正态分布的随机数。

计算步骤：

首先，求解矛盾方程：

$$Fb = 0 \tag{18}$$

得初始估值 $b^{(0)}$，以 $f^T f = Q^{(0)}$ 作为噪声能量的初始估值，其中 $b = [b_0 b_1 \cdots b_N]^T$， F 为 $(M-N+1)\times(N+1)$ 的矩阵，其 τ 行， k 列的元素为 $f(k+\tau-2)$。

第 1 步：由 (7) 式以 $b^{(m)}$ 构成 $B^{(m)}$，由 $B^{(m)}$ 形成 C 阵，对 C 阵作奇异值分解，形成噪音子空间 U_1 和信号子空间 U_2，由 (15) 式得噪声能量新的估值 $Q^{(m)}$。

第 2 步：用数据向量 f 在 U_2 子空间的投影作为信号向量的估值，代替 f，求解 (18) 式得 $b^{(m+1)}$，转至第一步循环迭代，直到向量 b 的第 n 次迭代值 $b^{(n)}$ 满足收敛精度 (即 $|Q^{(n+1)} - Q^{(n)}| < 10^{-6}$)。

表 1 列出了 5 组计算结果 (M=36, N=4)。以 $b^{(0)}$ 为系数的多项式的根，是 Prony 方法的结果。以 $b^{(n)}$ 为系数的多项式的根，是本算法的结果。迭代的改善效果是明显的。在数值实验中，就上述情形， 10 次有 9~10 次收敛，如果收敛了，精度很高。信噪比降低或数据点减少，会使不收敛的次数增多。

表 1 计算结果

	叠代次数	信噪比 (dB)	以 $b^{(0)}$ 为系数的多项式的根	以 $b^{(0)}$ 为系数的多项式的根	理论值
第 1 组	4	20.0727	0.7636± 0.7412i 0.7958±0.6003i	0.7228± 0.6898i 0.8134± 0.5806i	0.8090± 0.5878i 0.7290± 0.6845i
第 2 组	6	21.0637	−74.141, 1.0251 0.7188±0.6743i	0.7302± 0.6795i 0.8096± 0.5994i	同上
第 3 组	6	21.7867	0.5740± 0.8353i 0.7442±0.6585i	0.7330± 0.6833i 0.8075± 0.5891i	同上
第 4 组	6	20.9136	0.7666± 0.7386i 0.6852±0.7855i	0.7210± 0.6942i 0.8121± 0.5738i	同上
第 5 组	5	21.4876	1.4500± 0.5112i 0.7042±0.6855i	0.7349± 0.6782i 0.8041± 0.5943i	同上

4 结 论

本文给出了信号极点估计的非线性最小二乘求解方法。本算法的特点是：非线性方法，但不是一般的非线性方法，最优化的非线性目标函数是精心构造的，解的结构是最优的，尽管解的表达是隐式的，迭代求解的要求是必然的，但是 (10)， (13) 两式给出的结构所满足的最优化条件是充分而必要的，故收敛点是唯一而最优的。数值仿真实验也证实了这一点。本算法的缺点是：需要迭代求解，有时会不收敛。作者认为：在迭代过程中使用 (18) 式来求解向量 $b^{(m)}$ 是不恰当的，然而暂时也没有更好的办法。

参 考 文 献

[1] 张贤达，现代信号处理，北京，清华大学出版社， 1995, 115-142.

[2] 高世伟，保 铮，利用数据矩阵分解实现对空间相关信号源的超分辨处理，通信学报， 1988, 9(1), 36-43.

[3] 林海平，数据矩阵存在 ESPRIT 结构的一个定理及 DM − ESPRIT 算法，信号处理，1994, 10(2), 105-110.

[4] 王卫东，柯有安，信号极点估计的矩阵预测方法的研究，电子科学学刊， 1995, 17(3), 250-255.

[5] R. N. McDonough, W. H. Huggins, Best least squares representation of signals by exponentials, IEEE Trans. on Automatic Control, 1968, AC-13(4), 408–412.

[6] 王宏禹，随机数字信号处理，北京，科学出版社， 1988, 310–313.

[7] 曹志浩，矩阵特征值的问题，上海，上海科学技术出版社， 1980, 47–49.

A NEW SOLUTION FOR COMPLEX POLE MODEL IN OPTIMIZATION

Xie Weibo

(*Dept. of Computer Science, Huaqiao University, Quanzhou* 362011, China)

Abstract In this paper the nonlinear least squares solution for signal-pole estimation is offered. The condition of optimization contented in its structure is both sufficient and necessary, thus the point of convergence is sole.

Key words Signal-pole, Prony method, Nonlinear least squares, Basic symmetry function

谢维波： 男， 1964 年生，讲师，从事信号处理和计算机硬件的教学和研究.