第 21 卷 第 1 期
1999 年 1 月

电子科学学刊
JOURNAL OF ELECTRONICS

Vol.21 No.1
Jan. 1999

延迟双向联想记忆神经网络的周期振荡现象研究 [1]

廖晓峰　虞厥邦

(电子科技大学光电子技术系　成都　610054)

摘　要　带轴突信号传输延迟的双向联想记忆 (BAM) 神经网络是两层异联想网络，本文详细讨论带延迟 BAM 网络周期解的存在与唯一性，得到了一个充分条件；并用具体例子验证了所得结论的正确性。我们的结果对于具体的延迟 BAM 振荡神经电路的设计和应用具有重要的指导意义。

关键词　轴突信号传输延迟，双向联想记忆神经网络，周期解，存在性，唯一性

中图号　TN-052

1 引　言

Kosko 提出双向联想记忆神经网络模型以来，它已在模式识别、自动控制等诸多领域内取得令人瞩目的进展 [1]。然而无论是带延迟还是不带延迟的 BAM 模型，目前的主要工作都集中于 BAM 平衡态的稳定性性质的研究 [2−4]。众所周知，神经动力学系统不仅仅涉及到平衡态稳定性性质的研究，动力学系统还有周期振荡、分岔和混沌等诸多现象，存在这些现象的神经网络对联想记忆具有更大的研究价值。从生物神经系统研究来看，人的大脑时刻处在周期振荡或混沌状态，因此对神经网络周期振荡现象以及混沌现象的研究尤为重要。

本文主要讨论带轴突信号传输延迟的双向联想记忆神经网络的周期解的存在性和唯一性，这是文献 [1, 3, 4] 中未曾涉及到的。在第 2 节中我们首先给出延迟 BAM 神经动力学模型和其电路结构图；在第 3 节中详细讨论了带轴突信号传输延迟 BAM 的周期解的存在性和唯一性，得到了充分条件；在第 4 节中给出了一个具体例子并进行了计算机仿真，实验结果表明了所得结论的正确性。因此我们的方法和结论对于周期振荡神经电路的具体设计具有重要的指导意义。

2 时变外部输入的延迟 BAM 模型

本文考虑如下带时变输入的延迟 BAM 网络：

$$\dot{x}_i(t) = -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{p} W_{ji} S_j(y_j(t-\tau_{ji})) + I_i(t), \tag{1a}$$

$$\dot{y}_j(t) = -b_j y_j(t) + \sum_{i=1}^{n} V_{ij} S_i(x_i(t-\sigma_{ij})) + J_j(t), \tag{1b}$$

$$i = 1, 2, \cdots, n; \quad j = 1, 2, \cdots, p.$$

这里 $x = [x_1, \cdots, x_n]^T \in R_n$, $y = [y_1, \cdots, y_p] \in R^P$; a_i, b_j, τ_{ij} 和 σ_{ij} 分别为非负数，信号函数 S_i, S_j 是连续可微且有界的单调增函数，时间延迟 τ_{ji}, σ_{ij} 相应于轴突信号传输的有限速度；外部输入 $I_i:\ R^+ \to R, i = 1, 2, \cdots, n$, 和 $J_j:\ R^+ \to R, j = 1, 2, \cdots, p$ 是连续且周期

[1] 1997-03-25 收到，1998-05-09 定稿
清华大学智能技术与系统国家重点实验室开放基金资助

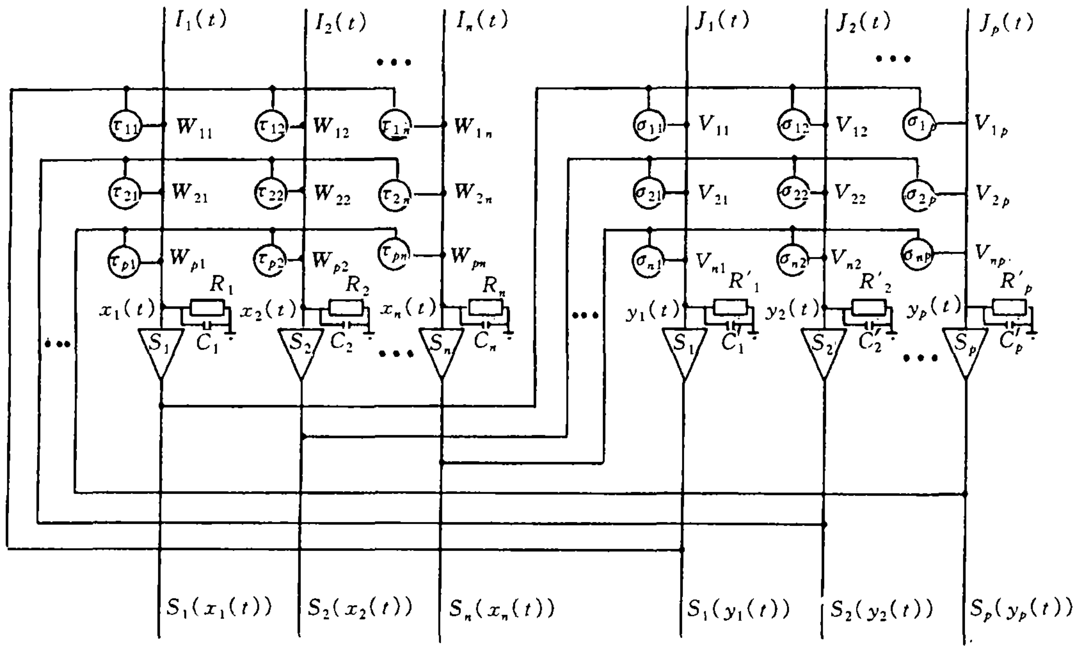

图 1　延时 BAM 模型的模拟实现 $(a_i = 1/(R_iC_i),\ b_j = 1/(R_jC_j))$

为 ω 的周期函数，即 $I_i(t+\omega) = I_i(t),\ J_j(t+\omega) = J_j(t)$ 。系统 (1a) 和 (1b) 式的神经电路结构如图 1 。

3　延时 BAM 的周期解

本节研究系统 (1a), (1b) 式的周期解，因此有如下定理：

定理　设联接权 W_{ji}, V_{ij}, $(i = 1,2,\cdots,n;\ \ j = 1,2,\cdots,p)$ 是实常数，外部输入 $I_i(t)$, $J_j(t)$ 满足 $I_i(t+\omega) = I_i(t)$, $J_j(t+\omega) = J_j(t)$, $(i = 1,\cdots,n; j = 1,\cdots,p)$, 并且存在正常数 λ_i, $\lambda_{n+j}(i = 1,2,\cdots,n; j = 1,\cdots,p)$ 和 $\epsilon > 0$, 使得

$$\lambda_i a_i - \sum_{j=1}^{p} \lambda_{n+j} \left| V_{ij} \frac{\mathrm{d}s_i(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma} \right| \geq \epsilon > 0, \tag{2a}$$

$$\lambda_{n+j} b_j - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left| W_{ji} \frac{\mathrm{d}s_j(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma} \right| \geq \epsilon > 0, \tag{2b}$$

那么系统 (1a), (1b) 式恰存在一个 ω— 周期解，并且 (1a), (1b) 式的所有其它解都渐近收敛于这个周期解。

证明　设 $C = C\left(\begin{pmatrix} [-\tau,0] \\ [-\sigma,0] \end{pmatrix}, R^{n+p}\right)$ 是映射 $\begin{pmatrix} [-\tau,0] \\ [-\sigma,0] \end{pmatrix}$ 到 R^{n+p} 上且具有一致连续拓扑的连续函数的 Banach 空间。对于任意 $\begin{pmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \end{pmatrix} \in C$, 我们定义

$$\left\| \begin{pmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \end{pmatrix} \right\| = \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} |\varphi_x(\theta)| + \sup_{-\sigma \leq \theta \leq 0} |\varphi_y(\theta)|, \tag{3}$$

这里

$$|\varphi_x(\theta)| = \sum_{i=1}^{n} |\varphi_{xi}(\theta)|, \quad |\varphi_y(\theta)| = \sum_{j=1}^{p} |\varphi_{yi}(\theta)|. \tag{4}$$

对于任意 $\begin{pmatrix}\varphi_x\\ \varphi_y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\psi_x\\ \psi_y\end{pmatrix} \in C$, 我们记

$$X(t,\varphi_x) = [x_1(t,\varphi_x),\cdots,x_n(t,\varphi_x)]^T, \quad X(t,\psi_x) = [x_1(t,\psi_x),\cdots,x_n(t,\psi_x)]^T, \tag{5a}$$

$$Y(t,\varphi_y) = [y_1(t,\varphi_y),\cdots,y_n(t,\varphi_y)]^T, \quad Y(t,\psi_y) = [y_1(t,\psi_y),\cdots,y_n(t,\psi_y)]^T, \tag{5b}$$

为系统 (1a), (1b) 式分别通过 $\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\varphi_x\\ \varphi_y\end{pmatrix}\right)$ 和 $\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\psi_x\\ \psi_y\end{pmatrix}\right)$ 的解.

定义

$$X_t(\varphi_x) = X(t+\theta,\varphi_x), \qquad \theta\in[-\tau,0], \quad t\ge 0, \tag{6a}$$

$$Y_t(\varphi_y) = Y(t+\theta,\varphi_y), \qquad \theta\in[-\sigma,0], \quad t\ge 0, \tag{6b}$$

则对任意 $t \ge 0$, $\begin{pmatrix}X_t(\varphi_x)\\ Y_t(\varphi_y)\end{pmatrix} \in C$ 。由系统 (1a), (1b) 式我们有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}[x_i(t,\varphi_x)-x_i(t,\psi_x)]}{\mathrm{d}t} &= -a_i[x_i(t,\varphi_x)-x_i(t,\psi_x)] \\ &\quad + \sum_{j=1}^{p} W_{ji}[S_j(y_j(t-\tau_{ji},\varphi_y)) - S_j(y_j(t-\tau_{ji},\psi_y)],\end{aligned} \tag{7a}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}[y_i(t,\varphi_y)-y_i(t,\psi_y)]}{\mathrm{d}t} &= -b_j[y_j(t,\varphi_y)-y_j(t,\psi_y)] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} V_{ij}[S_i(x_i(t-\sigma_{ij},\varphi_x)) - S_i(x_i(t-\sigma_{ij},\psi_x)].\end{aligned} \tag{7b}$$

定义 Lyapunov 函数:

$$\begin{aligned}V(t) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\Big[&|x_i(t,\varphi_x)-x_i(t,\psi_x)| + \sum_{j=1}^{p}\int_{t-\tau_{ji}}^{t} |W_{ji}(S_j(y_j(\xi,\varphi_y)) \\ &- S_j(y_j(\xi,\psi_y)))|\mathrm{d}\xi\Big] + \sum_{j=1}^{p}\lambda_{n+j}\Big[|y_i(t,\varphi_y)-y_j(t,\psi_y)| \\ &+ \sum_{i=1}^{n}\int_{t-\sigma_{ij}}^{t}|V_{ij}(S_i(x_i(\xi,\varphi_x)) - S_i(x_i(\xi,\psi_x)))|\mathrm{d}\xi\Big].\end{aligned} \tag{8}$$

不难计算 $V(t)$ 沿系统 (7a), (7b) 式解的上右 Dini 导数:

$$\begin{aligned}D^+V(t)|_{(7,a,b)} &\le \sum_{i=1}^{n}\left(-\lambda_i a_i + \sum_{j=1}^{p}\left|V_{ij}\frac{\mathrm{d}s_i(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma}\right|\right)|x_i(t,\varphi_x)-x_i(t,\psi_x)| \\ &\quad + \sum_{j=1}^{p}\left(-\lambda_{n+j}b_j + \sum_{i=1}^{n}\left|W_{ji}\frac{\mathrm{d}s_j(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma}\right|\right)|y_j(t,\varphi_y)-y_j(t,\psi_y)| \\ &\le -\epsilon\left[\sum_{i=1}^{n}|x_i(t,\varphi_x)-x_i(t,\psi_x)| + \sum_{j=1}^{p}|y_j(t,\varphi_y)-y_j(t,\psi_y)|\right].\end{aligned} \tag{9}$$

由 (8), (9) 式有

$$V(t)+\epsilon\int_0^t\left[\sum_{i=1}^n|x_i(\xi,\varphi_x)-x_i(\xi,\psi_x)|+\sum_{j=1}^p|y_j(\xi,\varphi_y)-y_j(\xi,\psi_y)|\right]\mathrm{d}\xi\le V(0). \tag{10}$$

因为

$$\underline{\lambda}\left(\sum_{i=1}^n|x_i(t,\varphi_x)-x_i(t,\psi_x)|+\sum_{j=1}^p|y_i(t,\varphi_y)-y_i(t,\psi_y)|\right)\le V(t),$$

这里 $\underline{\lambda}=\min_{1\le i\le n+p}(\lambda_i)$,

$$\begin{aligned}V(0)\le&\left[\max_{1\le i\le n}\lambda_i+\max s_j'(\sigma)\sum_{i=1}^n\lambda_i\max_{1\le j\le p}|W_{ji}|\right]\|\varphi_x-\psi_x\|\\&+\left[\max_{1\le j\le n}\lambda_{n+j}+\max s_i'(\sigma)\sum_{i=1}^n\lambda_{n+j}\max_{1\le i\le n}|V_{ij}|\right]\|\varphi_y-\psi_y\|.\end{aligned} \tag{11}$$

因此不难选择 λ_i, ε, 使得 $M<1$, 有

$$\left|\sum_{i=1}^n|x_i(t,\varphi_x)-x_i(t,\psi)|+\sum_{j=1}^p|y_i(t,\varphi_y)-y_j(t,\psi_y)|\right|\le M(\|\varphi_x-\psi_x\|+\|\varphi_y-\psi_y\|) \tag{12}$$

成立。

定义 Poincare 映射 $T:C\to C$ 为

$$T\begin{pmatrix}\varphi_x\\\varphi_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X_\omega(\varphi_x)\\Y_\omega(\varphi_y)\end{pmatrix}, \tag{13}$$

那么由系统 (1) 式有

$$\left\|T^m\begin{pmatrix}\varphi_x\\\varphi_y\end{pmatrix}-T^m\begin{pmatrix}\psi_x\\\psi_y\end{pmatrix}\right\|\le M\left\|\begin{pmatrix}\varphi_x\\\varphi_y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\psi_x\\\psi_y\end{pmatrix}\right\|. \tag{14}$$

这就证明了 T^m 是一压缩映射，且存在唯一不动点 $\begin{pmatrix}\varphi_x^*\\\varphi_y^*\end{pmatrix}\in C$, 使得

$$T^m\begin{pmatrix}\varphi_x^*\\\varphi_y^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi_x^*\\\varphi_y^*\end{pmatrix}. \tag{15}$$

注意到

$$T^m\left(T\begin{pmatrix}\varphi_x^*\\\varphi_y^*\end{pmatrix}\right)=T\left(T^m\begin{pmatrix}\varphi_x^*\\\varphi_y^*\end{pmatrix}\right)=T\begin{pmatrix}\varphi_x^*\\\varphi_y^*\end{pmatrix}, \tag{16}$$

则 $T\begin{pmatrix}\varphi_x^*\\\varphi_y^*\end{pmatrix}\in C$ 也是 T^m 的一不动点，因此 $T\begin{pmatrix}\varphi_x^*\\\varphi_y^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi_x^*\\\varphi_y^*\end{pmatrix}$, 即

$$\begin{pmatrix}X_\omega(\varphi_x^*)\\Y_\omega(\varphi_y^*)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi_x^*\\\varphi_y^*\end{pmatrix}. \tag{17}$$

设 $\begin{pmatrix} X(t,\varphi_x^*) \\ Y(t,\varphi_y^x) \end{pmatrix}$ 是系统 (1a), (1b) 式通过 $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi_x^* \\ \varphi_y^* \end{pmatrix}\right)$ 的解，则 $\begin{pmatrix} X(t+\omega,\varphi_x^*) \\ Y(t+\omega,\varphi_y^x) \end{pmatrix}$ 也是系统 (1a), (1b) 式的解，显然对 $t \geq 0$, 有

$$\begin{pmatrix} X_{t+\omega},(\varphi_x^*) \\ Y_{t+\omega},(\varphi_y^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_t(X_\omega(\varphi_x^*)) \\ Y_t(Y_\omega(\varphi_y^*)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_t(\varphi_x^*) \\ y_t(\varphi_y^*) \end{pmatrix}. \tag{18}$$

因此，对 $t \geq 0$ 有

$$\begin{pmatrix} X(t+\omega,\varphi_x^*) \\ Y(t+\omega,\varphi_y^x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(t,\varphi_x^*) \\ Y(t,\varphi_y^x) \end{pmatrix}. \tag{19}$$

这就证明了 $\begin{pmatrix} X(t,\varphi_x^*) \\ y(t,\varphi_y^*) \end{pmatrix}$ 恰为系统 (1a), (1b) 式的一 ω— 周期解，并且易知系统 (1a), (1b) 的所有解都渐近收敛到这个周期解。 证毕

4 例子和计算机仿真

例 考虑如下四个元胞网络:

$$\dot{x}_1(t) = -1.6x_1(t) - 0.51\tanh(y_1(t-\tau)) + 0.51\tanh(y_2(t-\tau)) + \sin t, \tag{20a}$$

$$\dot{x}_2(t) = -1.1x_2(t) - 0.62\tanh(y_1(t-\tau)) + 0.42\tanh(y_2(t-\tau)) + \cos t, \tag{20b}$$

$$\dot{y}_1(t) = -1.2y_1(t) - 0.73\tanh(x_1(t-\tau)) + 0.33\tanh(x_2(t-\tau)) + \sin t, \tag{20c}$$

$$\dot{y}_2(t) = -1.0y_2(t) - 0.84\tanh(x_1(t-\tau)) - 0.74\tanh(x_2(t-\tau)) - \cos t. \tag{20d}$$

由于激活函数 $\tanh(x)$ 在 $x=0$ 处函数导数取全局极大值 1，因此不难验证 (20a)-(20d) 式满足定理或推论之条件，取 $\tau = 1.0$, 用四阶 Runge-Kutta 方法进行仿真，初始条件对 $t \leq 0$, 取 $X = (0.1, 0.1)$, $(Y = (0.1, 0.1)$ 。结果如图 2- 图 4 所示。

5 结束语

本文详细讨论了带轴突信号传输延迟的双向联想记忆神经网络周期解的存在性和唯一性，得到了一个充分条件，且这一条件和延迟大小无关，我们的结果对实际振荡神经电路的设计具有重要的指导意义。由于篇幅限制，有关周期振荡神经网络的应用我们将另外报道。

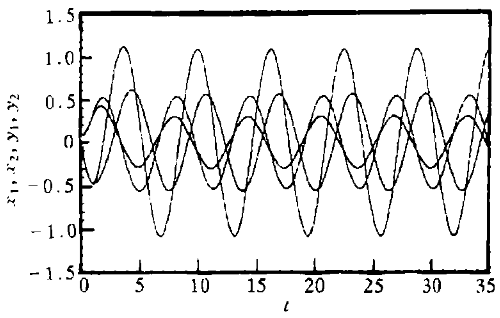

图 2 系统 (20) 式的运动轨迹图

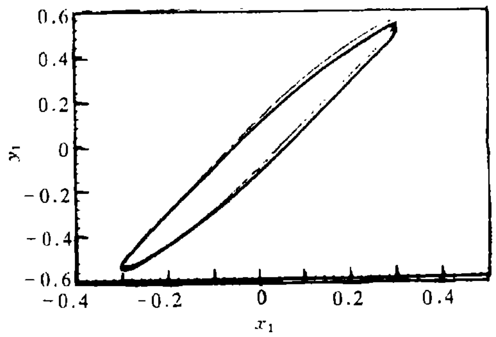

图 3 x_1, y_1 的相平面图

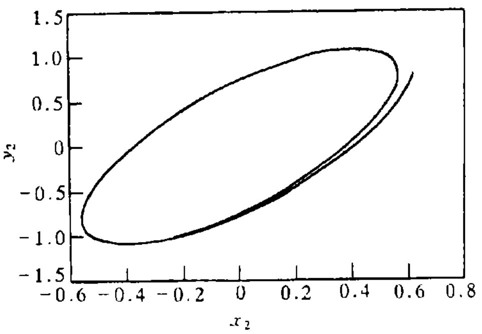

图 4　x_2, y_2 的相平面图

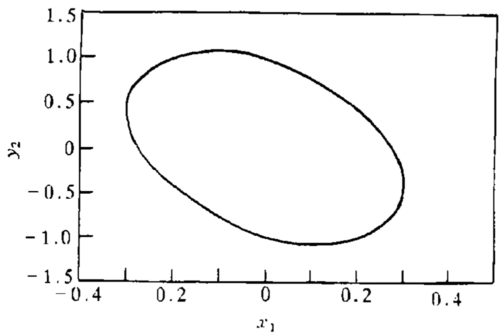

图 5　x_1, y_2 的相平面图

参 考 文 献

[1] Kosko B. Neural Networks and Fuzzy Systems—A Dynamical System Approach to Machine Intelligence. Prentice Hall International Inc., 1992, 38–108.

[2] 廖晓峰，刘光远，虞厥邦. 连续 BAM 模型的定性分析. 电路与系统学报， 1996, 2(2): 13–18.

[3] 廖晓峰，刘光远，虞厥邦. 具有轴突信号传输延迟的双向联想记忆神经网络. 电子科学学刊， 1997, 19(4): 439–444.

[4] Xiaofeng Liao, *et al.* Qualitative analysis of bidirectional associative memory with time delay. International Journal of Circuit Theory and Applications, 1998, to appear.

[5] Hirsch M W, Smale S. Differential Equations. Dynamical Systems and Linear Algebra. Orlando, FL: Acadmic Press, 1974.

[6] Michel A N, Miller R K. Qualitative Analysis of Large Scale Dynamical Systems. New York: Acadmic, 1977.

[7] Kelly D G. Stability in contractive nonlinear neural networks. IEEE Trans on Biomedical Engineering, 1990, 37(3): 231–242.

INVESTIGATION OF PERIODIC OSCILLATION PHENOMENON FOR NEURAL NETWORKS OF BAM WITH AXONAL SIGNAL TRANSMISSION DELAYS

Liao Xiaofeng　　Yu Juebang

(*Dept. of Optoelectronic Technology, UEST of China, Chengdu* 610054)

Abstract　Bidirectional associative memory models with axonal signal transmission delays are two-layer heteroassociative networks. In this paper, existence and uniqueness of periodic solutions are emphatically discussed for BAM with axonal signal transmission delays. A sufficient condition is obtained. Correctness for obtained results are verified by use of a numerical example. The obtained results have improtant leading significance in the design and application of oscillatory neural circuits for BAM with axonal signal transmission delays.

Key words　Axonal signal transmission delays, Neural networks of BAM, Periodic solutions, Existence, Uniqueness

廖晓峰：　男， 1964 年生，博士，副教授，在国内外重要刊物上发表论文三十余篇，主要兴趣是神经网络理论和应用研究.

虞厥邦：　男， 1932 年生，教授，博士生导师，主要兴趣是非线性网络理论和人工神经网络.