

# 基于小波多分辨分解的 HRP 算法的快速实现方法<sup>1</sup>

刘 东 相敬林

(西北工业大学航海工程学院 西安 710072)

**摘 要:** MP 类分解具有很好地再现信号内部正交稀疏结构的能力,但分解普遍存在“预响应”和局部特性“失配”等特点,为此 S. Jaggi 等人提出 HRP 算法以获得更为准确的信号内部结构,但面临更为庞大的运算量.本文结合小波多分辨快速分解算法提出了在小波域实现 HRP 的快速算法,并进一步给出了减少运算时间的 HRP 的并行算法结构.理论和仿真实验表明,小波方法与 HRP 的结合不但可以大大减少 HRP 的运算量,而且有助于改善小波分析的结果,是一种很有前途的信号自适应分解和特征提取方法.

**关键词:** HRP 算法,多分辨分解,稀疏,局部特性

**中图分类号:** TN911.7, O177.6 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-5896(2004)01-0151-06

## Fast HRP Algorithm Realization Methods Based on the Wavelet Multiresolution Decomposition

Liu Dong Xiang Jing-lin

(College of Marine Eng., Northwestern Polytechnical Univ., Xi'an 710072, China)

**Abstract** The Matching Pursuit(MP) algorithms display good performance of recurring the orthonormal sparse structure of signals, but the signal decomposition process widely exhibits pre-echo artifact and local mismatch, so HRP algorithm was proposed by S. Jaggi, *et al.* to acquire more exact inner structure of signals. Unfortunately HRP algorithm is followed by more huge operation cost. The fast HRP algorithm is advanced at wavelet domain by taking advantage of wavelet multiresolution decomposition, and a parallel algorithm framework is used to further reduce operation time. Theory and simulation trials indicate that HRP algorithm at wavelet domain not only reduces HRP operation cost greatly, but also improves the effect of the wavelet analysis, thus it is a promising technique applied in adaptive signal decomposition and feature extraction.

**Key words** HRP algorithm, Multiresolution decomposition, Sparse, Local specialty

### 1 引言

将平方可和的离散信号  $s \in \mathbf{R}^N$  分解在一组非正交或正交过完备原子基  $\{\varphi_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$  上进行分析有很多方法,如框架方法(MOF)、小波类方法和匹配投影(MP, Matching Pursuit)算法,它们都是在求解方程  $s = \Phi\alpha$  的系数向量  $\alpha$ ,其中  $\Phi = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_M]$ 。由于基的过完备性,满足上述条件的系数向量  $\alpha$  有很多可能,这就使得选取“最佳”意义上的  $\alpha$  变得很复杂,而且各种不同方法或算法下的系数向量  $\alpha$  的选取也采用不同的方法.一般都希望向量  $\alpha$  具有尽可能少的非零元素,以得到关于  $s$  的稀疏结构表示,即用尽可能少的原子基来表示信号  $s$ ,此时信号的分解所得原子分量将具有很强的能量聚集性。

1993年, S. G. Mallat 等人提出 MP 算法<sup>[1]</sup>,其基本思路是在过完备原子基  $\{\varphi_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$  中,依次选取与当前残差具有最大内积的一个原子作为分解过程得到的信号的组成分量.实践表明 MP 算法具有优良地再现信号内部的具有正交结构分量的能力,但分解存在“预响应”和

<sup>1</sup> 2002-07-22 收到, 2003-01-06 改回

牺牲局部时间分辨能力的不足。产生这个问题的关键不但在于基的选取问题上,更重要的原因是分解过程所用的“内积最大”选取原则对于信号局部特性的匹配性不敏感。1996年 S. Jaggi 等人针对此提出改进方法并将之命名为 HRP(High Resolution Pursuit) 算法<sup>[2]</sup>。从算法实现的基本结构来看,MP 和 HRP 算法并没有大的改变,但 HRP 算法定义了一个新的残差信号和原子信号的相似性度量,使得分解过程对于信号的局部特性更加敏感,这样就有效地避免了分解过程本身引入的人为产物,使得分解得到相对更少的原子但却具有更好的物理可解释性。

一般来说,在同样的非正交或正交完备原子基下分解,HRP 要比 MP 算法的计算量大,本文将考虑一种将小波的多分辨分解算法和 HRP 算法结合起来的方法,以大大地减小运算量,在此基础上,根据算法本身的特点进一步提出减少运算时间的并行算法结构。以此为基础的小波分解算法与一般的多分辨小波分解比较,也将具有更加稀疏的分解系数向量  $\alpha$  和更高的能量聚集性。

## 2 HRP 算法的描述与流程

为避免“预响应”和局部特性“失配”问题,使得分解过程对信号的局部特性更加敏感,HRP 算法放弃了“内积最大”原则,而采用改进了的匹配相似性度量<sup>[2]</sup>,对于每个原子  $\varphi_\gamma \in \mathbf{R}^N$  都在一个尺度更小的波形集合  $I_\gamma = \{\gamma_i, (j+k, t_i) | \varphi_{\gamma_i} = \sum_{i=1}^L c_i \varphi_{j+k, t_i}\}$ , 其中  $\varphi_{\gamma_i} \triangleq \varphi_{j+k, t_i}$ ,  $k$  为相似性度量的深度参数,相似性度量  $S(f, \varphi_\gamma)$  定义如下

$$S(f, \varphi_\gamma) = m(f, \varphi_\gamma) \min_{\gamma_i \in I_\gamma(k)} \frac{|\langle f, \varphi_{\gamma_i} \rangle|}{|\langle \varphi_{\gamma_i}, \varphi_{\gamma_i} \rangle|} \cdot m(f, \varphi_\gamma)$$

$$= \begin{cases} +1, & \forall \gamma_i \in I_\gamma(k), \frac{\langle f, \varphi_{\gamma_i} \rangle}{\langle \varphi_{\gamma_i}, \varphi_{\gamma_i} \rangle} > 0 \\ -1, & \forall \gamma_i \in I_\gamma(k), \frac{\langle f, \varphi_{\gamma_i} \rangle}{\langle \varphi_{\gamma_i}, \varphi_{\gamma_i} \rangle} < 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

由此可见,相似性度量由最差的局部匹配决定,即总是在一个比当前原子  $\varphi_\gamma$  尺度更小的波形集合  $\{\varphi_{\gamma_i} | \gamma_i \in I_\gamma(k)\}$  上,观察与信号匹配最差的  $\varphi_{\gamma_i}$  作为  $\varphi_\gamma$  和信号的相似性描述,这样与残差具有最大相似性度量的原子  $\varphi_{\gamma_n}$  将具有更加精确的信号局部特性描述能力,与 MP 算法的“内积”最大选优比较,这种相似性度量的值对于局部“失配”更加敏感,通过这个改进的相似性度量,引导分解过程对残差局部特性的提取。算法具体实现步骤如下<sup>[2]</sup>: 令  $\mathbf{Rf}^0 = \mathbf{s}$

$$(1) \varphi_{\gamma_n} = \arg \max_{\gamma \in \Gamma} |S(\mathbf{Rf}^n, \varphi_\gamma)|;$$

$$(2) \mathbf{Rf}^{n+1} = \mathbf{Rf}^n - S(\mathbf{Rf}^n, \varphi_{\gamma_n}) \varphi_{\gamma_n};$$

(3) 当  $n = m$  or  $|\mathbf{Rf}^{n+1} / \mathbf{Rf}^0| \leq \varepsilon$ , 算法停止,否则  $n = n + 1$ , 进入 (1)。  $\varepsilon$  是为达到一定的分解精度预先指定的一个很小的数值,  $m$  为预先设定的一个数值。

## 3 HRP 具有以下内在性质<sup>[2-4]</sup>

令  $\mathbf{Rf}^{n+1} = \mathbf{Rf}^n - S(\mathbf{Rf}^n, \varphi_{\gamma_n}) \varphi_{\gamma_n}$ , 则有

(1)  $|\langle \mathbf{Rf}^{n+1}, \varphi_{\gamma_i} \rangle| \leq |\langle \mathbf{Rf}^n, \varphi_{\gamma_i} \rangle|$ ,  $|\langle S(\mathbf{Rf}^n, \varphi_{\gamma_n}) \varphi_{\gamma_n}, \varphi_{\gamma_i} \rangle| \leq |\langle \mathbf{Rf}^n, \varphi_{\gamma_i} \rangle|$ , for all  $\gamma_i \in I_\gamma$ , 即对于所有的  $\gamma_i \in I_\gamma$ ,  $\langle \mathbf{Rf}^{n+1}, \varphi_{\gamma_i} \rangle$  代表  $\mathbf{Rf}^{n+1}$  落在原子  $\varphi_{\gamma_i}$  支撑区内的“能量”的度量,这个量应当不大于  $\mathbf{Rf}^n$  落在其中的“能量”度量。此外“能量”的度量相应减少的量  $\langle S(\mathbf{Rf}^n, \varphi_{\gamma_n}) \varphi_{\gamma_n}, \varphi_{\gamma_i} \rangle$  不能超过原来  $\mathbf{Rf}^n$  本身落在其中的“能量”的度量<sup>[2,3]</sup>。

(2)  $\text{sgn}(\langle \mathbf{Rf}^{n+1}, \varphi_{\gamma_i} \rangle) = \text{sgn}(\langle \mathbf{Rf}^n, \varphi_{\gamma_i} \rangle)$ , for all  $\gamma_i \in I_\gamma$ , 即保证分解不能引入原先没有的“非特征”信息,  $\mathbf{Rf}^n$  的投影在原子  $\varphi_{\gamma_i}$  支撑区内符号不应当随着分解过程的进行而改变。

#### 4 利用多分辨小波分解算法 (Mallat 算法) 实现 HRP 的快速分解

##### 4.1 利用多分辨小波分解算法实现 HRP 的快速分解的考虑

(1) 在小波原子基上, 假定原子  $\varphi_\gamma \in V_j$ , 即  $\varphi_\gamma$  位于第  $j$  级平滑逼近子空间  $V_j$ , 则集合  $\{\langle \mathbf{Rf}^n, \varphi_\gamma \rangle | \varphi_\gamma \in V_j\}$  中所有元素的运算都对应于用 Mallat 算法得到的各级的分解离散逼近系数, 利用 Mallat 算法一次完成这个工作, 相似性度量  $S(f, \varphi_\gamma)$  中需要计算的  $\langle \mathbf{Rf}^n, \varphi_{\gamma_i} \rangle$  对应于  $\mathbf{Rf}^n$  的第  $j-k$  级离散逼近系数,  $k$  为  $\varphi_\gamma$  和  $\varphi_{\gamma_i}$  的尺度差。另外  $\langle \varphi_\gamma, \varphi_{\gamma_i} \rangle$  的计算可由重构低通滤波器系数得出或预先计算后存储起来。这样分解过程需要计算的  $\{S(f, \varphi_\gamma) | \gamma \in \Gamma\}$  完全可以以很小的运算代价得到, 估计只需要  $O(KN)$ ,  $K$  为集合  $\{I_\gamma(k)\}$  的势 (与深度参数  $k$  有关),  $N$  为离散信号维数, 运算量少于 S. Jaggi 等人所给的  $O(KN \log_2 N)^{[2]}$ 。

(2) 初始化的时候, 需要计算集合  $\{\langle \mathbf{Rf}^0, \varphi_\gamma \rangle | \varphi_\gamma \in V_j\}$ , 这部分工作的计算量就是 Mallat 算法的计算量  $O(N \log_2 N)$ , 也远小于 S. Jaggi 等人给出的  $O(N^2 \log_2 N)$ 。

(3) 利用残差的快速迭代算法  $\langle \mathbf{Rf}^{n+1}, \varphi_\gamma \rangle = \langle \mathbf{Rf}^n, \varphi_\gamma \rangle - \dot{S}(\mathbf{Rf}^n, \varphi_{\gamma_n}) \langle \varphi_{\gamma_n}, \varphi_\gamma \rangle$ ,  $\mathbf{Rf}^{n+1}$  不需要按照 Mallat 算法重新进行分解, 只需要对以前存储的  $\langle \mathbf{Rf}^n, \varphi_\gamma \rangle$  进行更新就可以得到对应的  $\langle \mathbf{Rf}^{n+1}, \varphi_\gamma \rangle$ , 由于  $\{\varphi_\gamma | \varphi_\gamma \in V_j, j = 0, 1, \dots, \log_2(N-1)\}$  的势为  $N$ , 整个残差迭代运算量估计为  $O(N)$ 。另外算法需要存储的  $\langle \mathbf{Rf}^{n+1}, \varphi_\gamma \rangle$  的个数也为  $N$ , 对存储量的要求也不大, 而且  $\langle \varphi_{\gamma_n}, \varphi_\gamma \rangle$  的计算完全可以利用  $\varphi_{\gamma_n}$  与  $\varphi_\gamma$  的参数性质得到。

由上分析, 分解进行  $M$  次的总运算量为  $O(N \log_2 N) + O(MN(\beta \cdot K + 1))$ ,  $\beta$  代表为确定最佳深度参数  $k$  需要进行的试探次数,  $\beta < \log_2 N$ , 一般地  $\beta < 3$ 。

##### 4.2 基于小波分解快速算法的 HRP 算法快速实现流程

(1) 对待分析信号  $v = \mathbf{Rf}^0$  进行 Mallat 快速算法分解, 并存储各级的离散逼近系数集合  $\{\langle \mathbf{Rf}^j, \varphi_\gamma \rangle | \varphi_\gamma \in V_j, j = 0, 1, \dots, \log_2 N - 1\}$ 。

(2) 对于每个  $\varphi_\gamma$ , 利用已存储的  $\mathbf{Rf}^n$  第  $j-k$  级分解的离散逼近系数  $\langle \mathbf{Rf}^n, \varphi_{\gamma_i} \rangle$  计算集合  $\{S(\mathbf{Rf}^n, \varphi_\gamma)\}$ , 则  $\varphi_{\gamma_n} = \arg \max_{\gamma \in \Gamma} |S(\mathbf{Rf}^n, \varphi_\gamma)|$ 。

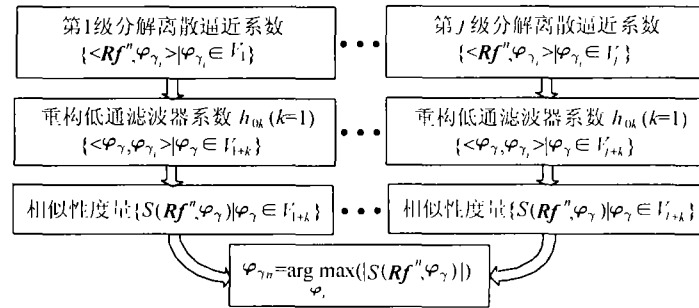
(3)  $n = n + 1$ , if  $n > m$  或  $|\mathbf{Rf}^{n+1} / \mathbf{Rf}^n| \leq \varepsilon$ , 算法结束。

(4) 利用残差快速迭代公式  $\langle \mathbf{Rf}^{n+1}, \varphi_\gamma \rangle = \langle \mathbf{Rf}^n, \varphi_\gamma \rangle - S(\mathbf{Rf}^n, \varphi_{\gamma_n}) \langle \varphi_{\gamma_n}, \varphi_\gamma \rangle$ , 进入 (2)。

需指出的是, S. Jaggi 等人的 HRP 快速算法中原子基  $\{\varphi_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$  的势为  $N \log_2 N$ , 分解是在各级节点下的尺度子空间 ( $V$ ) 和小波子空间 ( $W$ ) 中选取最佳。但考虑到很多实际情况如信号包络的稀疏分解、信号光滑成分的特征提取, 只需得到反映信号内部结构的局部特征, 甚至只需将结构紧密的信号分量分解开, 而不必得到基于小波包分解的各分量表示的信号的整体分解, 因此本文引入运算量能进一步减少的基于  $V$  空间的多分辨率分解的 HRP 快速算法。

#### 5 进一步减少运算时间的方法

由 (4.2) 节算法流程中的 (2), 每个相似性度量  $S(\mathbf{Rf}^n, \varphi_\gamma)$  的计算完全相同且所需的条件都已经由上一步给出, 很自然地考虑到运用如图 1 所示并行算法结构来节省运算的时间。

图 1 基于小波多分辨分解的 HRP 的并行算法结构<sup>2</sup>

由于增加了同时进行运算的单元，运算的时间得到了成倍的减少，但注意到各级尺度空间  $V_j (j = 1, 2, \dots, J)$  内的离散逼近系数数目的不平衡 (级数越大，离散逼近的数目越少)， $J = \log_2 N - 1$  为小波分解的最大尺度，因此用上述并行算法结构的时候，考虑将级数较高的合并起来或将级数较低的分解成几个运算结构，以平衡各并行算法分支的运算时间。对上述并行算法结构进行不同的合并和分解方式，还可以得到更加有效的算法结构，当对每一个原子都安排一个计算相似性度量  $S(Rf^n, \varphi_{\gamma})$  的并行运算单元的时候，算法的运行时间将变为原来的  $1/N$ 。

## 6 信号分解实验

与 S. Jaggi 在文献 [2] 中所使用分解函数相同，在这里采用双正交三次 B 样条小波<sup>[5]</sup>对两类典型的信号进行分解分析：一类是内部结构紧密的信号，待分析信号及算法迭代 6 步分析结果如图 2 所示；另外一类是突发性信号，待分析信号及算法迭代 5 步分析结果如图 3 所示，信号长度均为 512 点，迭代结束时，分解所得的残差能量都已不足原信号能量的 5%。

图 2(a) 中原信号由 5 个不同尺度、位置和幅度的 B 样条函数组成，HRP 分解准确重现了其中的 4 个分量的 B 样条函数 (图 2(b) 中 a, b, c 和 f 分别对应于图 2(a) 中 1, 2, 3 和 5)；图 2(a) 中的 1, 2 和 5 分量的幅度、尺度和位置精确重现，3 分量的尺度和位置准确重现，4 分量由于与附近分量的结构过于紧密，此时 HRP 分解将趋向于使用比这个 B 样条函数尺度更小的原子 (图 2(b) 中 d, e 原子) 来表示信号在这个地方的内部结构。此外分解向量的非零系数个数约为 6 个，要小于用框架方法和小波类方法得到的数目，比较真实、清晰地反映了信号的组成。

图 3(a) 中信号由 4 个不同尺度和位置的 B 样条函数经过截断后生成，用 HRP 分解准确重现了其中的 3 个 B 样条函数分量的尺度和位置 (图 3(a) 中 2 ~ 4 原子分别对应于图 3(b) 中 c ~ e 原子)，以及它们幅值的相对大小；图 3(b) 中分解所得的 a, b 原子恰对应于图 3(a) 中原子 1 的小尺度分量，由于信号在此处的突发性，HRP 分解使用了尺度更小的 a, b 两个原子来准确重现突发性到来的时刻，从而有效避免了 MP 分解中引入的“预响应”问题，分解结果可以得到很好地解释。

<sup>2</sup> 若深度参数  $k > 1$ ， $h_{k1} = \langle \varphi_{\gamma_i}, \varphi_{\gamma_i} \rangle$ ，很容易从小波的二次方程推导得出，另外图 1 中采用的重构滤波器系数符号与含义与文献 [5] 类似。

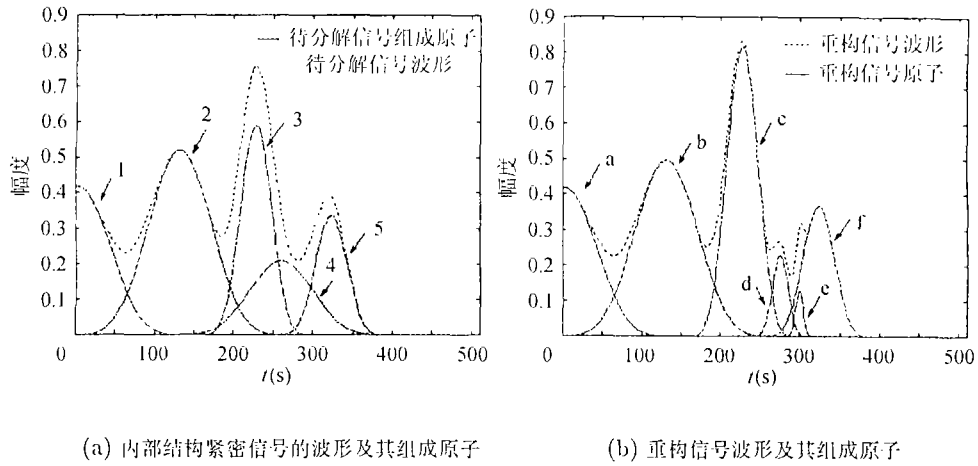


图 2 内部结构紧密信号的 HRP 分解

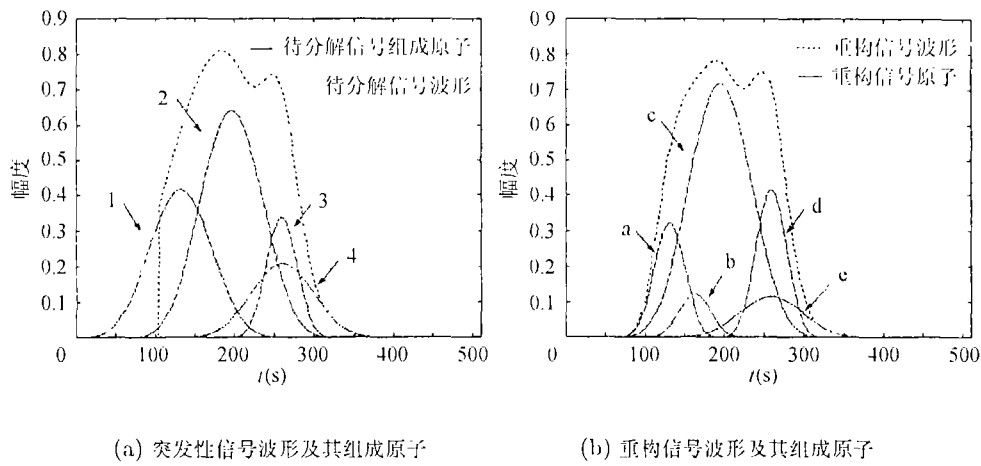


图 3 突发性信号的 HRP 分解

为显示利用小波分解快速算法实现 HRP 分解的高效性, 这里给出对于图 2 和图 3 所示典型信号, 使用各方法所需运算时间的比较, 在系统硬件配置 PIII-450PC, 64M RAM 下, 利用软件包 Matlab 进行分析, 运算时间如表 1 所示。

表 1 典型信号分解所用时间比较

	普通方法 (s)	利用小波分解快速 HRP 算法 (s)	并行结构算法 (s)
图 2 所示信号	64.6400	≈1.6200	≈1.6200/P
图 3 所示信号	54.1600	≈1.3600	≈1.3600/P

可以看出, 利用小波多分辨分解的快速 HRP 算法运算速度比普通方法提高了 40 倍左右, 另外在使用了前述的并行算法结构 ( $P \leq N$  个运算单元) 以及有效的安排各分支的运算量后, 运算时间得到了进一步地减少, 即 HRP 算法与小波多分辨分解、优化的并行运算结构的结合使得 HRP 算法的效率得到了很大提高, 可以大大减少算法实现需要的运行时间。

## 7 结论

本文借助于小波多分辨快速分解算法快速、有效地实现了 HRP 分解, 并利用并行运算结构进一步地减少运算时间。从 HRP 算法的理论分析和仿真试验结果来看:

(1) 由于本文给出的基于小波多分辨分解 HRP 算法实现充分地借助了小波的多分辨思想, 而 HRP 算法本身总是将信号与原子的“匹配”特性放在一个组成该原子的更小尺度上的原子集上去观察, 算法在每一步的迭代过程中, 选取与信号局部结构最为“相似”的一个分量, 因此可以说, 本文提出的基于小波多分辨分解的 HRP 算法是对小波分析的扩展。

(2) 由于 HRP 算法具有敏感的局部特性度量, 使准确重现信号内部结构较为紧密的分量及信号突发性出现的时刻成为可能, 系数向量含有更少的非零值即具有稀疏结构, 信号能量集中在相对更少的原子上, 因此与小波多分辨分解相结合的 HRP 算法有助于改善小波分析结果。

以上这些对于快速有效地实现信号的自适应分解和特征提取都是非常有利的。

## 参 考 文 献

- [1] Mallat S, Zhang Z. Matching pursuit with time-frequency dictionaries. *IEEE Trans. on SP*, 1993, 41(12): 3397-3415.
- [2] Jaggi S, Willam C K, Mallat S. High resolution pursuit for feature extraction. Tech. Rep. LIDS-P-2371, MIT, Nov. 1996.
- [3] Gribonval R, Bacry E, Mallat S, *et al.*. Analysis of sound signals with high resolution matching pursuit. in Proc. IEEE-SP Int. Symp. Time-Freq. Time-Scale Anal., Paris, France, June 1996: 125-128.
- [4] Montufar-Chaveznava R, Quantized high resolution pursuit. in Proc. IEEE-SP Int. Symp. Time-Freq. Time-Scale Anal., Pittsburgh, Pennsylvania, U.S.A., 1998: 189-192.
- [5] 杨福生. 小波变换的工程分析与应用. 北京: 科学出版社, 2000: 148-152.

刘 东: 男, 1977 年生, 博士, 主要从事水下信号与信息处理、被动水声信号特征提取与重构的研究。

相敬林: 男, 1936 年生, 教授, 博士生导师, 主要从事水下信号与信息处理的研究。