

## FDTD 结合变分法计算线天线间耦合度

张 玉 朱培芸 梁昌洪

(西安电子科技大学天线与微波技术国家重点实验室 西安 710071)

**摘 要** 线天线的自阻抗、互阻抗及耦合度是工程应用中迫切需要但又很难计算准确的。该文将时域有限差分法和变分原理相结合,求解了线天线之间的互阻抗,从而得到了耦合系数。其结果与 FEKO, NEC 仿真均吻合良好,表明该文方法可以获得比传统 FDTD 计算方法更加准确的计算结果。

**关键词** FDTD, 变分原理, 互耦

中图分类号: TN82, TM154

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2006)02-0372-04

## Calculation of Mutual Coupling between Wire Antennas by Applying Variational Principles in FDTD

Zhang Yu Zhu Pei-yun Liang Chang-hong

(National Key Lab of Antennas and Microwave Technology, Xidian Univ., Xi'an 710071, China)

**Abstract** Self impedance, mutual impedance and coupling of antennas are crying out for engineering application, but they can not be easily accurately calculated. The scheme that combines variational principles and the FDTD is presented in this paper to calculate the mutual impedance of wire antennas and the coupling coefficients. Numerical results obtained here have a good agreement with that from FEKO and NEC, which validate the accuracy and efficiency of this method.

**Key words** FDTD, Variational principle, Mutual coupling

### 1 引言

天线之间的互耦分析由于其重要的工程意义,一直以来受到国内外研究者的广泛重视。在数值模拟中,通常采用矩量法<sup>[1]</sup>与时域有限差分方法<sup>[2]</sup>。其中,时域有限差分法(FDTD)是近年来发展极为迅速的电磁场数值计算方法,它能够广泛地应用于天线特性的分析和设计。但将该方法应用于求解天线阵之间的耦合这一天线设计中人们十分关心的问题时,采用FDTD法直接提取自阻抗和互阻抗的方法计算互耦往往难以计算准确。

为了获得比较准确的自阻抗结果,文献[3]中提出了FDTD与变分原理相结合求解线天线的自阻抗问题。该法在求解表面场时,采用了二阶数值微分。文献[4]改进了求解表面散射场的公式,避免了数值微分。

本文将在文献[4]的基础上,进一步根据哈林顿<sup>[5]</sup>的变分思想,计算天线间互阻抗,从而得到了耦合系数。结果表明这种方法比直接用FDTD提取天线互阻抗的方法有更高的精

度,由此获得的互耦结果也更具有实际的参考意义。

### 2 基本理论及其公式

#### 2.1 激励源的设置

通常应用FDTD计算线天线有两种激励方式即 $\delta$ 电压源激励和电流源激励,分别如图1和图2所示,本文均给予采用。

图1中,线天线沿 $z$ 向放置,在馈电点处的GAP之间设置 $\delta$ 电压源,其余的沿线电场 $E_z$ 分量为零。这种情况下, $z$ 向的 $\delta$ 源是

$$E_z^n(i, j, k) = -\frac{V_s(t)}{\Delta z} \quad (1)$$

式中激励电压 $V_s$ 可以是高斯脉冲,也可以是正弦调制的高斯脉冲。电压源所引起的天线上电流分布可以通过求解包围该电场分量的磁场的线积分求得:

$$I(n\Delta t) = [H_y^{n+1/2}(i, j, k) - H_y^{n+1/2}(i-1, j, k)]\Delta y - [H_x^{n+1/2}(i, j, k) - H_x^{n+1/2}(i, j-1, k)]\Delta x \quad (2)$$

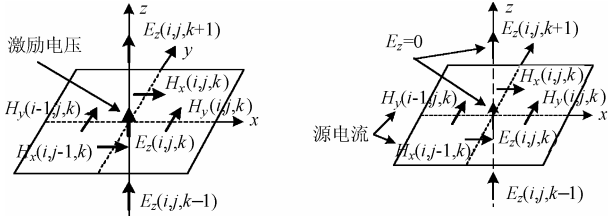


图 1  $\delta$  电压源激励模

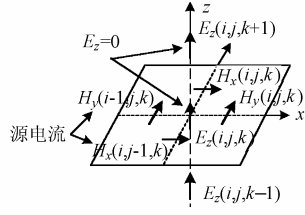


图 2 电流源激励模型

值得注意的是，GAP 的大小是一个空间网格间隔。

图 2 中，线天线沿  $z$  向放置，其上的电场分量  $E_z$  为零，定义图示位置环绕天线的 4 个磁场  $H$  分别为

$$\begin{aligned} H_x^n(i, j, k) &= -\frac{\delta_s(t)}{\Delta x}, & H_y^n(i-1, j, k) &= -\frac{\delta_s(t)}{\Delta y} \\ H_y^n(i, j, k) &= \frac{\delta_s(t)}{\Delta y}, & H_x^n(i, j-1, k) &= \frac{\delta_s(t)}{\Delta x} \end{aligned} \quad (3)$$

式中  $\delta_s$  可以是高斯脉冲，也可以是正弦调制的高斯脉冲。由于线天线被定义为理想导体，因此无法像电压源激励那样可以直接求出馈电点处的输入电压。

### 2.2 细线天线的共形

计算细线天线模型时，为了让 FDTD 模拟更加精确，本文采用了细线共形技术。如图 3 所示。

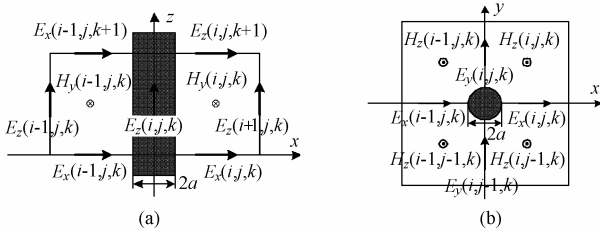


图 3 细线天线 FDTD 建模示意图

(a)  $xoz$  面内网格表面 (b)  $xoy$  面内网格表面

细天线半径  $a < 0.5\Delta x$ ，且  $a$  远远小于一个波长，导线沿  $z$  方向置于 Yee 网格中。根据散射近场的物理特性，可以假定：在细导线附近的环向磁场和径向电场均按  $1/r$  的规律变化，其中  $r$  是距离导线中心的垂直距离。基于上面的假设，对于图 3(a)所示  $xoz$  面内导线内部及含细导线网格表面的环路的场可表示为

$$E_z(i, j, k) = 0, \quad E_z(i+1, j, k) = \text{constant}$$

$$E_x(r, j, k) \approx E_x(i, j, k) \frac{\Delta x}{2r}, \quad E_x(r, j, k+1) \approx E_x(i, j, k+1) \frac{\Delta x}{2r}$$

$$H_y(r, j, k) \approx H_y(i, j, k) \frac{\Delta x}{2r}$$

对于  $xoz$  面内导线右侧网格表面回路，由法拉第定律可得

$$\begin{aligned} 0 + \int_a^{\Delta x} E_x(i, j, k+1) \frac{\Delta x}{2r} dr - E_z(i+1, j, k) \Delta z - \int_a^{\Delta x} E_x(i, j, k) \frac{\Delta x}{2r} dr \\ = -\mu \Delta z \frac{\partial}{\partial t} \int_a^{\Delta x} H_y(i, j, k) \frac{\Delta x}{2r} dr \end{aligned}$$

对上式右侧的时间导数进行差分处理并进行化简，可得

$$\begin{aligned} H_y^{n+1/2}(i, j, k) &= H_y^{n-1/2}(i, j, k) \\ &+ \frac{\Delta t}{\mu} \left[ \frac{E_z^n(i+1, j, k)}{(\Delta x/2) \ln(\Delta x/a)} - \frac{E_x^n(i, j, k+1) - E_x^n(i, j, k)}{\Delta z} \right] \end{aligned} \quad (4)$$

同理可得其它分量的磁场迭代方程。采用 FDTD 模拟时，电场按照正常方式进行迭代求解，而磁场仅在细小导线附近时采用共形公式迭代。

### 2.3 线天线互阻抗的变分公式

利用经典的 Maxwell 方程，通过位函数法可求得线天线的电场求解方程。由于求解的是很细的线天线，可以做如下近似：电流只是沿着天线轴向流动；电流和电荷密度可以认为是线电流  $I$  及在导线轴上的  $\sigma$ ；只对导线表面上  $E$  的轴向分量使用边界条件切向电场为零。作了这些近似后，线天线产生的散射场就变成

$$E_s = -j\omega A_l - \partial\phi/\partial l \quad (5)$$

$$A = \mu \int_l I(l) \frac{e^{-jKR}}{4\pi R} dl, \quad \phi = \frac{1}{\epsilon} \int_l \sigma(l) \frac{e^{-jKR}}{4\pi R} dl, \quad \sigma = -\frac{1}{j\omega} \frac{\partial I}{\partial l}$$

其中  $A$  称为磁矢位， $\phi$  称为电标位， $\sigma$  为电荷密度， $R$  是源点到场点的距离。

特殊地，当线天线为对称振子时，设其沿  $z$  向放置，将坐标原点取在天线的中心，则天线表面的散射场为：

$$\begin{aligned} E_z &= -j\omega A_z - \partial\phi/\partial z \\ &= -j\omega \frac{\mu}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} I(z') G(z, z') dz' \\ &\quad + \frac{1}{j\omega 4\pi \epsilon} \frac{\partial}{\partial z} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\partial I(z')}{\partial z'} G(z, z') dz' \\ &= \frac{1}{j4\pi\omega\epsilon} \int_{-L/2}^{L/2} I(z') e^{-jKR} \left\{ \frac{k^2}{R} - \frac{1}{R^3} - \frac{k^2(z-z')^2}{R^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3(z-z')^2}{R^5} - j \frac{k}{R^2} + j \frac{3k(z-z')^2}{R^4} \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

二阶微分简化过程此处不做推导，详见文献[4]。其中，格林函数  $G(z, z') = e^{-jKR} / R$ ，

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

若计算模型如图 4 所示，天线 1 的输入电流为  $I_1$ ，在天线 2 上引起的电流分布为  $I_2$ ，自阻抗的求解可参考文献[4]，互阻抗变分公式为

$$z_{21} = -\frac{1}{I_{01} \cdot I_{02}} \int_{z_2} \mathbf{E}_{z21} \cdot \mathbf{I}_2(l) dl_2 \quad (7)$$

其中  $I_{01}$ ,  $I_{02}$  分别为天线 1 和天线 2 中心点处的电流;  $\mathbf{E}_{z21}$  为天线 1 在天线 2 表面上产生的轴向场, 由式(6)决定;

$R = \sqrt{d^2 + (z - z')^2}$ ,  $L$  为振子长度,  $d$  为两振子相距距离。

#### 2.4 耦合系数的计算公式

(1)若负载阻抗  $Z_L$  选取  $50\Omega$ , 则通过自阻抗  $Z_{11}$  和互阻抗  $Z_{21}$  转换为  $[S]$  参数, 即可得到此时的耦合系数为

$$C = 20 \log(S_{21}) \quad (8)$$

其中  $S_{21} = \frac{-Z_{21}Z_L}{(Z_{11} + z_L)(Z_{11} + Z_L) - Z_{12}Z_{21}}$ ;

(2)NEC<sup>[6]</sup>给出的最大耦合系数为

$$G_{\max} = \frac{1}{L} (1 - \sqrt{1 - L^2}) \quad (9)$$

其中  $L = \frac{|Y_{12}Y_{21}|}{2\text{Re}(Y_{11}) \cdot \text{Re}(Y_{22}) - \text{Re}(Y_{12} \cdot Y_{21})}$ 。

### 3 数值结果

#### 3.1 计算互阻抗

传统 FDTD 求解两根线天线之间的互阻抗的方法: 采用如图 1 所示的  $\delta$  电压源激励, 记录天线 1 馈电点每一时刻的时域电压  $U_z^s(t)$  以及天线 2 中心位置处的时域电流  $I_2(t)$ , 通过傅里叶变换得到频域电压  $U_z^s(\omega)$  和电流  $I_2(\omega)$ , 采用  $Z_{21} = U_z^s(\omega)/I_2(\omega)$  即可计算得两线天线的互阻抗。这种方式因不能真实反映出 1 端口的开路电流条件, 因此误差较大, 后面的计算结果也表明了这一点。

该文 FDTD 结合变分原理求解互阻抗的方法为: 采用如图 2 所示的电流源激励, 通过 FDTD 模拟得到两根线天线上的时域电流分布, 将其通过傅里叶变换变成频域电流分布, 代入式(6)求解天线 2 表面的散射场  $\mathbf{E}_{z21}$ , 再代入互阻抗的变分公式(7), 即可求出互阻抗  $Z_{21}$ 。

如图 4 所示的沿  $z$  向放置的两个半波振子, 天线长度为  $L = 0.1 \text{ m}$ , 工作频率为  $f = 1.5 \text{ GHz}$ , 波长  $\lambda = 0.2 \text{ m}$ , 半径  $a = 1 \text{ mm}$ , 采用了共形技术和 PML 吸收边界条件。FDTD 模拟的数据为: 一个波长划分 42 个网格, 整个半波振子为 21 个网格,  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 4.762 \text{ mm}$ ,  $\Delta t = 9.169 \text{ ps}$ 。计算区域的尺寸在  $xyz$  方向分别为  $34 \times 93 \times 73$  网格。

对于用 FDTD 提取的两根线天线上的真实电流采用了修正和样条插值<sup>[3]</sup>。本文计算了两根线天线的自阻抗和互阻抗随  $d/\lambda$  变化的曲线, 如图 5~图 7 所示。

从图 5 可以看出, 随着两根振子间距的变大, 它们的自

阻抗逐步趋向于一个定值, 意味着自阻抗受天线 2 的影响随

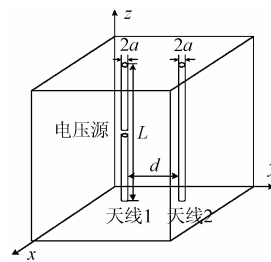


图 4 两个半波振子及馈电方式

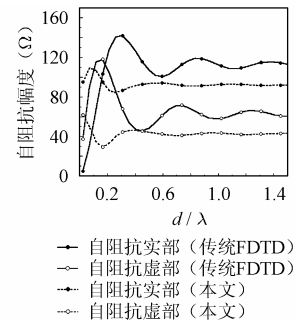


图 5 两个半波振子的自阻抗

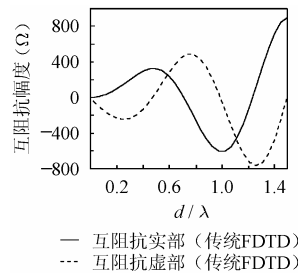


图 6 两个半波振子的互阻抗 (传统 FDTD)

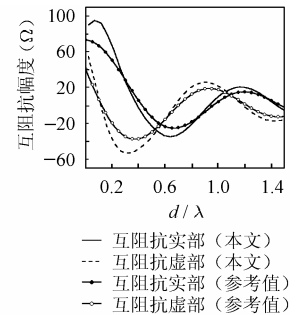


图 7 两个半波振子的互阻抗 (变分法)

间距的增大逐渐减弱; 另外, 可以看出, 当两个半波振子相距  $1.5\lambda$  时, 传统 FDTD 计算结果稳定在  $112.6 + j60.3(\Omega)$  附近, 而采用变分法后稳定在  $92.0 + j42.9(\Omega)$  附近, 很明显变分法的结果比传统 FDTD 的更准确, 因为当间距足够大时, 天线 1 的自阻抗应该接近一根半波振子的自阻抗, 即  $73.0 + j42.5(\Omega)$  附近。

从图 6 和图 7 可以看出用传统 FDTD 方法直接计算互阻抗的方法所得数值结果达到几百的量级, 并且随着两半波振子间距的增大互阻抗增加, 这是不符合实际情况的; 结合变分法后有了很大的改善, 十分逼近参考值。本文结果与文献[5]存在的差异是由于本文采用的电流分布是计算的真实值, 而文献[5]中的电流分布是假定的正弦分布, 可以看成是理想状态, 因此有一定差距是合理的。

#### 3.2 计算耦合系数

(1) 端口 2 接  $50\Omega$  阻抗时, 天线 1 与天线 2 之间的耦合系数如图 8 所示:

第 1 种方法是将传统 FDTD 直接计算得出的自阻抗和互阻抗数据应用于式(8), 其结果有很大抖动, 主要原因是由于互阻抗计算不准确, 达到了几百欧姆的量级且随间距增加而增大; 第 2 种方法(本文)是将变分后的自阻抗和互阻抗数据代入式(8), 可以看出其结果平滑, 且与 FEKO 仿真吻合良好。

(2) 端口接共轭匹配负载时, 天线 1 与天线 2 之间的最大耦合系数如图 9 所示。

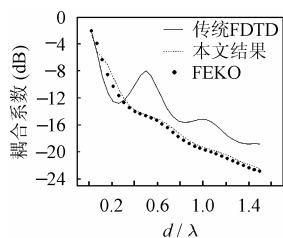


图 8 计算耦合系数(端接  $50\Omega$  负载)的比较

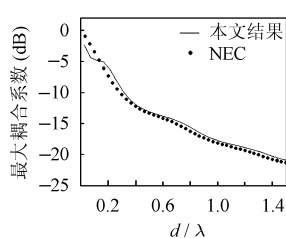


图 9 计算最大耦合系数的比较

本文是通过把 FDTD 与变分法相结合后得到的阻抗矩阵元素应用于式(9), 计算得两个半波振子随间距变化的最大耦合系数, 并与 NEC 仿真进行了对比, 结果吻合良好。值得注意的是, 采用传统 FDTD 直接计算得出的自阻抗和互阻抗由于其不合理性已经无法得到最大耦合系数。

从图 8 和图 9 可以看出, 两种情况下的耦合系数, 本文的计算结果均与 FEKO、NEC 吻合良好, 充分说明了 FDTD 与变分法结合计算互阻抗和耦合系数的有效性。

#### 4 结束语

本文将 FDTD 与变分原理相结合计算天线间互阻抗, 数值结果比传统 FDTD 求解更准确、更贴近参考值, 从而得到了与 FEKO、NEC 相吻合的耦合系数, 表明了本文方法的正确性和有效性, 这一工作具有现实的工程意义。

#### 参 考 文 献

[1] R. F. 哈林登 著, 王尔杰等译. 计算电磁场的矩量法. 北京:

国防工业出版社, 1981: 74 - 75.

- [2] 葛德彪, 闫玉波. 电磁波时域有限差分方法. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2002.4: 8 - 24.
- [3] Pekonen O P M, Nikoskinen K I, Goodwin S. Applying variational principles in FDTD antenna input impedance simulations. *Microwave and Optical Technology Letters*, 1998, 19(6): 422 - 427.
- [4] 杨娟, 张玉, 梁昌洪. 线天线输入阻抗的变分原理结合 FDTD 求解. *电波科学学报*, 2003, 18(1): 48 - 52.
- [5] Harrington R F. *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*. New York: McGraw-Hill, 1961: 348 - 355.
- [6] Burke G J. *Numerical Electromagnetics Code-NEC-4 Method of Moments Part II: Program Description--Theory*, UCRL- MA-109338. California: Lawrence Livermore National Laboratory, 1992.

张 玉: 男, 1978 年生, 讲师, 研究方向为并行电磁计算、电磁场数值方法、电磁兼容理论与仿真软件设计等方面研究.

朱培芸: 女, 1980 年生, 硕士生, 从事电磁场数值计算以及电磁兼容等方面的工作.

梁昌洪: 男, 1943 年生, 教授, 博士生导师, 中国电子学会会士, IEEE Senior member. 研究方向为计算场论、计算微波、微波网络理论、电磁散射与逆散射、电磁兼容等.