

# 时空欠采样线性调频信号参数及其二维到达角联合估计<sup>1</sup>

田 达 陈天麒

(电子科技大学电子工程学院 成都 610054)

**摘 要:** 针对宽频段 (2~18GHz) 内非平稳来波信号参数估计和测向问题, 提出一种时空欠采样线性调频信号参数与二维到达角联合估计方法. 该方法首先用时域解线调方法估计调频斜率, 然后在分数阶傅里叶变换 (FRFT) 域进行滤波, 实现信号提取. 利用参考阵元及其延时通道进行无模糊初始频率估计. 通过构建 FRFT 波束空间阵列模型实现无模糊测向. 数值仿真表明, 该方法能够实现宽频段内多个线性调频信号参数和二维到达角精确估计, 在低信噪比下仍有较好的估计性能.

**关键词:** 宽频段, 欠采样, 线性调频信号, 参数估计, 二维到达角, 分数阶傅里叶变换

**中图分类号:** TN911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-5896(2004)05-0709-06

## Parameter and 2-D AOA Estimation of LFM Sources with Spatio-Temporal Undersampling

Tian Da Chen Tian-qi

(College of E. E., UEST of China, Chengdu 610054, China)

**Abstract** Time-Frequency parameter estimation and direction finding for nonstationary signals impinging on an antenna array over a wide frequency band (2~18GHz) is under investigation, and a new method for parameter and 2-D Angle-Of-Arrival (AOA) estimation of spatio-temporal undersampled LFM sources is proposed in this paper. The proposed method uses time domain dechirp algorithm for chirp rates estimation. By filtering in the fractional Fourier domain, signals are extracted from the mixture of sources and noise. Unambiguous initial frequency estimates are obtained from the output of the reference element and its time delayed version, while 2-D AOA estimation is based on the array model in FRFT beamspace. Numerical simulations show that this method can deal with multiple LFM sources. Parameter and AOA estimation with high accuracy is available at low SNR.

**Key words** Wide frequency band, Undersampling, LFM signal, Parameter estimation, 2-D AOA, FRactional Fourier Transform (FRFT)

## 1 引言

宽频段 (2-18 GHz) 内来波信号的频率和到达角联合估计是电子侦察领域的重要问题. 较宽的工作频段和瞬时输入带宽使 Nyquist 采样在时域和空域都难以实现. M.D.Zoltowski<sup>[1]</sup>1994 年提出的时空欠采样信号频率和二维到达角联合估计方法无疑是众多解决方案中较为成功的一种. 文献 [2,3] 将该方法推广应用于四阶累积量, 使得算法能够适用于任意高斯噪声环境, 阵列形式也由非均匀 L 阵扩展到均匀圆阵, 进一步提高了测向精度. 然而上述方法均建立在窄带平稳信号的假设基础之上, 它们在处理非平稳信号时受到限制.

线性调频 (LFM) 信号是雷达、通信等工程领域常见的一种非平稳信号形式. 与平稳信号不同, LFM 信号的瞬时频率随时间发生变化, 而传统傅里叶分析无法描述其瞬时频率随时间变化的规律, 对这类来波信号参数测量比窄带平稳信号复杂得多. LFM 信号的分析处理方法研究起步较早, 已有多种线性和双线性时频分析工具. 尽管分析处理 LFM 信号的工具和方法很

<sup>1</sup> 2003-01-15 收到, 2003-09-12 改回

多,但它们大多计算复杂,在低信噪比和短数据情况下效果不理想,二次型时频分布在处理多信号时还受到交叉项的困扰,更主要的问题是,这些方法大都建立在理想条件下,没有考虑时域欠采样的情形,这些因素都导致它们在实际工程中的应用受到很大限制。

针对宽频段内的欠采样(时域和空域)LFM信号,本文提出一种来波信号参数与二维到达角联合估计的有效算法。该方法利用分数阶傅里叶变换(FRFT)的时频旋转特性实现信号滤波提取,通过对参考阵元及其延时通道的处理获得 LFM 参数估计,利用阵列 FRFT 波束空间数据实现二维到达角估计。由于 FRFT 的滤波作用,各信号的调频参数与二维到达角是一一对应的。本文方法不仅适用于 LFM 信号,而且能处理平稳窄带信号。与文献 [1,3] 的方法相比,本方法仅需在参考阵元引入一路延时通道,降低了硬件实现难度。数值仿真表明,该方法在低信噪比条件下仍有较好的参数估计性能。

## 2 欠采样阵列接收系统与信号模型

假设将阵列天线接收频段(2~18 GHz)划分成宽度为  $B = 1$  GHz 的若干子频段,各子频段的信号经混频变换到 0~1 GHz 的处理基带上,对处理基带内的信号采样( $F_s < B$ , 时域欠采样)。其中,仅参考阵元的输出在采样前分为两路,一路直接进行 A/D 变换,另一路则经过延时  $\tau = 1/B$  后再进行 A/D 变换。为实现宽频段内二维到达角无模糊估计,选择阵列形式为 L 型非均匀天线阵<sup>[1]</sup>或均匀圆阵<sup>[3]</sup>(空域欠采样),其中 L 阵满足特定的阵列配置,圆阵阵元个数  $M$  大于 6。为方便讨论,假定入射信号均为 LFM 信号,并且调频斜率各不相同,将各阵元时空欠采样输出表示如下:

$$x_m(n) = \left[ \sum_{p=1}^P s_p(t - \xi_{p,m}) + \eta_m(t) \right] \Big|_{t=n/F_s}, \quad m = 1, \dots, M \quad (1)$$

参考阵元( $m = 1$ )的延时通道输出为

$$y(n) = \left[ \sum_{p=1}^P s_p(t - \xi_{p,1} - \tau) + b(t) \right] \Big|_{t=n/F_s} \quad (2)$$

其中  $M, P$  分别为阵元和信号个数,  $\eta_m(t)$  和  $b(t)$  为加性高斯噪声。 $\xi_{p,m}$  为  $m$  阵元上第  $p$  个信号相对参考阵元的传播延时( $\xi_{p,1} = 0$ ),带有方位信息,其具体表达式与阵列形式及坐标原点的选取有关。LFM 信号波形:

$$s_p(t) = A_p e^{j2\pi(F_p t + 0.5 K_p t^2)} \quad (3)$$

式中  $A_p, F_p, K_p$  分别为第  $p$  个信号的复振幅、初始频率和调频斜率。

## 3 线性调频参数估计算法

针对式(1),应用常见的方法如时域解线调、极大似然或 Radon-Wigner 变换即可得出多个 LFM 信号的调频斜率和归一化初始频率估计值,但此时频率估计精度受到采样数据长度的制约。更重要的是:时域欠采样导致频谱混叠,归一化初始频率  $f_p (0 \leq f_p < 1)$  可能并不等于  $F_p/F_s$ ,而是满足一定的折叠关系,因此上述方法无法从式(1)直接获得初始频率  $F_p$  的正确估计。本文利用参考阵元及其延时通道的采样输出进行线性调频参数估计,当忽略噪声影响时,

其信号输出表示如下:

$$\left. \begin{aligned} x_1(n) &= \sum_{p=1}^P A_p e^{j2\pi(f_p n + 0.5k_p n^2)} \\ y(n) &= \sum_{p=1}^P A_p e^{j2\pi(f_p n - F_p \tau + 0.5k_p n^2 + \phi_p(n))} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中的相位因子  $\phi_p(n) = 0.5K_p\tau^2 - K_p\tau n/F_s$ ,  $f_p = (F_p/F_s)\text{mod}1$  和  $k_p = K_p/F_s^2$  为归一化的初始频率和调频斜率, “mod1” 表示以 1 为模求余数. 注意到式 (4) 与平稳窄带信号模型的差别在于其相位中多了时变相位因子  $0.5k_p n^2$  和  $\phi_p(n)$ . 一个很自然的想法是将这些相位补偿掉, 使之转化为平稳窄带信号进行后续处理. 相位补偿需要知道调频斜率, 可用常见处理方法 (如时域解线调) 预先估计调频斜率. 然而多信号情况下各信号在时域难以分离, 相位补偿难以实现. 考虑到 FRFT 对时频面的旋转特性有利于 LFM 信号的分析处理, 所以本文采用 FRFT 域的滤波方法进行信号提取.

FRFT<sup>[4-8]</sup> 的实质是将信号在旋转了的时频面中重新表示, 是传统傅里叶变换的推广, 已被广泛应用于时频分析、光信号处理等研究领域. 对调频斜率为  $k_0$  的 LFM 信号采样序列  $s(n)$  而言, 当时频面逆时针旋转特定的角度  $\alpha_0 = \pi/2 + \arctan(k_0)$  时, LFM 信号在 FRFT 变换域中呈现明显的窄带特性, 即信号的幅度谱  $|S^{\alpha_0}(u)|^2$  在特定位置以类似冲击的形式出现, 这构成了 FRFT 变换域信号滤波的理论基础. 整个滤波提取过程步骤如下: 首先用时域解线调方法估计调频斜率,

$$\hat{k} = \operatorname{argmax}_{k,\omega} |\operatorname{FFT}\{x_1(n)e^{-j\pi kn^2}\}(\omega)| \quad (5)$$

式中 FFT 表示快速傅里叶变换. 该方法实质为极大似然估计, 多信号时该方法估计出的参数对应能量最大的信号 (不妨设为第  $q$  个信号). 由此得出的频率参数  $\omega$  估计精度和分辨率均受到序列长度  $N$  的限制, 因此不宜作为频率估计参数. 第二步, 计算参考阵元及其延时通道的 FRFT:  $x_1^\alpha(u)$  与  $y^\alpha(u)$ , 其中  $\alpha = 0.5\pi + \arctan(\hat{k} \cdot N)$ . 在  $u$  域进行谱峰搜索, 仅保留谱峰附近  $L$  点构成新的  $u$  域序列  $\tilde{x}^\alpha(u)$ ,  $\tilde{y}^\alpha(u)$ , 从而将该信号从  $u$  域提取出来. 第三步, 对  $\tilde{x}^\alpha(u)$ ,  $\tilde{y}^\alpha(u)$  计算角度为  $-\alpha$  的 FRFT, 从而得到滤波后的 LFM 信号  $\tilde{x}(n)$ ,  $\tilde{y}(n)$ . 第四步, 做相位补偿, 延时通道  $\tilde{y}(n) = \tilde{y}(n)e^{-j2\pi(0.5\hat{k}n^2 - \hat{k}F_s\tau n + 0.5\hat{k}F_s^2\tau^2)}$ , 非延时通道  $\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n)e^{-j\pi\hat{k}n^2}$ .

经过相位补偿,  $\tilde{x}(n)$ ,  $\tilde{y}(n)$  均成为单频复正弦信号. 构造  $Q \times (N - Q + 1)$  维数据矩阵:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \tilde{x}(1) & \tilde{x}(2) & \cdots & \tilde{x}(N - Q + 1) \\ \tilde{x}(2) & \tilde{x}(3) & \cdots & \tilde{x}(N - Q + 2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \tilde{x}(Q) & \tilde{x}(Q + 1) & \cdots & \tilde{x}(N) \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \tilde{y}(1) & \tilde{y}(2) & \cdots & \tilde{y}(N - Q + 1) \\ \tilde{y}(2) & \tilde{y}(3) & \cdots & \tilde{y}(N - Q + 2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \tilde{y}(Q) & \tilde{y}(Q + 1) & \cdots & \tilde{y}(N) \end{bmatrix} \quad (7)$$

显然有

$$\mathbf{X} \approx \mathbf{d}_q \mathbf{s}_q, \quad \mathbf{Y} \approx e^{-j2\pi F_q \tau} \mathbf{d}_q \mathbf{s}_q \quad (8)$$

其中

$$\mathbf{d}_q = [1, e^{j2\pi f_q}, \dots, e^{j2\pi f_q(Q-1)}]^T \quad (9)$$

$$\mathbf{s}_q = [A'_q e^{j2\pi f_q}, A'_q e^{j2\pi f_q^2}, \dots, A'_q e^{j2\pi f_q(N-Q+1)}] \quad (10)$$

由矩阵理论易知,  $\mu = e^{-j2\pi F_q \tau}$  为矩阵束  $\{\mathbf{X}, \mathbf{Y}\}$  的广义特征值, 可用 ESPRIT 及其变形算法对其进行估计. 由广义特征值  $\mu$  的相位可以直接获得初始频率的估计值:  $\hat{F}_q = |\text{angle}(\hat{\mu})|/(2\pi\tau)$ ,  $\text{angle}(\cdot)$  表示取复数的辐角主值, 但此时  $\text{angle}(\hat{\mu})$  的细小误差将被放大  $1/\tau = B$  倍, 严重影响频率估计精度. 本文采用间接方法<sup>[1]</sup>进行频率估计, 即首先用 PRO-ESPRIT 方法估计广义特征值及  $\mathbf{d}_q$  (相应得到数字频率  $f_q$  的估计值), 通过  $\text{angle}(\hat{\mu})$  确定频率模糊区间, 最终实现无模糊初始频率估计:  $\hat{F}_q = \hat{f}_q \cdot F_s + F_s \cdot [B \cdot \text{angle}(\hat{\mu})/(2\pi F_s)]$ , 其中 “ $[\cdot]$ ” 表示下取整运算.

#### 4 FRFT 波束空间二维到达角估计算法

本文假定各信号的相对带宽均满足窄带阵列信号条件. 事实上在 2-18 GHz 频段, 除少数超宽带信号外, 这一假设都能得到满足, 因此阵列输出可以表示为

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{A}\mathbf{s}(n) + \boldsymbol{\eta}(n) \quad (11)$$

其中  $\mathbf{A}$  为方向矩阵. 类似地可以得到 FRFT 变换域的阵列信号模型:

$$\mathbf{x}^\alpha(u) = \mathbf{A}\mathbf{s}^\alpha(u) + \boldsymbol{\eta}^\alpha(u) \quad (12)$$

经过 FRFT 变换滤波, 阵列信号中不同调频斜率的信号被有效分离, 干扰和噪声得到抑制, 因此有利于信号参数估计. 为进一步减小运算量, 利用 FRFT 谱峰数据进行入射信号二维到达角估计, 具体步骤如下: 构造  $M \times (2L+1)$  维 FRFT 波束空间数据矩阵:

$$\mathbf{X}^\alpha = [\mathbf{x}^\alpha(k_0 - L) \cdots \mathbf{x}^\alpha(k_0) \cdots \mathbf{x}^\alpha(k_0 + L)] \quad (13)$$

其中  $\mathbf{x}^\alpha(k) = [x_1^\alpha(k) \ x_2^\alpha(k) \ \cdots \ x_M^\alpha(k)]^T$  ( $k_0 - L \leq k_0 \leq k_0 + L$ ) 为 FRFT 变换域的阵列输出向量, 旋转角度  $\alpha$  及谱峰位置  $k_0$  与滤波选取的信号有关, 可由调频参数估计过程中得到. 由于 FRFT 的滤波作用, 波束空间数据矩阵  $\mathbf{X}^\alpha \approx \mathbf{a}_q [\mathbf{s}_q^\alpha(k_0)]^T$ , 方向向量  $\mathbf{a}_q$  张成  $\mathbf{X}^\alpha$  的一维信号子空间 (列空间), FRFT 域的信源谱峰向量  $\mathbf{s}_q^\alpha(k_0)$  张成  $\mathbf{X}^\alpha$  的行空间 (因不含方向信息, 故其具体形式无关紧要). 以此为基础, 利用特征子空间方法可以实现方向向量  $\mathbf{a}_q$  的提取: 计算相关矩阵  $\mathbf{R}_\alpha = \mathbf{X}^\alpha (\mathbf{X}^\alpha)^H$ , 对  $\mathbf{R}_\alpha$  作特征分解  $\mathbf{R}_\alpha = \sum_{i=1}^M \gamma_i \boldsymbol{\beta}_i \boldsymbol{\beta}_i^H$  ( $\gamma_1 > \gamma_2 \geq \cdots \geq \gamma_M$ ), 主特征向量  $\boldsymbol{\beta}_i$  即可作为方向向量  $\mathbf{a}_q$  的估计 ( $\hat{\mathbf{a}}_q \propto \boldsymbol{\beta}_1$ ). 对  $\hat{\mathbf{a}}_q$  ( $L$  阵或均匀圆阵) 的相邻元素相位差分, 并辅以适当的整数搜索算法即可得到无模糊的方向余弦的估计值<sup>[1,3]</sup>. 测向算法中的信号波长可由前面的频率估计结果得到.

线性调频信号参数与二维到达角联合估计步骤归纳如下:

- 步骤 1 利用参考阵元及其延时通道估计线性调频参数, 并获得 FRFT 谱峰位置信息.
- 步骤 2 对整个阵列输出进行 FRFT 滤波, 得到波束空间数据矩阵以及残留信号.
- 步骤 3 针对波束空间数据矩阵, 利用前面得到的频率估计参数进行无模糊方向估计.
- 步骤 4 重复步骤 1-步骤 3, 直到残留信号能量足够小.

#### 5 仿真

假设同一子频段内两个等功率 LFM 信号进入天线阵, 经射频带通滤波后被混频到处理基带 (带宽  $B=1$  GHz), 延时  $\tau = 1/B = 1$  ns, ADC 采样频率  $F_s = B/4=250$  MHz, 快拍次数  $N = 256$ . 基带信号  $s(t) = \sum_{p=1,2} a_p \exp[j2\pi(F_p t + 0.5K_p t^2)]$ , 初始频率  $F_1, F_2$  分别为

400 MHz, 710 MHz, 调频斜率  $K_1 = 7.75 \times 10^{12}$  Hz/s,  $K_2 = -7.5 \times 10^{12}$  Hz/s, 入射方向  $\{\theta_1 = 70^\circ, \phi_1 = 30^\circ\}, \{\theta_2 = -20^\circ, \phi_2 = 40^\circ\}$ . 分别用非均匀 L 阵 (见图 1) 和均匀圆阵 (半径 10.6cm) 进行仿真实验, 阵元个数均为 7, 实验中取参数  $L=3, Q=15$ . 图 2, 图 3, 图 4 和图 5 分别是初始频率估计、方位角估计、仰角估计、归一化调频斜率估计与信噪比的关系曲线 (每个信噪比 200 次 Monte Carlo 实验), 图 6 给出了低信噪比情况下 (10-11 GHz 频段, L 阵), 本算法对各参数成功估计 (指调频斜率相对误差  $< 5\%$ , 频率估计误差  $< 2$  MHz, 到达角估计误差  $< 3^\circ$ ) 的概率统计. 实验数据表明: (1) 基于 FRFT 滤波的频率和到达角估计具有较高精度, 该算法在 SNR=-10 dB 时正确估计初始频率的概率接近 1. (2) 在阵元数相同、阵列孔径相当的情况下, 由于充分利用了每个阵元的相位信息, 均匀圆阵比 L 阵测向精度高. (3) 频段高端的测向精度优于低端, 频率估计精度几乎没有变化.

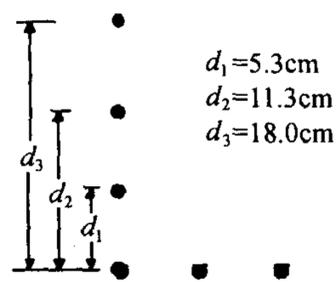


图 1 L 型天线阵 (两臂几何配置相同)

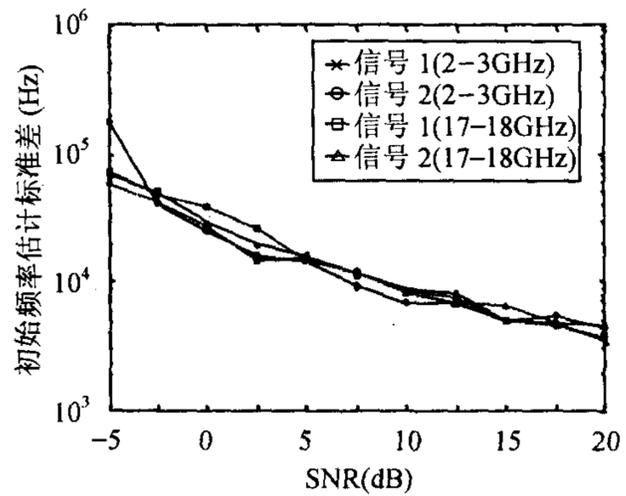


图 2 初始频率估计标准差

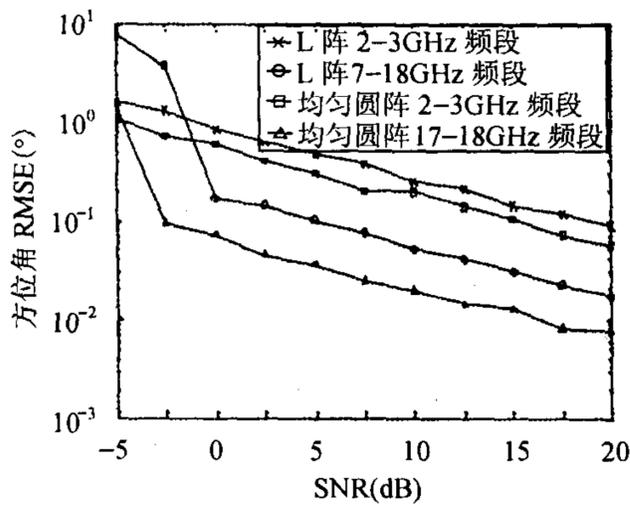


图 3 方位角估计均方根误差曲线

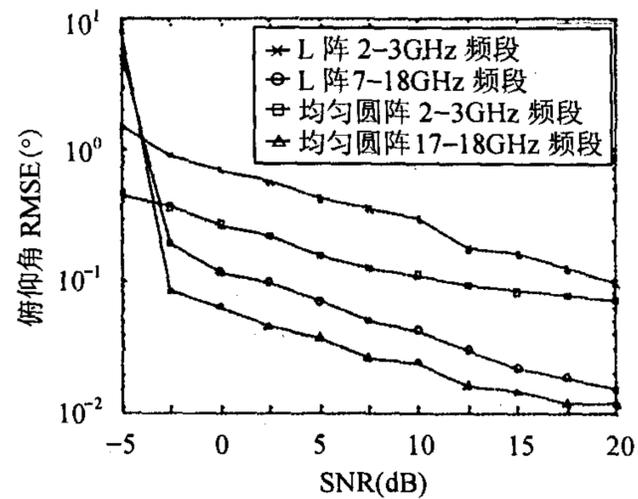


图 4 仰角估计均方根误差曲线

### 6 结束语

非平稳信号在实际应用中十分常见, 这类信号的分析研究越来越受到人们的重视, 但目前大多数研究成果集中在非平稳时间序列的时频能量分布分析上, 并且很少考虑欠采样的情形. 针对宽频段阵列接收系统, 本文提出一种时空欠采样线性调频信号参数和二维到达角的联合估计算法, 该算法将时频分析工具 (分数阶傅里叶变换) 与阵列信号处理结合起来, 能够实现多个信号调频斜率和初始频率及二维到达角高精度估计. 作为 LFM 信号的一种特例, 窄带平稳信

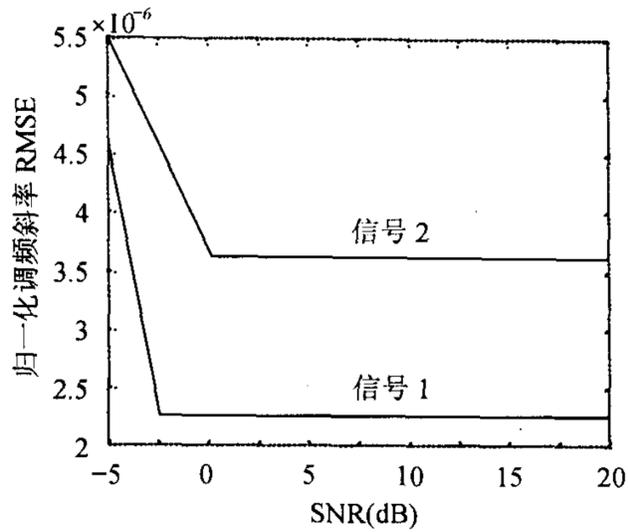
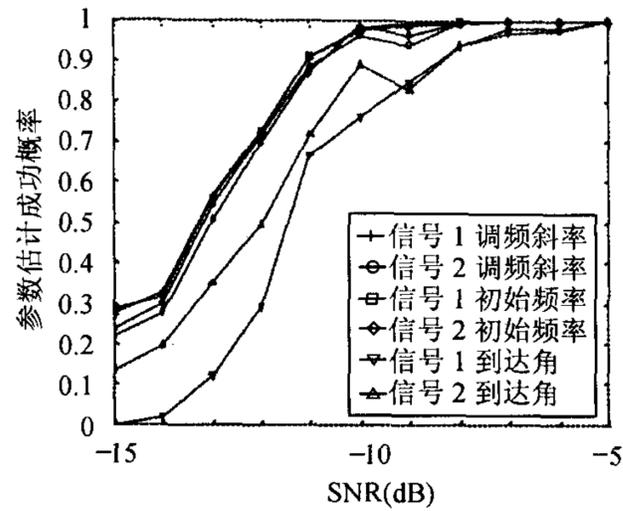
图5 归一化调频斜率  $k$  估计均方根误差

图6 低信噪比下各参数成功估计概率

号也可用本方法实现高精度频率估计(限于篇幅,没有给出仿真算例)。仿真实验表明本方法在低信噪比情况下仍有较好性能,具有工程应用价值。

### 参 考 文 献

- [1] Zoltowski M D, Mathews C P. Real time frequency and 2-D angle estimation with sub-Nyquist spatial-temporal sampling. *IEEE Trans. on SP*, 1994, 42(10): 2781-2794.
- [2] 黄佑勇, 王激扬, 陈天麒. 任意结构阵列基于高阶累积量的信号频率和二维角联合估计算法. *系统工程与电子技术*, 2001, 23(6): 32-35.
- [3] 斯德谊, 刘荣科, 程岱松等. 时空欠采样宽频段信号频率和二维到达角估计方法. *电子学报*, 2000, 28(3): 9-12.
- [4] 张贤达, 保铮. 非平稳信号分析与处理. 北京: 国防工业出版社, 1998: 158-160.
- [5] Ozaktas H M, Orhan Arikan. Digital computation of the fractional Fourier transform. *IEEE Trans. on SP*, 1996, 44(9): 2141-2149.
- [6] Santhanam B, McClellan J H. The discrete rotational Fourier transform. *IEEE Trans. on SP*, 1996, 42(4): 994-998.
- [7] Candan C, Kutay M A, Ozaktas H M. The discrete fractional Fourier transform. *IEEE Trans. on SP*, 2000, 48(5): 1329-1337.
- [8] Pei S C, Yeh M H. Discrete fractional Fourier transform based on orthogonal projection. *IEEE Trans. on SP*, 1999, 47(5): 1335-1348.

田 达: 男, 1975 年生, 博士生, 目前研究兴趣为谱估计、阵列信号处理算法研究和系统实现、DSP 技术、非平稳信号处理。

陈天麒: 男, 1938 年生, 教授, 博士生导师, 长期从事自适应信号处理、阵列信号处理、信号多参量估计与跟踪、高阶谱估计、多传感器数据融合及电子工程系统等方面的研究工作。