

# GS 正交算法中正交化次数的自动确定

肖丹

(北方交通大学信息所 北京 100044)

顾德仁

(电子科技大学电子工程学院 成都 610054)

**摘要** Gram-Schmidt (GS) 正交算法在自适应抗干扰领域日渐被人们所关注,特别是作为一种快速自适应波束形成算法而倍受重视。但采用这种算法需要首先确定信号源的个数,以决定正交化运算的次数。本文正是对此问题进行研究,提出一种简单的方法并利用一个判断阈值来实现在 GS 正交化过程中自动确定正交化运算的次数。

**关键词** GS 正交算法,自适应滤波,自适应波束形成

## 1 引言

在存在干扰的信号环境中,利用自适应滤波技术可以提高雷达接收系统的抗干扰能力,提高输出信号噪声比。传统的自适应滤波技术一般都是采用基于某种最佳准则的闭环自适应算法,如 LMS 算法<sup>[1]</sup>,RLS 算法和 HA (Howells-Applebaum) 算法等<sup>[2,3]</sup>。现代自适应信号处理对算法的收敛性能、对消性能以及对大动态范围干扰信号环境的自适应性能都提出了更高的要求。考虑到开环结构上的一些特点,人们开始关注开环自适应算法,其中之一便是 Gram-Schmidt (GS) 正交算法。本文主要是就 GS 正交算法中有关正交化运算次数的确定问题进行研究和讨论,并给出一种简单、有效的解决方法。

## 2 GS 正交算法原理和问题的引出

GS 正交算法的原理可以这样来概述,即假设信号空间中存在  $M$  个干扰信号矢量  $J_1, J_2, \dots, J_M$ , 对此  $M$  维的干扰信号矢量空间  $\text{Span}(J_1, J_2, \dots, J_M)$  进行  $M$  次采样,并将所得的  $M$  个相互独立的采样样本正交化,从而得到描述该干扰信号矢量空间的  $M$  维基:  $U_1, U_2, \dots, U_M$ , 且

$$\text{Span}(J_1, J_2, \dots, J_M) = \text{Span}(U_1, U_2, \dots, U_M). \quad (1)$$

若将一静态加权矢量  $W_q$  投影到此空间上,得矢量  $W_a$ , 则

$$W_a \perp \text{Span}(U_1, U_2, \dots, U_M). \quad (2)$$

由(1)又可得

$$W_a \perp \text{Span}(J_1, J_2, \dots, J_M). \quad (3)$$

对于任一矢量  $X, X \in \text{Span}(J_1, J_2, \dots, J_M)$ , 均有如下内积,即

$$(X, W_a) = 0. \quad (4)$$

1993-07-22 收到,1994-04-06 定稿

肖丹 男,1964年生,博士后,研究方向:自适应阵列信号处理、图象处理和并行信号处理。

顾德仁 男,1924年生,教授,博士生导师,主要从事信号与信息处理研究工作。

(4)式意味着自适应干扰对消,而  $W_0$  即所求的自适应权矢量。由于整个算法均基于 GS 正交化算法,即

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= V_1 / |V_1|, \\ U_M &= V_M - \sum_{i=1}^{M-1} (V_M, U_i) \cdot U_i, \\ W_0 &= W_q - \sum_{i=1}^M (W_q, U_i) \cdot U_i, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中  $V_i$  表示干扰信号采样矢量,  $U_i$  表示单位化后的正交基,  $W_q$  于表示静态加权矢量,因而,这种自适应算法也称为 GS 正交算法。

Hung 和 Turner<sup>[4]</sup> 曾对 GS 正交算法的运算量作过研究,结论是该算法运算量小,响应速度快,且特别适于阵元数  $N$  远大于干扰源数  $M$  时的情况,因此 GS 正交算法也是一种快速波束形成算法。

由(5)式可知,在 GS 算法中,需要知道干扰源个数  $M$  以便确定正确的正交化次数。图 1 示出了阵元数  $N = 10$ , 干扰源个数  $M = 3$ , 而正交化次数为 2, 4 和 3 时的自适应干扰对消波束图。可见要获得最佳的自适应对消效果,就必须根据干扰源的个数确定相应的正交化次数。一般说来,干扰源个数的检测要采用基于信号相关矩阵特征值分解的检测方法来实现,但这种方法,往往运算量较大。表 1 为采用特征值分解方法判定信号源个数时的计算机模拟运算时间开销<sup>[5]</sup>。

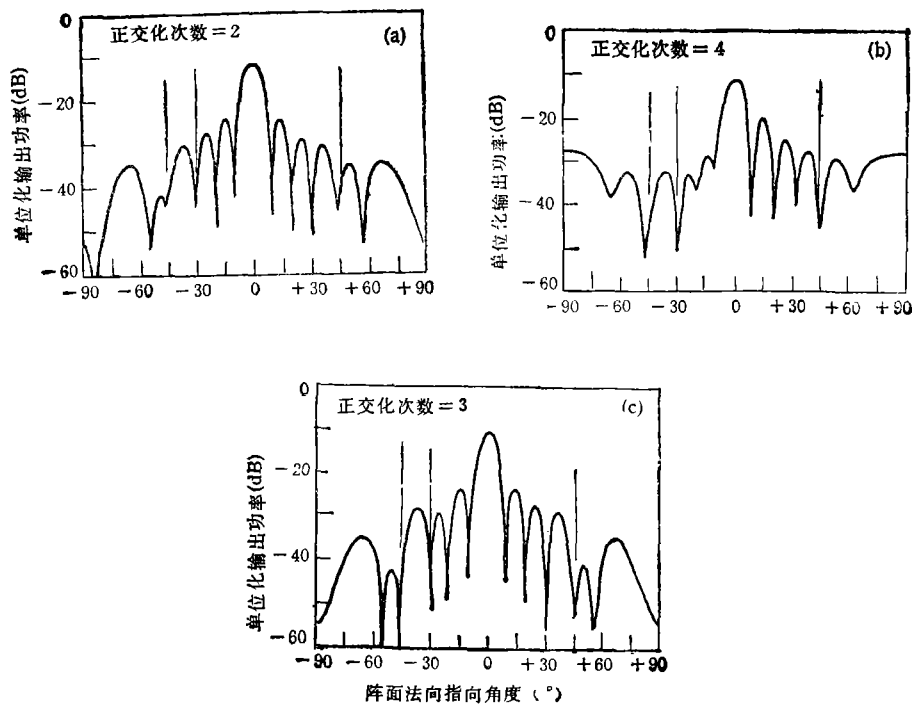


图 1 对消波束图

对于 GS 正交算法来说,若采用较费时的信号源检测方法,不利于发挥 GS 正交算

表 1 PC 机上进行特征值分解的时间开销(信号源数=3)

| 阵元数 | 快拍数 | 被分解矩阵大小 | 运算时间 (s) |
|-----|-----|---------|----------|
| 8   | 8   | 8×8     | 14       |
| 8   | 64  | 64×8    | 126      |
| 8   | 128 | 128×8   | 260      |

法作为快速算法的优点,因而十分有必要寻求一种快速、简便的方法来实现 GS 算法中对信号源个数的检测。

我们知道,对于一个  $M$  维的线性空间,仅有  $M$  个正交基,对应于 GS 正交化过程,则第  $M+1$  次正交化结果应等于零。在实际系统模拟中,考虑到系统的噪声影响,第  $M+1$  次正交化结果将不为零,而为一误差小量。因此若能根据某一阈值,对每次正交化运算结果进行比较;若运算结果大于相应的阈值,则继续进行下一次的正交化运算;反之,则停止正交化运算。由此也就解决了在 GS 算法中有关信号源个数或者正交化次数的确定问题。当然关键问题是如何给出该阈值。

### 3 阈值公式推导

设有一个  $N$  元等间距线性阵,且阵元为各向同性的,干扰源个数为  $M$ ,且干扰信号间互不相关。阵元上的信号采样矢量  $\mathbf{V}(t)$  为干扰信号矢量  $\mathbf{X}(t)$  与系统热噪声矢量  $\mathbf{n}(t)$  之和。

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{X}(t) + \mathbf{n}(t). \quad (6)$$

假设  $\mathbf{n}(t) = (n_1, n_2, \dots, n_k, \dots, n_N)$  为服从正态分布的白噪声,其中  $n_k = n_{kr} + jn_{ki}$ ,  $n_{kr}$  和  $n_{ki}$  分别为同相通道 ( $I$ ) 和正交通道 ( $Q$ ) 中的热噪声。它们互不相关,并有如下期望值:

$$E\{n_{kr}\} = E\{n_{ki}\} = 0, \quad (7)$$

$$E\{n_{kr}^2\} = E\{n_{ki}^2\} = \sigma^2. \quad (8)$$

由 GS 正交算法和第一次信号采样矢量  $\mathbf{V}(t_1)$ , 可得

$$\mathbf{V}'(t_1) = \mathbf{V}(t_1) = \mathbf{X}(t_1) + \mathbf{n}(t_1). \quad (9)$$

单位化后的正交基为

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(t_1) &= \mathbf{V}'(t_1) / |\mathbf{V}'(t_1)| \\ &= \mathbf{X}(t_1) / |\mathbf{V}'(t_1)| + \mathbf{n}(t_1) / |\mathbf{V}'(t_1)| \\ &= \mathbf{e}(t_1) + \mathbf{n}''(t_1), \end{aligned} \quad (10)$$

其中  $|\mathbf{V}'(t_1)|$  表示  $\mathbf{V}'(t_1)$  的模值,  $\mathbf{e}(t_1)$  为理想情况下的单位正交基。

第二次正交化结果可由下式给出:

$$\mathbf{V}''(t_2) = \mathbf{V}(t_2) - (\mathbf{V}(t_2), \mathbf{U}(t_1)) \times \mathbf{U}(t_1). \quad (11)$$

将  $\mathbf{V}(t_2) = \mathbf{X}(t_2) + \mathbf{n}(t_2)$  代入(11)式,并利用内积性质  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c})$ , 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{V}''(t_2) &= \mathbf{X}(t_2) - (\mathbf{X}(t_2), \mathbf{U}(t_1)) \cdot \mathbf{U}(t_1) \\ &\quad + \mathbf{n}(t_2) - (\mathbf{n}(t_2), \mathbf{U}(t_1)) \cdot \mathbf{U}(t_1) \\ &= \mathbf{X}(t_2) - (\mathbf{X}(t_2), \mathbf{U}(t_1)) \cdot \mathbf{U}(t_1) + \mathbf{n}'(t_2), \end{aligned} \quad (12)$$

其中

$$\mathbf{n}'(t_2) = \mathbf{n}(t_2) - (\mathbf{n}(t_2), \mathbf{U}(t_1)) \cdot \mathbf{U}(t_1). \quad (13)$$

现将(10)式代入(12)式,在干扰噪声比较大的情况下,可近似得到

$$\mathbf{V}'(t_2) = \mathbf{X}'(t_2) + \mathbf{Q}(t_2) + \mathbf{n}'(t_2), \quad (14)$$

其中  $\mathbf{X}'(t_2)$  表示在理想情况下的正交基,且可表示如下:

$$\mathbf{X}'(t_2) = \mathbf{X}(t_2) - (\mathbf{X}(t_2), \boldsymbol{\epsilon}(t_1)) \cdot \boldsymbol{\epsilon}(t_1); \quad (15)$$

$\mathbf{Q}(t_2)$  表示由于噪声  $\mathbf{n}(t_1)$  引入的累积误差矢量,并由下式给出:

$$\mathbf{Q}(t_2) = -(\mathbf{X}(t_2), \mathbf{U}(t_1)) \cdot \mathbf{n}''(t_1). \quad (16)$$

现将(14)式给出的  $\mathbf{V}'(t_2)$  单位化得

$$\mathbf{U}(t_2) = \boldsymbol{\epsilon}(t_2) + \mathbf{Q}'(t_2) + \mathbf{n}''(t_2), \quad (17)$$

其中

$$\boldsymbol{\epsilon}(t_2) = \mathbf{X}'(t_2) / |\mathbf{V}'(t_2)|, \quad (18)$$

$$\mathbf{Q}'(t_2) = \mathbf{Q}(t_2) / |\mathbf{V}'(t_2)|, \quad (19)$$

$$\mathbf{n}''(t_2) = \mathbf{n}'(t_2) / |\mathbf{V}'(t_2)|. \quad (20)$$

略去高阶小量  $\mathbf{Q}'(t_2)$ ,就得到近似的单位化正交基

$$\mathbf{U}(t_2) \approx \boldsymbol{\epsilon}(t_2) + \mathbf{n}''(t_2) \quad (21)$$

类似地,不难得到第  $k$  次正交化运算结果:

$$\mathbf{V}'(t_k) = \mathbf{X}(t_k) + \mathbf{Q}(t_k) + \mathbf{n}'(t_k), \quad (22)$$

其中

$$\mathbf{X}(t_k) = \mathbf{X}(t_k) - \sum_{i=1}^{k-1} (\mathbf{X}(t_k), \boldsymbol{\epsilon}(t_i)) \cdot \boldsymbol{\epsilon}(t_i), \quad (23)$$

$$\mathbf{Q}(t_k) = -\sum_{i=1}^{k-1} (\mathbf{X}(t_k), \boldsymbol{\epsilon}(t_i)) \cdot \mathbf{n}''(t_i), \quad (24)$$

$$\mathbf{n}'(t_k) = \mathbf{n}(t_k) - \sum_{i=1}^{k-1} (\mathbf{n}(t_k), \mathbf{U}(t_i)) \cdot \mathbf{U}(t_i). \quad (25)$$

现设干扰信号矢量空间的维数为  $M$ ,且  $M = k - 1$ ,则由(22)式给出的第  $k$  次正交化结果中,理想情况下的正交基  $\mathbf{X}'(t_k)$  应为零,则此时有

$$\mathbf{V}'(t_k) = \mathbf{Q}(t_k) + \mathbf{n}'(t_k), \quad (26)$$

$$|\mathbf{V}'(t_k)|^2 = |\mathbf{Q}(t_k)|^2 + |\mathbf{n}'(t_k)|^2 + \mathbf{Q}(t_k) \cdot \mathbf{n}^H(t_k) + \mathbf{n}'(t_k) \cdot \mathbf{Q}^H(t_k). \quad (27)$$

其中  $H$  表示共轭转置。由于矢量  $\mathbf{n}(t_i)$  与  $\mathbf{n}(t_k)$  在  $k \neq i$  时,是互不相关的,则

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{Q}(t_k) \cdot \mathbf{n}^H(t_k)\} &= \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(\mathbf{X}(t_k), \boldsymbol{\epsilon}(t_i))}{|\mathbf{V}'(t_i)|} \cdot E\{\mathbf{n}'(t_i) \cdot \mathbf{n}^H(t_k)\} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (28)$$

因此,对(27)式两边取均值,得

$$E\{|\mathbf{V}'(t_k)|^2\} = E\{|\mathbf{Q}(t_k)|^2\} + E\{|\mathbf{n}'(t_k)|^2\}. \quad (29)$$

又有

$$\mathbf{n}''(t_i) = \frac{1}{|\mathbf{V}'(t_i)|} \cdot \mathbf{n}'(t_i) \leq \frac{1}{|\mathbf{V}'(t_i)|} \cdot |\mathbf{n}(t_i)|^2, \quad (30)$$

$$E\{|\mathbf{n}(t_i)|^2\} = E\left\{\sum_{k=1}^N |n_k|^2\right\} = 2N\sigma^2, \quad (31)$$

$$E\{|\mathbf{n}'(t_i)|^2\} < E\{|\mathbf{n}(t_i)|^2\} = 2N\sigma^2, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} E\{Q^2(t_k)\} &= E\left\{\sum_{i=1}^{k-1} |(\mathbf{X}(t_k), \mathbf{e}(t_i))|^2 \cdot |\mathbf{n}''(t_i)|^2\right\} \\ &= E\left\{\sum_{i=1}^{k-1} \frac{|(\mathbf{X}(t_k), \mathbf{e}(t_i))|^2}{|\mathbf{V}'(t_i)|^2} \cdot |\mathbf{n}'(t_i)|^2\right\} \\ &< 2N\sigma^2 \cdot \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i^2, \end{aligned} \quad (33)$$

其中

$$\beta_i^2 = \frac{|(\mathbf{X}(t_k), \mathbf{e}(t_i))|^2}{|\mathbf{V}'(t_i)|^2} \approx \frac{|(\mathbf{V}(t_k), \mathbf{U}(t_i))|^2}{|\mathbf{V}'(t_i)|^2}. \quad (34)$$

将(32),(33)式代入(29)式,可得

$$E\{\mathbf{V}^2(t_k)\} < 2N\sigma^2 \left(1 + \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i^2\right). \quad (35)$$

现取(35)式的平方根为阈值,即

$$\Delta(k) = \sqrt{2N\sigma^2 \left(1 + \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i^2\right)}. \quad (36)$$

由于(36)式为统计平均的结果,而实际判断时,每次正交化运算结果为一非平均值,这样就需对(36)式给出的阈值公式根据正态分布随机变量的一些特性来加以修正.由于正态分布的随机变量,其取值集中于均值附近的程度可用其均方差 $\sigma$ 来度量,亦即有如下概率密度:

$$P\{-\sigma \leq x \leq \sigma\} = 68\%,$$

$$P\{-2\sigma \leq x \leq 2\sigma\} = 95.5\%,$$

$$P\{-3\sigma \leq x \leq 3\sigma\} = 99.7\%.$$

这样可以用 $\sigma \sim 3\sigma$ 间的值来修正(36)式,但若修正后的阈值取值过高,不利于低信噪比下的检测判定,在本文中取一个平均的修正值 $1.5\sigma$ ,则(36)式可修正如下:

$$\Delta(k) = 1.5\sigma \sqrt{2N \left(1 + \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i^2\right)}. \quad (37)$$

#### 4 仿真实验

首先利用(37)式给出的判定阈值,对一个8元阵进行模拟实验.假设干扰源数 $M=3$ ,阵元间距 $d=\lambda/2$ ,另外,各干扰信号均具有相同的干扰噪声比, $\text{SNR}=20\text{dB}$ ,而 $\text{SNR}$ 可定义为 $\text{SNR}=10\lg(P_j^2/(2\sigma^2))$ , $P_j^2$ 表示干扰信号的功率, $\sigma$ 为噪声的方差,且令 $\sigma=1$ .表2为相应的实验数据.

从表2所示数据可知,在第4次正交化运算后,正交化结果便小于相应的阈值,因而判定干扰源个数为3,且停止正交化运算.此运算过程在与表1实验条件相同的情况下,仅用时3s

表2 实验数据

| 正交化次数       | 1     | 2    | 3    | 4   |
|-------------|-------|------|------|-----|
| $ V(t_k) $  | 110.4 | 56.5 | 78.6 | 7.6 |
| $\Delta(k)$ | 4.7   | 5.9  | 7.1  | 8.3 |

另外, 又对采用(37)式判定干扰源个数的准确率在相应的条件下进行了测试。在测试中, 令 SNR 从 10dB 起, 以 1 为步长递增至 60dB, 而对应于每一个 SNR 值, 经 50 次正交化判定试验后, 即可得相应 SNR 下的判定准确率。图 2 所示结果为阵元数  $N=10$ , 干扰源数  $M=7$  情况下的判定准确率曲线。

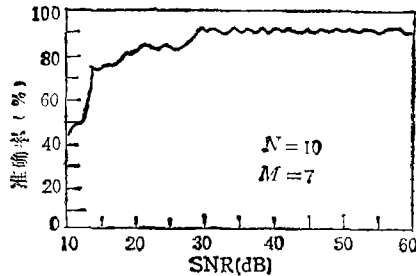


图2  $N=10, M=7$  时, 干扰源数判定准确率曲线

以上仅为部分模拟实验的结果。在实际系统中, 采用 GS 正交算法和利用(37)式为判别阈值可能有这样两个问题。一个是如何实现对干扰信号的单独采样, 以便构成一个不含目标信号的干扰信号空间。对此, 可以利用雷达系统的脉冲休止期来实现对干扰信号的单独采样。另一个问题是如何知道(37)式中的系统噪声的方差  $\sigma$ 。从理论上讲, 可以这样来测试系统的  $\sigma$  值。对一个  $N$  元阵, 设

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= (w_1, w_2, \dots, w_k, \dots, w_N) \\ &= (1/\sqrt{N}, 1/\sqrt{N}, \dots, 1/\sqrt{N}), \end{aligned} \quad (38)$$

则阵的输出, 在无目标信号和干扰信号存在时, 可表示为

$$y = (\mathbf{W}, \mathbf{n}(t)), \quad (39)$$

其中  $\mathbf{n}(t)$  表示系统中的噪声矢量, 且满足(7), (8)两式, 则阵输出功率的期望值可由下式给出:

$$\begin{aligned} E\{P_{out}\} &= E\{y^2\} = \sum_{k=1}^N E\{|w_k|^2 \cdot |n(t_k)|^2\} \\ &= \sum_{k=1}^N |w_k|^2 \cdot E\{|n(t_k)|^2\} = 2\sigma^2. \end{aligned} \quad (40)$$

这样通过测试系统在任何外部输入情况下的输出功率期望值, 并利用(40)式, 便可测知系统的噪声方差  $\sigma$ 。

## 5 结束语

本文基于 GS 正交算法和线性空间的基本性质, 给出了一种实现 GS 正交算法中自动确定正交化次数的方法。该方法具有运算简单、处理速度快的特点, 在干扰噪声比较大时, 亦有较高的准确率。

## 参 考 文 献

- [1] Widrow B. Adaptive filters. in Kalman R E. Declaris N, eds. Aspects of Networks and System

- Theory. New York: Holt, Rinehard and Winston, 1971.
- [2] Howells P W. Intermediate Frequency Sidelobe Canceller, US Patent 3,202,990. Aug. 1965.
- [3] Applebaum S P. Adaptive Arrays, Syracuse Uni. Res. Corp., Rep. SPL TR66-1, Aug. 1966.
- [4] Hung E K L, Turner R M. A fast-beamforming algorithm for large arrays, IEEE Trans. on AES, 1983, AES-19(4):598—606.
- [5] 葛利嘉, SVD 及其空间谱估计算法的高速数学信号处理器实现: [硕士论文]. 电子科技大学, 1991.3.

## AN AUTOMATIC DETECTION APPROACH FOR GS ORTHOGONALIZATION

Xiao Dan

*(Institute of Information Science, Northern Jiaotong University, Beijing 100044)*

Gu Deren

*(University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054)*

**Abstract** Gram-schmidt algorithm is an interesting theme in the field of adaptive beamformer as a fast algorithm. However, a key problem associated with this algorithm is the detection of orthogonalisation on the basis of prior-knowledge of interferences dimension. In this paper, a simple and fast approach is proposed to detect the orthogonalisation automatically in the procedure of GS orthogonal decomposition. Finally, computer simulations are presented.

**Key words** GS orthography algorithm, Adaptive filtering, Adaptive beamformer